PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVII N°2, pp. 25 -31, Lima - Perú, Octubre 2014

IDEALES PRINCIPALES Y CONJUNTOS APÉRY EN UN SEMIGRUPO NUMÉRICO

Mario E. Santiago Saldaña*[1]*, Martha O. Gonzales Bohorquez*[2]*,
Alex Molina Sotomayor*[3] *Andrés Guardia Cayo*[4]*.

(Recibido: 30/05/2014 - Aceptado: 07/07/2014)

Resumen: En este artículo examinaremos algunas relaciones existentes entre los ideales principales y los conjuntos Apéry en un semigrupo numérico $S = \langle s_1, s_2, ..., s_p \rangle$ con $p \geq 2,\ p \in \mathbb{N}$.

Palabras clave: Semigrupo Numérico, Conjunto Apéry, Ideal Principal, Laguna.

PRINCIPAL IDEALS APÉRY SETS IN A NUMERICAL SEMIGROUP

Abstract.- In this paper we will examine some relationships between the principal ideals and the Apéry sets in a numerical semigroup $S = \langle s_1, s_2, ..., s_p \rangle$ for $p \geq 2,\ p \in \mathbb{N}$.

Keywords: Numerical Semigroup, Apéry Set, Principal Ideal, Gap.

1. Introducción

Un *semigrupo numérico* S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ (el conjunto de los enteros no negativos) cerrado bajo la suma, tal que $0 \in S$ y $\mathbb{N} \setminus S$ es un conjunto finito. Para un semigrupo numérico S diremos que un subconjunto $A = \{s_1, s_2, ..., s_p\}$ es un conjunto generador de S si

$$S = \{\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \cdots + \lambda_p s_p : \lambda_i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq p\}$$

denotamos esto por

$$S = \langle s_1, s_2, ..., s_p \rangle$$

El conjunto $A = \{s_1, s_2, ..., s_p\}$ se dirá un *conjunto generador minimal* si ningún subconjunto propio de A genera a S. Es conocido, ver [4], que todo semigrupo numérico posee un único conjunto generador minimal.

Un importante invariante de S es el mayor entero que no pertenece a S, llamado el *número de Frobenius* de S, denotado $g(S)$, esto es $g(S) = \text{máx}\,(\mathbb{N} \setminus S)$. Para cada $m \in S \setminus \{0\}$, se define el conjunto Apéry de m en S como el conjunto

$$Ap(S, m) = \{s \in S : s - m \notin S\}$$

se demuestra, ver [4], que

$$Ap(S, m) = \{w(0), w(1), ..., w(m-1)\}$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: tiagomarsal@yahoo.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: martholinda@gmail.com
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: alexhino@mixmail.com
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: agcwallace@yahoo.es

donde $w(i)$ es el menor elemento de S que es congruente con i módulo m, $0 \leq i \leq m-1$. Note que $\sharp(Ap(S,m)) = m$, donde $\sharp(X)$ denota la cardinalidad de X. Note también que por definición, $g(S)+m \in Ap(S,m)$, mas aún $g(S)+m = \text{máx}(Ap(S,m))$, de donde

$$g(S) = \text{máx}(Ap(S,m)) - m$$

así hemos obtenido una expresión del número de Frobenius en función de los conjuntos Apéry. Un problema en abierto es expresar el número de Frobenius de un semigrupo numérico sólo en función de sus generadores, para detalles de este problema ver [2]

Los elementos de $\mathbb{N}\diagdown S$, que denotaremos por $H(S)$ son llamados las *lagunas* o *agujeros* (del inglés *gap*) de S.

En lo que sigue de este artículo asumiremos que $S = \langle s_1, s_2, ..., s_p\rangle$, donde $\{s_1, s_2, ..., s_p\}$ es un conjunto minimal de generadores.

2. Ideales e Ideales Principales en un Semigrupo Numérico

Un subconjunto I de S es un *ideal* si $I+S \subset I$. Si I, J son ideales de S, es fácil verificar que $I+J$, $I \cap J$ también lo son. Se dirá que un ideal I es generado por un subconjunto $A \subset S$ si $I = A+S$, en caso que A es finito, diremos que I es *finitamente generado*. Un ideal I se dirá *Principal* si este es generado por un solo elemento, en este caso existe $x_0 \in S$ tal que $I = \{x_0\}+S = \{x_0+s : s \in S\}$, denotaremos esto con $I = [x_0]$. Claramente, si $I = A_1+S$, $J = A_2+S$ son ideales, entonces, $I+J = (A_1+A_2)+S$. En particular, si $I_i = [m_i]$, para algún $m_i \in S$, $1 \leq i \leq t$, entonces

$$\sum_{i=1}^{t} I_i = \left[\sum_{i=1}^{t} m_i\right]$$

así, la suma de ideales principales es también un ideal principal.

Lema 2.1 Sean $m_1, ..., m_t$ elementos no nulos en un semigrupo numérico S, sean $I_i = [m_i]$, $1 \leq i \leq t$ los ideales principales respectivos. Entonces

$$\sum_{i=1}^{t} I_i \subset I_j$$

para todo $1 \leq j \leq t$.

Demostración. Sea j fijo pero arbitrario, $1 \leq j \leq t$ y sea $x \in \sum_{i=1}^{t} I_i$. Como

$$\sum_{i=1}^{t} I_i = \left[\sum_{i=1}^{t} m_i\right] = \left\{\sum_{i=1}^{t} m_i\right\} + S$$

existe $s \in S$ tal que $x = \sum_{i=1}^{t} m_i + s$, asi

$$x = m_j + \left(\sum_{i=1, i\neq j}^{t} m_i\right) + s \in I_j + S \subset I_j$$

donde la última inclusión se da por ser I_j un ideal de S. ∎

Corolario 2.2 Sean $m_1, ..., m_t$ elementos no nulos en un semigrupo numérico S, sean $I_i = [m_i]$, $1 \leq i \leq t$ los ideales principales respectivos. Entonces $\sum_{i=1}^{t} I_i \subset \bigcap_{i=1}^{t} I_i$.

Demostración. Inmediato del Lema 2.1. ■

Proposición 2.3 Sea $S = \langle s_1, s_2, ..., s_p \rangle$ y sea $I_i = [s_i]$, $1 \leq i \leq p$, entonces, $s_p \notin I_i$, para todo $i = 1, , 2, ..., p-1$.

Demostración. Supongamos que $s_p \in I_i$, para algún $i = 1, , 2, ..., p-1$. Ya que $I_i = \{s_i + s : s \in S\}$, entonces $s_p = s_i + s$, para algún $s \in S$. Siendo $S = \langle s_1, s_2, ..., s_p \rangle$, se sigue que existen $\lambda_1, ..., \lambda_i, ..., \lambda_p$ en $\mathbb{N}$ tales que $s = \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_i s_i + \cdots + \lambda_p s_p$, de donde

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + (\lambda_i + 1) s_i + \cdots + (\lambda_p - 1) s_p = 0$$

ya que cada sumando es no negativo y $\{s_1, s_2, ..., s_p\}$ es un conjunto minimal de generadores, obtenemos en particular que $\lambda_i + 1 = 0$, un absurdo. ■

Corolario 2.4 Sea $S = \langle s_1, s_2, ..., s_p \rangle$ y sea $I_i = [s_i]$, $1 \leq i \leq p$, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{p-1} I_i \subset S \setminus \{0, s_p\}$$

Demostración. Sea $x \in \bigcup_{i=1}^{p-1} I_i$, por la Proposición 2.3, es claro que $x \neq s_p$. De otro lado, ya que $x \in I_j$, para algún $j = 1, 2, ..., p-1$, entonces, $x = s_j + s$, para algún $s \in S$, pero siendo $s_j > 0$, pues $\{s_1, s_2, ..., s_p\}$ es un conjunto minimal de generadores, se tiene que $x > 0$. ■

Teorema 2.5 Sea $I_i = [s_i]$, $1 \leq i \leq p$, entonces

$$g(S) + \sum_{i=1}^{p} s_i \in \bigcap_{i=1}^{p} I_i \setminus \sum_{i=1}^{p} I_i$$

donde $g(S)$ es el número de Frobenius de S.

Demostración. Por definición de número de Frobenius tenemos que $g(S) + s \in S$, para todo $s \in S \setminus \{0\}$, en particular

$$g(S) + (s_1 + \cdots + s_{j-1} + s_{j+1} + \cdots + s_p) \in S$$

para todo $j = 1, ..., p$. Asi

$$\begin{aligned} g(S) + \sum_{i=1}^{p} s_i &= s_j + (g(S) + (s_1 + \cdots + s_{j-1} + s_{j+1} + \cdots + s_p)) \\ &\in \{s_j\} + S = I_j \end{aligned}$$

lo que muestra que

$$g(S) + \sum_{i=1}^{p} s_i \in \bigcap_{i=1}^{p} I_i.$$

Supongamos ahora que

$$g(S) + \sum_{i=1}^{p} s_i \in \sum_{i=1}^{p} I_i$$

Ya que

$$\sum_{i=1}^{p} I_i = \left\{ \sum_{i=1}^{p} s_i \right\} + S$$

existe $s \in S$ tal que

$$g(S) + \sum_{i=1}^{p} s_i = \sum_{i=1}^{p} s_i + s$$

de donde $g(S) = s \in S$, un absurdo, por tanto

$$g(S) + \sum_{i=1}^{p} s_i \notin \sum_{i=1}^{p} I_i.$$

■

Para otros resultados sobre ideales en un semigrupo numérico ver [1].

3. Relación entre los Ideales Principales y los Conjuntos Apéry

En esta sección obtendremos algunas relaciones entre los ideales principales $I = [m]$ y los conjuntos Apéry $Ap\,(S,m) = \{s \in S : s - m \notin S\}$ para $m \in S \setminus \{0\}$.

Lema 3.1 Sea $I = [m]$, con $m \in S \setminus \{0\}$. Entonces, $Ap\,(S,m) \subset S \setminus I$.

Demostración. Supongamos que $Ap\,(S,m) \cap I \neq \emptyset$. Sea $x \in [m] \cap Ap\,(S,m)$, entonces, $x = m + s$ para algún $s \in S$, de donde $x - m = s \in S$, pero esto contradice el hecho que $x \in Ap\,(S,m)$. ■

Teorema 3.2 Sea $I = [m]$, entonces, la familia $\{I,\ Ap\,(S,m)\}$ es una partición de S para todo $m \in S \setminus \{0\}$.

Demostración. Sea $x \in S$. Asumamos que $x \notin Ap\,(S,m)$, entonces, por definición, $x - m \in S$, por tanto $x - m = s$ para algún $s \in S$, de donde $x = m + s \in \{m\} + S = [m] = I$. Ya que el contenido recíproco es obvio, tenemos que $S = I \cup Ap\,(S,m)$, donde esta unión es disjunta por el lema anterior. ■

Para un ideal I de S pongamos $H(I) = S \setminus I$, cuyos elementos son llamados las lagunas de I.

Corolario 3.3 Sea $I = [m]$, entonces, $Ap\,(S,m) = H\,(I)$, para todo $m \in S \setminus \{0\}$.

Demostración. Sea $x \notin H\,(I)$, entonces, por definición, $x \in I$, de donde, por Teorema 3.2, $x \notin Ap\,(S,m)$, asi $Ap\,(S,m) \subset H\,(I)$. Para el contenido recíproco, sea $x \notin Ap\,(S,m)$, por Teorema 3.2, $x \in I$, por tanto $x \notin H\,(I)$, así $H\,(I) \subset Ap\,(S,m)$, obteniendo la igualdad buscada. ■

Corolario 3.4 Sean $m_1, ..., m_t$ elementos no nulos en un semigrupo numérico S, sean $I_i = [m_i]$, $1 \leq i \leq t$ los ideales principales respectivos. Entonces

$$S \setminus \sum_{i=1}^{t} I_i = Ap\left(S, \sum_{i=1}^{t} m_i\right)$$

Demostración. Basta tomar $m = \sum_{i=1}^{t} m_i$ en el Corolario 3.3. ■

Proposición 3.5 Sean $m_1, ..., m_t$ elementos no nulos en un semigrupo numérico S, entonces

$$Ap\,(S, m_i) \subset Ap\left(S, \sum_{i=1}^{t} m_i\right)$$

para cada i, $1 \leq i \leq t$.

Demostración. Sea $I_i = [m_i]$, el ideal principal generado por m_i, para cada i, $1 \leq i \leq t$. Por Lema 2.1 tenemos que $\sum\limits_{i=1}^{t} I_i \subset I_j$, para cada $1 \leq j \leq t$. Tomando complemento y por Teorema 3.2 tenemos

$$\begin{aligned} Ap\left(S, m_j\right) &= S\diagdown [m_j] = S\diagdown I_j \subset S\diagdown \sum_{i=1}^{t} I_i \\ &= S\diagdown \left[\sum_{i=1}^{t} m_i\right] = Ap\left(S, \sum_{i=1}^{t} m_i\right). \end{aligned}$$

■

Corolario 3.6 Sean $m_1, ..., m_t$ elementos no nulos en un semigrupo numérico S, sean $I_i = [m_i]$, $1 \leq i \leq t$ los ideales principales respectivos. Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{t} H\left(I_i\right) \subset H\left(\sum_{i=1}^{t} I_i\right)$$

Demostración. Por Teorema 3.2, para cualquier $m \in S\diagdown\{0\}$, se cumple que $Ap(S, m) = S\diagdown I = H(I)$, donde $I = [m]$, en particular

$$H\left(I_i\right) = Ap\left(S, m_i\right)$$

$$H\left(\sum_{i=1}^{t} I_i\right) = Ap\left(S, \sum_{i=1}^{t} m_i\right)$$

de donde, por la Proposición 3.5, $H\left(I_i\right) \subset H\left(\sum\limits_{i=1}^{t} I_i\right)$, para todo $i = 1, 2, ..., t$, por tanto

$$\bigcup_{i=1}^{t} H\left(I_i\right) \subset H\left(\sum_{i=1}^{t} I_i\right).$$

■

Ejemplo 3.7 Consideremos el semigrupo numérico

$$\begin{aligned} S &= \langle 5, 7, 9, 11, 13\rangle \\ &= \{0, 5, 7, 9, \rightarrow\} \end{aligned}$$

donde la flecha $\rightarrow$ indica que todos los enteros de 9 en adelante están en S. El número de Frobenius de S es $g(S) = 8$. Calculamos los ideales principales

$$\begin{aligned} I_1 &= [5] = \{5, 10, 12, 14, \rightarrow\} \\ I_2 &= [7] = \{7, 12, 14, 16, \rightarrow\} \\ I_3 &= [9] = \{9, 14, 16, 18, \rightarrow\} \\ I_4 &= [11] = \{11, 16, 18, 20, \rightarrow\} \\ I_5 &= [13] = \{13, 18, 20, 22, \rightarrow\} \end{aligned}$$

de donde por el Corolario 3.3, los conjuntos Apéry respectivos son:

$$\begin{aligned} Ap(S, 5) &= \{0, 7, 9, 11, 13\} = H(I_1) \\ Ap(S, 7) &= \{0, 5, 9, 10, 11, 13, 15\} = H(I_2) \\ Ap(S, 9) &= \{0, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17\} = H(I_3) \\ Ap(S, 11) &= \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 19\} = H(I_4) \\ Ap(S, 13) &= \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 21\} = H(I_5) \end{aligned}$$

Y de los Corolarios 3.4 y 3.6 respectivamente, obtenemos

$$S \diagdown \sum_{i=1}^{5} I_i = Ap\left(S, \sum_{i=1}^{5} m_i\right) = Ap(S, 45)$$

y

$$\bigcup_{i=1}^{5} H\left(I_i\right) \subset H\left([45]\right).$$

Para más resultados sobre los conjuntos Apéry de un semigrupo numérico ver [3] .

4. Conclusiones

El estudio de los conjuntos Apéry de un semigrupo nummérico S es de gran importancia ya que podemos decir que la mejor manera de describir un semigrupo numérico es por medio de sus conjuntos Apéry, así por ejemplo, para cualquier elemento no mulo $m \in S$, tenemos que el conjunto $A(S, m) \cup \{m\}$ es un conjunto generador de S, además de darnos una fórmula para el número de Frobemius de S, a saber $g(S) = \text{máx}\left(A(S, m)\right) - m$. De otro lado, los ideales de un semigrupo numérico poseen propiedades análogas a las de los ideales en un anillo conmutativo, como, por ejemplo, la propiedad de factorización en irreducibles, ver [1]. Es por eso que el estudio de cómo se relacionan estas dos importantes subestructuras de un semigrupo numérico es de gran interés. En este artículo hemos tabajado con los ideales principales asociados a los generadores de un semigrupo dado y hemos establecido, ver Teorema 3.2 y Corolario 3.3, la estrecha vinculación entre un ideal principal generado por un elemento m y su conjunto Apéry $A(S, m)$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Barucci V. ; *Decompositions of ideals into irreducible ideals in numerical semigroups.* Journal of Commutative Algebra 2, p. 281-294, 2010.

[2] Ramírez Alfonsín, J. L. ; *The diophantine Frobenius problem.* Oxford Univ. Press, New York, 2005.

[3] Rosales J. C., García-Sánchez P.A.; *Numerical Semigroups with Apéry sets of Unique Expression.* Journal of Algebra 226 , p. 479-487, 2000.

[4] Willard S.; *Numerical Semigroups.* Developments in Mathematics, 2009. Vol. 20. Series Editor: Krishnaswami Alladi, University of Florida, U.S.A.