PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVII N°2, pp. 32 -37, Lima - Perú, Octubre 2014

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN LOCAL Y GLOBAL DE LA ECUACIÓN REACCIÓN DIFUSIÓN, CON NO LINEALIDADES CON PARTE PRINCIPAL MONÓTONA

Nancy Moya Lázaro [1]***, Martha O. Gonzales Bohorquez***[2]***,***
Félix Pariona Vilca[3]***, Nelly Pillhuamán Caña*** [4]***,***
Jacinto Mendoza Solís[5]***, Luis Núñez Ramirez***[6]

(Recibido: 28/02/2014 - Aceptado: 07/07/2014)

Resumen: En este artículo probamos la existencia del semigrupo de soluciones para la ecuación reacción difusión en un marco funcional de espacios de Sobolev con peso. La técnica que seguimos, es que, para encontrar soluciones globales, se usan la teoría de operadores maximales monótonos. En un marco funcional de espacios de Sobolev con peso, probaremos la existencia de un operador maximal monótono el cuál permite probar la existencia de una única solución débil. Por tanto para cada condición inicial en los espacios con peso conseguimos una única solución débil satisfaciendo la condición inicial. Probamos que el semigrupo es Lipschitz continuo con respecto a las condiciones iniciales.

Palabras Claves: Operador Maximal Monótono, ecuación reacción difusión, soluciones débiles, conjunto absorbente.

EXISTENCE OF LOCAL AND GLOBAL SOLUTION ASSOCIATED WIHT THE REACTION DIFFUSION EQUATION WITH NO LINEARITIES AND A MAJOR MONOTONOUS PART

Abstract: In this article, we prove the existence of solutions semigroup associated with the reaction diffusion equation within a suitable functional Sobolev space framework with weight. To find global solutions, we use the technique of the theory of monotonous maximal operators.

In a suitable functional Sobolev space framework, we will prove the existence of a maximal monotonous operator wich allows to prove the existence of a unique weak solution. Therefore, for each initial condition in spaces, with weight, you get a single weak solution satisfying the initial condition. We demonstrate that the semigroup is continuous Lipschitz with respect to the initial conditions.

Key words: Monotonous Maximal Operator, diffusion reaction equations, semi-group, weak solutions, absorbent set, Lipschitz semigroup, positively invariable set, global solutions.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: nmoyalp@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:martholinda@gmail.com
[3]UNMSM,Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:fparionav@hotmail.com
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas,e-mail: nellypillhuaman@gmail.com
[5]UNMSM,Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: pedromendozas87@hotmail.com
[6]UNMSM,Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: lnuñezr@unmsm.edu.pe

1. Introducción

El objetivo principal de este artículo es analizar la ecuación reacción-difusión

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + f(u) = g \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

en el espacio $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$, con $\rho\,(x) = (1+|x|^2)^{-\gamma}, \gamma \in R$. Con no linealidades del tipo $f\,(u)$. Con alguna condición de disipatividad y monotonía en la no linealidad, se establece la existencia de soluciones globales. La herramienta fundamental para probar la existencia y unicidad global de soluciones es la teoría de operadores maximales monótonos en espacios de Hilbert, que permiten construir ciertos tipos de soluciones débiles, para mayores detalles ver [2]. De esta forma, se pueden eliminar las condiciones de crecimiento sobre f impuestas en [1]. Para probar la existencia y unicidad de la solución global, procedemos como sigue. Probamos que $A + wI$ es un operador monótono en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$ para algún w positivo suficientemente grande, que permite obtener la existencia y unicidad de la solución global para datos iniciales en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$. Esto, nos permite definir el semigrupo no lineal $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de forma que, para cada $u_0 \in L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$, $S\,(t)\,u_0 = u\,(t, u_0)$, donde $u\,(t, u_0)$ es solución del problema (1). Probamos también la existencia de un conjunto absorbente, acotado, positivamente invariante en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$, mejoramos el resultado anterior probando la existencia de un conjunto acotado absorbente en $H^1_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$.

1.1. Existencia de soluciones globales con no linealidades con parte principal monótona.

A continuación, presentamos la existencia del semigrupo, con el siguiente teorema

Teorema 1.1 *Supongamos que $\gamma \in \mathbb{R}$. Asumimos sobre el término no lineal f que*

$$f \in C^1\left(\mathbb{R}\right), \quad f(0) = 0, \quad f' \geq -L, \quad L \geq 0 \tag{2}$$

$$f(u)u \geq \alpha u^2 - M, \quad \alpha > 0, \quad M \geq 0 \tag{3}$$

$$g \in L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right) \tag{4}$$

Si (2) y (4) se satisfacen, sea el operador sobre $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$, $Au = -\Delta u + f(u)$, con dominio denso en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$, dado por

$$D(A) = \{u \in H^1_\rho\left(\mathbb{R}^N\right), \Delta u \in L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right), f(u) \in L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)\} \tag{5}$$

Entonces existe w tal que $A + wI$ es un operador maximal monótono. Por tanto para cada $u_0 \in L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$ existe una única solución débil $u \in C\left([0, +\infty), L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ de (1) en el sentido de [2] con $u(0) = u_0$. Además el semigrupo definido por $S(t)u_0 = u(t, u_0)$ es Lipschitz continuo con respecto a u_0 en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Demostración. En efecto, para la monotonía obtenemos que si $u, v \in D(A)$ y $w \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Big((A+wI)u - (A+wI)v,\ u-v\Big)_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u-v)|^2 \rho\, dx \\
+ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u-v)(u-v)\nabla\rho\, dx &+ \int_{\mathbb{R}^N} [f(u)-f(v)](u-v)\rho\, dx + w\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|^2 \rho\, dx \\
\geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u-v)|^2 \rho\, dx &+ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u-v)(u-v)\nabla\rho\, dx + (w-L)\int_{\mathbb{R}^N} (u-v)^2 \rho\, dx.
\end{aligned} \tag{6}$$

donde hemos usado (2).

Puesto que el peso satisface la desigualdad Lema 1.2 ver [3], usando la desigualdad de Cauchy - Schwartz y la desigualdad de Young, tenemos que, para todo $\delta > 0$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u-v)(u-v)\nabla\rho \, dx \right| \leq 2|\gamma|\delta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u-v)|^2 \rho \, dx + \frac{2|\gamma|}{4\delta} \int_{\mathbb{R}^N} |u-v|^2 \rho \, dx$$

Sustituyendo en (6) obtenemos

$$\begin{aligned} \Big((A+wI)u-(A+wI)v,\ u-v\Big)_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)} &\geq (1-2|\gamma|\delta) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u-v)|^2 \rho \, dx \\ &+ (w - L - \frac{2|\gamma|}{4\delta}) \int_{\mathbb{R}^N} |u-v|^2 \rho \, dx \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

si δ es pequeño y w es suficientemente grande.
Se sigue entonces de (7) que $Au + wu := -\Delta u + f(u) + wu$ es maximal monótono en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Como $P(u) := wu + g$ es Lipschitz continuo en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$ entonces, por los resultados de [2] para cada $u_0 \in L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$, existe una solución débil del siguiente problema

$$\begin{cases} \partial_t u + \hat{A}u = P(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{8}$$

donde $\hat{A} = A + wI$, la cual lo denotamos por $u(t) = S(t)u_0$ y es tal que $t \mapsto S(t)u_0 \in C([0,\infty),$ $H = L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$. Además probaremos que el semigrupo $S(t)$ es Lipschitz continuo con respecto a la condición inicial en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$ con constante de Lipschitz e^{wt}.
Sea la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t u + Au + wu = P(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{9}$$

Tomamos dos soluciones u y v de (8) entonces $u - v$ es solución débil de

$$\begin{cases} (u-v)_t + \hat{A}(u) - \hat{A}(v) = w(u-v) \\ u(0) = u_0 - v_0. \end{cases} \tag{10}$$

Multiplicamos (10) por $(u-v)\rho$ e integramos en $\mathbb{R}^N$ y llegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u-v)_t (u-v)\rho + \int_{\mathbb{R}^N} (\hat{A}(u) - \hat{A}(v))(u-v)\rho = \int_{\mathbb{R}^N} w|u-v|^2\rho.$$

pero el segundo sumando de la izquierda es mayor o igual que cero, por ser $\hat{A}$ monótono en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$. Por tanto

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u-v|^2 \rho \, dx \leq w \int_{\mathbb{R}^N} |u-v|^2 \rho \, dx$$

de donde obtenemos,

$$\|u(t,u_0) - v(t,v_0)\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)} \leq \|u(0) - v(0)\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)} e^{tw}.$$

Luego $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es Lipschitz continuo en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$ con constante de Lipschitz e^{wt}. ■

Observamos que si $u_0 \in D(A)$ entonces $u(t) = S(t)u_0$ es una solución fuerte de (1) en el sentido de [2].

Mostraremos ahora la existencia de un conjunto absorbente, acotado, positivamente invariante en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Lema 1.2 *Si $\gamma > \frac{N}{2}$ y se verifican las condiciones (2), (3) y (4) entonces existe un conjunto acotado B_0 en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$, positivamente invariante y absorbente, es decir, $S_t(B_0) \subset B_0,\ \ t \geq 0$, es tal que, para cada subconjunto acotado $B \in L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$ existe $t_0(B) > 0$ tal que $S(t)B \subset B_0$, $t \geq t_0(B)$.*

Demostración. Usamos el peso equivalente $\rho_\epsilon(x) = (1 + |\epsilon x|^2)^{-\gamma}$, con $\epsilon > 0$ a elegir. Multiplicamos la ecuación (1) por $\rho_\epsilon u$ e integramos en $\mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_t u \rho_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u u \rho_\epsilon + \int_{\mathbb{R}^N} f(u) u \rho_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} g u \rho_\epsilon \tag{11}$$

Obteniendo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \rho_\epsilon \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u[u \nabla \rho_\epsilon + \rho_\epsilon \nabla u] dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u) u \rho_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} g u \rho_\epsilon \tag{12}$$

Por el Lema 1.2 ver [3], la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualdad de Young, para todo $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} u \nabla u \nabla \rho_\epsilon \, dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| \; |u| (2|\gamma|\epsilon) \rho_\epsilon \, dx = 2|\gamma|\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u||u| \rho_\epsilon \, dx \\
&= 2|\gamma|\epsilon \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \rho_\epsilon \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} u^2 \rho_\epsilon \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2|\gamma|\epsilon\delta \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \rho_\epsilon \, dx + \frac{2|\gamma|\epsilon}{4\delta} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \rho_\epsilon \, dx. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Por (4) obtenemos, para todo $\delta > 0$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} g u \rho_\epsilon \, dx \right| \leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} |g|^2 \rho_\epsilon \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \rho_\epsilon \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \delta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \rho_\epsilon \, dx + \frac{1}{4\delta} \int_{\mathbb{R}^N} |g|^2 \rho_\epsilon \, dx \tag{14}$$

y usando la hipótesis (13), (14), de (12) obtenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \rho_\epsilon \, dx + (1 - \frac{2|\gamma|\epsilon}{4\delta}) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \rho_\epsilon \, dx + (\alpha - 2|\gamma|\epsilon\delta - \delta) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \rho_\epsilon \, dx \\
\leq \int_{\mathbb{R}^N} M \rho_\epsilon + \frac{1}{4\delta} \int_{\mathbb{R}^N} g^2 \rho_\epsilon \, dx. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Observemos que es en este punto en el que necesitamos que $\gamma > \frac{N}{2}$ para que el primer término del segundo miembro de (15) sea finito.

Para δ, ϵ, suficientemente pequeños existen constantes positivas C_0, C_1, C_2, C_3 tal que,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \rho_\epsilon \, dx + C_0 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \rho_\epsilon \, dx + C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \rho_\epsilon \, dx \leq C_2 + C_3 \|g\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)}.$$

De aquí llegamos a que, por el lema de Gronwall

$$\|u(t)\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)} \leq \|u(0)\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)} e^{-C_1 t} + C_1(1 - e^{-C_1 t}).$$

donde $C_1 = C_2 + C_3 \|g\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)}$.
La desigualdad anterior nos permite definir el conjunto

$$B_0 := \{ u \in L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right) : \|u\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)} \leq 2\sqrt{C_2 + C_3 \|g\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)}} \, \}$$

que es absorbente, acotado, pero no positivamente invariante.
Si definimos ahora $\hat{B}_0 := \cup_{t \geq 0} S(t) B_0$ este es ahora absorbente, acotado, positivamente invariante en $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$, con lo cual terminamos la prueba. ■

Seguidamente probaremos la existencia de un conjunto acotado absorbente en $H^1_\rho\left(\mathbb{R}^N\right)$ probando el siguiente lema

Lema 1.3 *Existe un conjunto acotado B_1 en $H^1_\rho(\mathbb{R}^N)$ tal que $S(t)\hat{B}_0 \subset B_1$, para $t \geq 1$.*

Demostración. De manera similar al proceso anterior, conseguimos que,

$$\|\nabla u\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)} \leq K, \text{ para todo t} \geq 1,$$

lo que nos induce a definir el siguiente conjunto,

$$B_1 := \{u \in H^1_\rho\left(\mathbb{R}^N\right) : \|\nabla u\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)} \leq K\}.$$

Así para $u_0 \in \hat{B}_0$ tenemos $u(t) \in B_1$ para $t \geq 1$, es decir: $S(t)\hat{B}_0 \subset B_1$, para $t \geq 1$. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] A.V. Babin, M.I.Vishik,(1990). *Atractors Of Partial Differential Evolution Equations in Unbounded Domain.* Proc. Royal . Society . Edinburgh , 116A, 221-243.

[2] H. Brezis, (1973). *Operateurs Maximaux Monotones, et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North-Holland. American Elsevier.

[3] N. Moya, (2004). *Comportamiento asintótico de soluciones de ecuaciones de evolución* . Appied Mathematical Sciences 1.

[4] D. Henry, (1981). *Geometric theory of semilinear parabolic equations, volume 840 of Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin.