PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVIII N°1, pp. 5-15, Lima - Perú, Abril 2015

LA BUENA DEFINICIÓN DE LA TRAYECTORIA CENTRAL

Edinson Raúl Montoro Alegre [1]***, Willy Barahona Martínez***[2]***,***
Rocío De La Cruz Marcacuzco [3]***, Luis Macha Collotupa***[4]***,***
Elias Armas García[5]***, Emilio Castillo Jiménez*** [6]***,***
Pedro Becerra Pérez[7]

(Recibido: 12/06/2014 - Aceptado: 25/05/2015)

Resumen: En este trabajo presentamos una manera distinta de probar la buena definición de la Trayectoria Central. Concepto derivado de la teoría de los métodos de punto interior. Para tal fin vamos a utilizar el concepto (muy poco utilizado) de Cono de Recesión.
Palabras Claves: Métodos de Punto Interior, Trayectoria Central, Cono de Recesión.

DEFINITION OF GOOD PATH CENTRAL

Abstract: In this paper we present a different way of testing the good definition of the Central Path. Concept derived from the theory of interior point methods. To this end we will use the concept (rarely used) Cone of Recession.
Key Words: Interior Point Methods,The Central Path, Cone Recession.

1. Definiciones Previas

1.1. Funciones Convexas con Valores en $\overline{\mathbb{R}}$

Vamos a considerar funciones más generales que las habituales es decir con valores en $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Como los cálculos envuelven el $+\infty$ y $-\infty$, adoptamos la regla: $x + \infty = +\infty$; si $x \in \mathbb{R}$, $(x).(-\infty) = -\infty$; si $x > 0$ y la regla menos obvia $(0).(+\infty) = (+\infty).(0) = (0).(-\infty) = (-\infty).(0) = 0$, asi mismo la expresión $(+\infty - \infty)$ es indefinida. La siguiente definición generaliza el concepto de *función convexa.*

Definición: Una función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es llamada función convexa si $\forall x, y, \lambda, u, v \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < u, f(y) < v, 0 < \lambda < 1$ se cumple

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda u + (1-\lambda)v \quad ...(1)$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa, y sea $f(x) < u, f(y) < v, 0 < \lambda < 1$ entonces

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) < \lambda u + (1-\lambda)v$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: edinsonmontoro@yahoo.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: wilbara_73@yahoo.es
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: rodema_71@yahoo.es
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: lmachac@hotmail.com
[5]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: earmasg@unmsm.edu.pe
[6]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: ecastilloj@unmsm.edu.pe
[7]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: p_ becerra_ p@hotmail.com

es convexa según la nueva definición generalizada.
Recíprocamente, supóngase que si f es función convexa según (1), entonces para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene $f(x) < f(x) + \epsilon, f(y) < f(y) + \epsilon$ y por (1)

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda(f(x)+\epsilon) + (1-\lambda)(f(y)+\epsilon) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \epsilon$$

de donde concluimos que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \epsilon$$

por lo tanto f es convexa según la definición clásica.

Definición:

- El dominio efectivo de una función convexa $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, denotado por $dom(f)$ es el conjunto

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < +\infty\}$$

- Una función convexa propia sobre $\mathbb{R}$ es una función convexa de $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la cual no es identicamente $+\infty$.

- Una función convexa impropia sobre $\mathbb{R}$ es una función convexa sobre $\mathbb{R}$ que no es propia.

1. Es facil verificar que el dominio efectivo de una función convexa $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexa(y así un intervalo).

2. Una función convexa propia $F : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ con dominio efectivo I puede ser considerada como una función obtenida al *extender* una función f convexa finita, con dominio I a todo $\mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in I \\ +\infty & si \quad x \notin I. \end{cases}$$

Este proceso de extensión, nos permite tratar funciones convexas finitascon diferentes dominios como funciones convexas con valores en $\overline{\mathbb{R}}$ y definidas en todo $\mathbb{R}$. La clase de funciones convexas impropias es fácil de describir.

Teorema A: Sea $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa impropia. Entonces $f(x) = -\infty$ siempre $x \in Int(dom(f))$

Demostración: El teorema es válido si $f(x) \equiv +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Si $f(x) \not\equiv +\infty$ entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = -\infty$. Sea $x \in Int(dom(f)), x \neq a$, entonces existe $y \in dom(f), \lambda \in]0;1[$ tal que $x = \lambda a + (1-\lambda)\alpha$. Luego, para cada α tal que $f(y) < y < +\infty$ y $\beta \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(\lambda a + (1-\lambda)\alpha) < \lambda\beta + (1-\lambda)\alpha$$

como $f(a) = -\infty < \beta$ y haciendo $\beta \to -\beta$ se tiene $f(x) = -\infty$.

Definición: (Semi - continua Inferiormente). Considere X un espacio topológico y sea f una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $a \in X$ entonces f es llamada semi-continua inferiormente en a si para cada $k \in \mathbb{R}$ con $k < f(a)$ existe una vecindad U de a tal que $f(U) > k$.
f es llamada semi-continua inferiormente si f es semi-continua inferiormente en todo punto de X.

Observaciones:

1. Una función continua es semi-continua inferiormente.
2. Si $a \in X$ es un punto de acumulación de X y $f(a) = +\infty$; si f es semi-continua inferiormente en a, entonces
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$
3. Si $f(a) = -\infty$, entonces f es semi-continua inferiormente en a.

Definición: (Epígrafo) Sea X un conjunto y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. El epígrafo $epi(f)$ de f es el conjunto
$$\{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$$

Observación: La cerradura $\overline{epi(f)}$ del epígrafo de una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es también un epígrafo.

Definición: Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. La Cápsula semi-continua inferiormente $\overline{f}$ de f es la función $\overline{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ cuyo epígrafo es $\overline{epi(f)}$.

Teorema B: Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. f es semi-continua inferiormente.
2. $\{x \in X : f(x) > \lambda\}$ es abierto para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ es cerrado para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $epi(f)$ es cerrado (como subconjunto de $X \times \mathbb{R}$).

Demostración: VER [6].

Definiciones:

1. El dominio efectivo de una función convexa $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ denotada por $dom(f)$, es el conjunto $\{x \in V : f(x) < +\infty\}$.
2. Una función convexa propia sobre V es una función convexa $f : V \to \overline{\mathbb{R}} \cup \{+\infty\}$.
3. Una función convexa impropia sobre V es una función convexa $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ la cual no es propia.

Teorema C: Sea E un espacio topológico lineal sobre $\mathbb{R}$ provisto de un a topología de Hausdorff. Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa impropia, entonces:

a) $f(x) = -\infty$ siempre que $x \in I_r(dom(f))$ (interior relativo).

b) Si f es semi-continua inferiormente, entonces el $dom(f)$ es cerrado y $f\,|_{dom(f)} = -\infty$.

Demostración: VER [6].

Definición: Sea E un espacio topológico lineal sobre $\mathbb{R}$ provisto de un a topología de Hausdorff. Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función entonces:

a) La cerradura $cl(f)$ de f es definida como la cápsula semi-continua inferiormente $\overline{f}$ de f sí $\overline{f}$ en ningún punto es definido el valor $-\infty$, o en otro caso si éste es definido como $f = -\infty$.

b) f es llamado a ser cerrado si $cl(f) = f$.

2. Cono de Recesión

Consideremos el siguiente problema lineal restringido convexo:

$$(P):\begin{cases} minf(x) \\ s.a. \quad Ax=b \\ x\geq 0. \end{cases}$$

donde

$$f:\quad \mathbb{R}^n \quad\longrightarrow\quad \mathbb{R}: f(x)\cup\{+\infty\}$$

es una función convexa propia cerrada, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, con $m\leq n$ y $b\in\mathbb{R}^m$. El dominio efectivo de f será denotado por $ed(f)$, es decir

$$ed(f)=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)<+\infty\}$$

Para formalizar las condiciones bajo las cuales el punto central $(x(\mu),y(\mu),z(\mu))$ exista debemos asumir las siguientes hipótesis:

- (A1) $ed(f)$ es un conjunto abierto;
- (A2) f es diferenciable en $ed(f)$;
- (A3) A es una matriz de rango completo, es decir, $ran(A)=m\leq n$;
- (A4) Existe un punto interior viable.

Note que, como f es una función convexa propia cerrada, y dada las consideraciones se sigue que f diverge a $+\infty$ en la frontera de $ed(f)$ y también (f) es continua y diferenciable en $ed(f)$.
El problema dual de Wolfe para (P) es

$$(D):\begin{cases} maxf(x)-y^t(Ax-b)-z^tx, \\ s.a. \quad A^ty+z=\nabla f(x) \\ z\geq 0. \end{cases}$$

Un punto viable (x,y,z) de D, con $z>0$, es llamado una **solución interior dual viable**.
El método de función barrera logarítmica aplicado a (P) genera una familia de problemas

$$(P_\mu):\begin{cases} minf(x)-\mu\sum_{j=1}^{n} logx_j, \\ s.a. \quad Ax=b \\ x>0. \end{cases}$$

donde $\mu>0$ es un parámetro de penalidad.
Observe que la función objetivo en (P_μ) es una función estrictamente convexa, y asi el problema (P_μ) tiene no más que un minimizador global, el cual es caracterizado por las siguientes condiciones Karush-Kuhn-Tucker:

$$Ax-b=0, x>0. \tag{1}$$

$$A^ty+z-\nabla f(x)=0, z>0 \tag{2}$$

$$Zx-\mu e=0, \tag{3}$$

Donde Z es la matriz diagonal con componentes del vector z en la diagonal principal y e es el n-vector de puros unos.
La solución de (1), (2) y (3) es llamado el punto central correspondiente a $\mu>0$; esto es denotado por $(x(\mu),y(\mu),z(\mu))$. Para cada $\mu>0$, la buena definición de punto central depende

de la existencia y unicidad de la solución del (1), (2) y (3) anterior. La trayectoria central asociada con el problema (P) es dado por

$$\{(x(\mu), y(\mu), z(\mu))/\mu > 0\}$$

Observe que la trayectoria central es un punto interior primal-dual viable. Para estudiar la buena definición de la trayectoria central, definiremos la función Φ_μ por

$$\Phi_\mu(x) = \begin{cases} f(x) - \mu \sum_{j=1}^{n} log x_j, & si \quad Ax = b, x > 0, x \in ed(f); \\ +\infty; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

y la función $\tilde{f}$ por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si \quad Ax = b, x > 0, x \in ed(f); \\ +\infty; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil de ver que Φ_μ y $\tilde{f}$ son ambas funciones convexas cerradas propias y que Φ_μ es estrictamente convexa en su dominio efectivo. Definimos los conjuntos de nivel $\Gamma(\alpha,\mu)$ y $\Gamma_\alpha$que serán llamados Φ_μ - conjunto de nivel y $\tilde{f}$ - conjunto nivel correspondiente para $\alpha \in \mathbb{R}$; y definidos como:

$$\Gamma(\alpha,\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n / \Phi_\mu \leq \alpha\}$$

$$\Gamma_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n / \tilde{f} \leq \alpha\}$$

Ambos $\Gamma(\alpha,\mu)$ y $\tilde{f}$ son subconjuntos (convexos) cerrados de $\mathbb{R}^n$, ya que Φ_μ y $\tilde{f}$ son funciones cerradas (convexas).

Definición: El cono de recesión de un conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ es dado por

$$O^+C = \{v \in \mathbb{R}^n / c + tv \subseteq C, \quad \forall c \in C, \forall t \geq 0\}$$

Recordemos también algunos buenos resultados de análisis convexo los cuales serán de posterior utilidad.

Lema 1: Un conjunto convexo cerrado y no vacío C en $\mathbb{R}^n$ es limitado si y sólo sí su cono de recesión O^+C consiste del único vector nulo.

Demostración: Por ser C limitado

$$\exists k > 0 / \|c\| \leq k, \quad \forall c \in C. \tag{4}$$

Por definición de cono de recesión de C dado $z \in O^+C$

$$c + tz \in C, \quad \forall t \geq 0, \quad c \in C. \tag{5}$$

De (4) y (5) tenemos

$$\|c + tz\| \leq k; \quad \forall t \geq 0$$

$$\|\frac{c}{t} + z\| \leq \frac{k}{t} \Leftrightarrow |\frac{c_i}{t} + z_i| \leq \frac{k}{t}; \forall i = 1, 2, ..., n. \tag{6}$$

Ahora cuando $t \to +\infty$ en (6) tenemos que

$$|z_i| = 0$$

Por lo que

$$z = \theta$$

Ahora supongamos que C es ilimitado, probaremos que existe un $z \neq \theta$ tal que

$$c + tz \in C, \forall c \in C, \quad \forall t \geq 0$$

Como C es ilimitado, existe una $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en C tal que

$$\|c_n\| > n + \|c\|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

y por propiedad se cumple $\|c_n\| - \|c\| \leq \|c_n - c\|$

$$\|c_n\| \leq \|c_n - c\| + \|c\| \tag{8}$$

de (7) y (8)

$$\|c_n - c\| > n; \forall n \in \mathbb{N}$$

definimos la siguiente sucesión

$$z = \frac{c_n - c}{\|c_n - c\|}$$

entonces $\|z_n\| = 1$, así $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es limitada. Por el Teorema de Weierstras $\exists\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión que es convergente, esto es $\exists z \in C$ tal que

$$lim z_{n_k} = z$$

y por la continuidad de $\|.\|$; tenemos $\|z\| = 1 > 0$ o sea $\|z\| > 0 \Rightarrow z \neq \theta$.

Afirmamos que $z \in O^+C$

Por ser C convexo y c, c_{n_k} elementos de C, entonces

$$(1-\lambda)c + \lambda . z_{n_k} \in C, \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

esto equivale a

$$c + \lambda.(c_{n_k} - c) \in C, \quad \forall \lambda \in (0,1)$$
$$c + \lambda.\|c_{n_k} - c\|.z_{n_k}, \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

$$c + \frac{\lambda}{t}.\|c_{n_k} - c\|.tz_{n_k}, \quad \forall \lambda \in (0,1); t > 0 \tag{9}$$

definamos

$$\lambda_{n_k} = \frac{t}{\|c_{n_k} - c\|}; \quad \lambda_{n_k} > 0.$$

y vemos que

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_{n_k} = 0$$

y por definición de limite tenemos

dado $\epsilon = 1$; $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}/k > n_0 \Rightarrow |\lambda_{n_k}| < 1$ es decir

$$0 < \lambda_{n_k} < 1, \quad k > n_0. \tag{10}$$

De (9) y (10) tenemos, particularizando $\lambda = \lambda_{n_k}$

$$c + \frac{\lambda_{n_k}}{t}\|c_{n_k} - c\|(t.z_{n_k}) \in C; \quad \lambda_{n_k} \in (0,1); \quad k > n_0$$
$$c + t.z_{n_k} \in C; \quad k > n_0$$

ahora tomando limite (cuando $k \to +\infty$)

$$c + tz \in C; \quad \forall t > 0$$

pero

$$O^+C = \{0\}$$

así que

$$z \in O^+C, \quad z \neq \theta$$

es una contradicción. Por lo tanto

$$O^+C \neq \{0\}$$

Lema 2: Los conjuntos de nivel no vacíos de una función convexa propia cerrada son todas limitadas o ilimitadas.

Demostración: Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa cerrada propia y

$$\Gamma(g, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq \alpha\}$$

su conjunto nivel cerrado con respecto a α.

i) Supongamos que el conjunto nivel $\Gamma(g, \beta)$ es ilimitado. Asi que, por el lema anterior, su cono de recesión $O^+\Gamma(g, \beta)$tiene un punto no nulo z, esto es:

$$y + tz \in \Gamma(g, \beta), \forall y \in \Gamma(g, \beta); \quad \forall t \geq 0$$

- Si $\beta \leq \alpha$, entonces $\Gamma(g, \beta) \subseteq \Gamma(g, \alpha)$ por lo que $\Gamma(g, \alpha)$ es ilimitado.
- Si $\beta > \alpha$, entonces $\Gamma(g, \alpha) \subset \Gamma(g, \beta)$, probaremos que $\Gamma(g, \alpha)$ es ilimitado.

En efecto: Sea $x \in \Gamma(g, \alpha)$ y $z \in O^+\Gamma(g, \beta)$. Por otro lado $x + tz \in \Gamma(g, \beta)$, $\forall t \geq 0$. Además, sean $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda + r = 1$

$$g(x + tz) = g(1.x + tz) = g((\lambda + r)x + tz) = g(\lambda x + rx + tz) = g(\lambda x + r(x + \frac{t}{r}z)); r > 0$$

por ser g convexa

$$g(x + tz) \leq \lambda g(x) + rg(x + \frac{t}{r}z))$$

Es fácil notar que si $x \in \Gamma(g, \alpha)$ y $(x + \frac{t}{r}z) \in \Gamma(g, \beta)$, luego

$$g(x + tz) \leq \lambda\alpha + r\beta$$

Si hacemos $r \to \theta$ tenemos

$$g(x + tz) \leq \lambda\alpha$$

Como: $1 > \lambda > 0$

$$g(x + tz) < \alpha$$

Por lo que $x + tz \in \Gamma(g, \alpha)$ y $z \neq \theta$ entonces

$$z \in O^+\Gamma(g, \alpha), \quad z \neq \theta$$

y por el lema anterior $\Gamma(g, \alpha)$ es ilimitado. Así que todos los conjuntos de nivel son ilimitados.

ii) Supongamos que $\Gamma(g, \beta)$ es limitado y por el lema 1.

$$O^+\Gamma(g, \beta) = \theta$$

- Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\Gamma(g, \alpha) \subseteq \Gamma(g, \beta)$ y como $\Gamma(g, \beta)$ es limitado entonces $\Gamma(g, \alpha)$ es limitado.

- Si $\beta < \alpha$, entonces $\Gamma(g, \beta) \subset \Gamma(g, \alpha)$ afirmamos que $\Gamma(g, \alpha)$ es limitado.

Si suponemos que $\Gamma(g, \alpha)$ es ilimitado y usando los mismos argumentos dados en (b) tendríamos que $\Gamma(g, \beta)$ es ilimitado y esto es una contradicción. Por lo que $\Gamma(g, \alpha)$ es limitado. Asi que todos los conjuntos de nivel son limitados.

Corolario 1: Una función convexa propia cerrada tiene conjuntos de nivel limitados no vacíos si y sólo sí el conjunto de sus minimizadores (no restringidos) es no vacío y limitado.

Demostración: Sea f la función convexa, propia cerrada y definamos $\alpha = f(x^*)$, donde x^* es el mínimo de f.
Definamos el siguiente conjunto:

$$\Gamma^* = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq \alpha\}$$

Este conjunto es el conjunto de minimizadores de f y al mismo tiempo es un conjunto de nivel para f. Luego le aplicamos el lema 2. Si Γ^* es un conjunto no vacío y limitado entonces, cualquier conjunto de nivel Γ_β para f será no vacío y limitado también.
Por hipótesis Γ^* es no vacío y limitado entonces Γ_β es no vacío y limitado. El recíproco también es válido por el Lema 2.

3. Resultado Principal

Ahora probaremos el siguiente teorema el cual brinda las condiciones necesarias y suficientes para la buena definición de la trayectoria central asociada con el problema (P).

Teorema 1: Las siguientes condiciones son equivalentes:
(C1) El conjunto solución del problema (P), $sol(P)$, es no vacío y limitado.
(C2) La trayectoria central $\{(x(\mu), y(\mu), z(\mu)) : \mu > 0\}$ esta bien definida.
(C3) Para algún $\mu_0 > 0$, el punto central $\{(x(\mu_0), y(\mu_0), z(\mu_0)) : \mu_0 > 0\}$ esta bien definida.
(C4) Existe un punto interior dual viable $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$; $A^t\overline{y} + \overline{z} = \nabla f(\overline{x})$ y $\overline{z} > 0$.

Demostración:

$C1 \Longrightarrow C2$
Supongamos que la condición $C1$ es válida. Consideremos $\mu > 0$ y por $C4$ $\exists \widetilde{x}$ tal que

$$A\widetilde{x} = b; \quad \widetilde{x} > 0; f(\widetilde{x}) < +\infty.$$

Definimos $\widetilde{\alpha} = \Phi_\mu(\tilde{x})$ y debemos probar que:

$$O^+\Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu) = \{0\}.$$

En efecto, sea $v \in \mathbb{R}^n$ un elemento de $O^+\Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu)$. Luego para todo $x \in \Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu)$ y $t \geq 0$, se tiene

$$\Phi_\mu(x + tv) \leq \widetilde{\alpha} < +\infty$$

Por la definición de Φ_μ se tiene

$$A(x + tv) = b, \tag{11}$$
$$x + tv > 0 \tag{12}$$

y

$$\widetilde{\alpha} \geq \Phi_\mu(x + tv) = f(x + tv) - \mu \sum_{j=1}^{n} log(x_j + tv_j)$$

$$\widetilde{\alpha} \geq f(x) + t\nabla f(x)^t v - \mu \sum_{j=1}^{n} log(x_j + tv_j)$$

donde la segunda desigualdad es debido a que f es convexa.
Debemos afirmar que

$$\nabla f(x)^t v \leq 0; \quad \forall x \in \Gamma(\alpha, \mu)$$

por que $v_j \geq 0$ es válida por la viabilidad de $x + tv$, obtenida de $(11) - (12)$ y por el hecho de que el logaritmo crece más lentamente que una función lineal de t.
En efecto si suponemos $\nabla f(x).v \geq 0$ y sabiendo que $t \geq 0$ y $v_j \geq 0$ y el logaritmo crece mas lentamente que la función lineal en t, para algún t_0 lo suficientemente grande se tendrá

$$t_0 \nabla f^t(x).v - \mu \sum_{j=1}^{n} log(x_j + t_0 v_j) \geq 0$$

Luego

$$\Phi_\mu(x + t_0 v) \geq f(x) + t_0 \nabla f^t(x).v - \mu \sum_{j=1}^{n} log(x_j + t_0 v_j) \geq f(x) \qquad (*)$$

Pero

$$f(x + t_0 v) \geq f(x + t_0 v) - \mu \sum_{j=1}^{n} log(x_j + t_0 v_j) = \Phi_\mu(x) t_0 v \qquad (**)$$

De (*) y (**)

$$f(x + t_0 v) \geq f(x)$$

Considerando $x = x_k$ y $x + t_0 v = x_{k+1}$ se obtendría

$$f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$$

Lo cual contradice el hecho de ser $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} log(x_j)$ una función barrera $(ver[1])$.

$$\therefore \nabla f^t(x).v \leq 0$$

Por otro lado de la definición de $\Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu)$ es fácil notar que $\widetilde{x} \in \Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu)$, entonces

$$\widetilde{x} + tv \in \Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu), \quad \forall t \geq 0$$

luego, tenemos

$$\nabla f(\widetilde{x} + tv)^t v \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

Entonces $f(\widetilde{x} + tv)$ es una función no creciente de $t \geq 0$, asi que

$$f(\widetilde{x} + tv) \leq f(\widetilde{x}), \quad \forall t \geq 0 \tag{13}$$

Así mismo como $\widetilde{x} \in \Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu)$, y usando (11) y (12) con $x = \widetilde{x}$, se deduce que $\widetilde{x} + tv$ es viable para todo $t \geq 0$. Luego, $\Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu) = \{\widetilde{x} + tv : t \geq 0\}$ y de (13), se concluye que,

$$\Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu) = \{\widetilde{x} + tv : t \geq 0\} \subseteq \{\widetilde{x} + tv : f(\widetilde{x} + tv) \leq f(\widetilde{x})\} = \Gamma_{\widetilde{\beta}}$$

donde $\widetilde{\beta} = f(\widetilde{x})$ Luego por la condición $C1$ y el corolario1 implica que el conjunto no vacío $\Gamma_{\widetilde{\beta}}$ es limitado. Luego $\Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu)$ es también limitado y por el corolario 1 implica que el conjunto

$$O^+ \Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu) = \{0\}$$

En vista del lema 2, se sigue que $\Gamma(\widetilde{\alpha}, \mu)$ es conjunto limitado (no vacio).
Concluimos que Φ_μ alcanza su mínimo $x(\mu)$, el cual es único debido a la convexidad estricta en su dominio efectivo. Note que, por la consideración $C3$, la matriz AA^tes no singular, entonces, tomando

$$z(\mu) = \mu X^{-1}(\mu) e$$

Entonces

$$y(\mu) = (AA^t)^{-1} A(\nabla f(x(\mu)) - z(\mu))$$

Vemos que $(x(\mu), y(\mu), z(\mu))$ es la solución única del sistema $(1), (2)$ y (3), así, la condición $C2$ es probada.

$C2 \Longrightarrow C3$
La condición $C2$ implica $C3$. Es obvio $C2$.

$C3 \Longrightarrow C4$
Si tomamos la condición $C3$, entonces $(x(\mu_0), y(\mu_0), z(\mu_0))$ satisface el sistema (1), (2) y (3) para $\mu = \mu_0$. Así, la condición $C4$ es verdadera con $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = x(\mu_0), y(\mu_0), z(\mu_0))$.

$C4 \Longrightarrow C1$
Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$Ax - b = 0, \quad x \geq 0 \tag{14}$$

luego, usando la convexidad de f, (14) y la condición $C4$, obtenemos

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) = f(\bar{x}) + (A^t\bar{y} + \bar{z})^t(x - \bar{x})$$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) - (A^t\bar{y} + \bar{z})^t.\bar{x} + b^t\bar{y} + \bar{z}^t x \tag{15}$$

$$A\bar{x} = b$$

$$A^t\bar{y} + \bar{z} = \nabla f(\bar{x}); \quad \bar{x} > 0$$

De la condición $C4$, vemos que existe un $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que

$$z_i \geq \sigma > 0; \quad \forall i = 1, 2, ..., n \tag{16}$$

Combinando (15) y (16), obtenemos: como $\bar{z} > 0$ y $x \geq 0$, entonces

$$x \geq \sum_{i=1}^{n} \sigma x_i = \sigma(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sigma\|x\|_1 \geq 0$$

$$f(x) \geq K + \sigma\|x\|_1 \tag{17}$$

donde

$$K = f(\bar{x}) - (A^t\bar{y} + \bar{z})^t\bar{x} + b^t\bar{y}; \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) - (A^t\bar{y} + \bar{z})^t\bar{x} + b^t\bar{y} + \bar{z}^t x$$

$$f(x) \geq \underbrace{f(\bar{x}) - (A^t\bar{y} + \bar{z})^t\bar{x} + b^t\bar{y}}_{K} + \|x\|_1$$

$\therefore \quad f(x) \geq K + \sigma\|x\|_1 \geq K$ haciendo $\bar{f}(x) = f(x)$

$$\Gamma(\bar{f}, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n / \bar{f}(x) \leq \alpha\}$$

Si suponemos que $\Gamma(\bar{f}, \alpha)$ es limitado y no vacío entonces todos los conjuntos de nivel de $\bar{f}$ son limitados y no vacíos, ya que $\bar{f}$ es convexa, propia y cerrada, y aplicando el corolario1 se concluye que el conjunto de minimizadores $sol(P)$ es no vacío y limitado.

□

4. Conclusión

En este artículo presentamos una nueva forma de probar la buena definición de la Trayectoria Central a partir del concepto de Cono de Recesión. De esta manera se muestra que se pueden llegar a los mismos resultados que la teoría clásica de los métodos de Punto Interior siguiendo otros caminos. Así mismo esperamos que sea de gran interés y motivación para seguir nuevos linderos en esta área de investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] M. Bazarda, H. Sherali, AND C. Shetty.; Nonlinear Programming, Theory and Aplications, John Wiley & Sons, New York, second ed. 1993.

[2] D. P. Bertsekas., Nonlinear Programming, Athena Scientific, Belmont Mass, 1995.

[3] R. Bulirsch AND J. Stoer., Introduction to Numerical Analysis; Springer- Verlag. New York, 1980.

[4] A. Forsgren AND P.E. Gill.,Primal-dual interior Methods for nonconvex nonlinear Programming, SIAM ,*Journal on Optimization,*8,(1998) pp.1132-1152.

[5] R. T. Rockafellar., The multiplicar method of Hertenes and Poud Applied to Convex Programming*Journal of Optimization theory and Applications,*12,(1973) pp.555-562.

[6] Jan,Van Tiel.; Convex Analysis, John Wiley and Sons,. Northem Ireland at the Universities Press, 1984.