PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVIII N°1, pp. 21-28, Lima - Perú, Abril 2015

CARACTERIZACIÓN DE UN C^*-ALGEBRA

***Wilfredo Mendoza*[1], *Zofia Duran*[2], *Marco Rubio*[3]**

(Recibido: 24/03/2015 - Aceptado: 14/05/2015)

Resumen: En el presente trabajo optamos por dar una una caracterización de un C^*-álgebra A arbitraria. Para esto consideramos la construcción de una representación de un C^*-álgebra A de un estado sobre el mismo A. El concepto de estado asi como la noción de positividad juegan un rol fundamental en el desarrollo y obtención de tal resultado.

Palabras clave: C^*-álgebras, estado, representación de un estado, $*$-isomorfismo, C^*-álgebra de operadores.

CHARACTERIZATION OF AN C^*-ALGEBRA

Abstract: In this paper we chose to give a characterization of a C^*-algebra A arbitrary. For this we consider the construction of a representation of a C^*-algebra A of a state on the same A. The concept of state as well as the notion of positivity play a key role in developing and obtaining such a result.

Keywords: C^*-algebras, state, representing a state, $*$-isomorphism, C^*-algebra operators.

1. Introducción

Las C^*-álgebras fueron introducidas por Segal en 1947, convirtiéndose en herramientas importantes para las matemáticas. Alain Connes alrededor de 1980 crea la llamada geometrís no conmutativa en un esfuerzo de relacionar la teoría de álgebras de operadores en espacios de Hilbert, a la geometría diferencial y a la toplología algebraica. El paso siguiente utilizando la geometría no conmutativa era obtener una caracterización abstracta de estas álgebras que son isomórficas a $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C}; f \text{ es continua}\}$ para algún espacio de Hausdorff compacto X, problema que fue resuelto por Gelfand y Naimark quienes notaron que el espacio $C(X)$ tenía la siguiente estructura adicional, primero que este espacio tiene una norma dada por $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$ con lo cual es un espacio de Banach. Esta estructura de espacio de Banach de $C(X)$ es compatible con su estructura como álgebra conmutativa mediante la propiedad $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

En segundo lugar $C(X)$ tiene una involución $f \mapsto f^*$, dada por $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Esta involución es relacionada a la norma, así como a la estructura algebraica por la propiedad $\|f^*f\| = \|f\|^2$; recopilando estas propiedades se tiene que $C(X)$ es un C^*-álgebra conmutativa con unidad. Un siguiente paso mediante la geometría no conmutativa es intentar extender resultados de las C^*-álgebras conmutativas a C^*-álgebras no conmutativas; resultados que se dieron sobre todo en la caracterización de C^*-álgebras.

Una caracterización de las C^*-álgebras es dada por Gelfand y Naimark mediante su teorema: Cada C^*-álgebra A conmutativa es isomórfica a $C_0(X) = \{f \in C(X); f \text{ se anula en el infinito}\}$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: wmendozaq@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: zduranq@unmsm.edu.pe
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: mrubiog@unmsm.edu.pe

para algún espacio de Hausdorff localmente compacto X. Este teorema a su vez fue establecido mediante la denominada construcción de GNS (Gelfand, Naimark y Segal) para C^*-álgebras no conmutativas.

Usando representaciones para C^*-álgebras, planteamos en este trabajo una caracterización para cualquier C^*-álgebra A, la cual consiste en que: Un C^*-álgebra A es isomorficamente $*$-isomorfo a un álgebra C^* de operadores sobre un espacio de Hilbert.

2. Preliminares

Definición 2.1 *Un álgebra de Banach es un espacio de Banach complejo A junto con una multiplicación asociativa y distributiva tal que*

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \text{ y } \|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

para todo $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$. Esta multiplicación es continua.
El álgebra A es llamada conmutativa (o abeliana) si $ab = ba$ para todo a, b en A;
A es llamada unital si ella posee unidad.

Ejemplo 2.2 *Sea E un espacio de Banach complejo y*

$$B(E) = \{f : E \to E; f \text{ es un operador lineal acotado}\}$$

entonces $B(E)$ es un álgebra de Banach unital con la estructura lineal usual y el operador norma.

Definición 2.3 *Un álgebra * de Banach es un álgebra de Banach A junto con una* ***involución*** *$a \longmapsto a*$ satisfaciendo*

i) *** es conjugada lineal, esto es $(\alpha a)^* = \overline{\alpha} a^*$ para $\alpha \in \mathbb{C}, a \in A$.*

ii) *$a^{**} = a$, para cada $a \in A$.*

iii) *$(ab)^* = b^* a^*$, para cualesquiera $a, b \in A$.*

iv) *$\|a^*\| = \|a\|$, para cada $a \in A$.*

Definición 2.4 *Una C^*-álgebra es un álgebra * de Banach tal que verifica $\|a^* a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in A$.*

Ejemplo 2.5 *El espacio $B(H)$ donde H es un espacio de Hilbert es una C^*-álgebra con la composición como producto y la involución * está dada por el operador adjunto.*

Ejemplo 2.6 *Si K un espacio compacto, entonces*

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{C}; f \text{ es continua}\}$$

*es una C^*-álgebra conmutativa con unidad, provista de la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$ la involución * esta dada como $f^*(t) = \overline{f}(t)$. Es claro ver que*

$$\|f^* f\|_\infty = \|f\|_\infty^2$$

puesto que $f^* f = |f|^2$.

Definición 2.7 (Homomorfismos entre C^*-álgebras) *Sean A, B dos C^*-álgebras con identidad, un homomorfismo $\varphi : A \to B$ es una aplicación lineal satisfaciendo*

1. *$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para todo $a, b \in A$.*

2. $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ *para todo* $a \in A$.

3. $\varphi(1_A) = 1_B$.

*Este homomorfismo es lamado *-homomorfismo.*

Ejemplo 2.8 *Sea* Ω *un espacio de Hausdorff localmente compacto y sea* $C_0(\Omega)$ *el espacio vectorial de las funciones complejas valuadas que se anulan en el infinito, i.e.; para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un subconjunto compacto* $K \subseteq \Omega$ *tal que* $|f(x)| < \varepsilon$ *para todo* $x \in \Omega \setminus K$. *Con la multiplicación puntual y la conjugación compleja como involución,* $C_0(\Omega)$ *es una *-álgebra. Y con la norma* $\|f\| := \sup\limits_{x\in\Omega}\{|f(x)|\}$ *es una* C^**-álgebra conmutativa.*

Definición 2.9 *Sea* A *un* C^**-álgebra.*

i) Por un ideal en A *entenderemos a un ideal bilatero cerrado.*

ii) Si I *es un ideal en un* C^**-álgebra* A *el cociente de* A *por* I *es* $\dfrac{A}{I} = \{a + I; a \in A\}$

Observación 2.10 *Si* A *es un* C^**-álgebra,* $\dfrac{A}{I}$ *es una* C^**-álgebra con la norma cociente*

$$\|a + I\| = \text{ínf}\,\{\|a + x\|; x \in I\}$$

*donde la involución * en* $\dfrac{A}{I}$ *está dada como* $(a + I)^* = a^* + I$.

Definición 2.11 *Un elemento* a *en un* C^**-álgebra* A *es positivo si, y sólo si,* $a = h^2$ *para algún elemento autoadjunto* ($h = h^*$) $h \in A$ *y escribiremos* $a \geq 0$ *en este caso. También escribiremos* $a \geq b$ *si, y sólo si,* $a - b \geq 0$.

Lema 2.12 *Un álgebra de Banach* A *sin unidad puede ser inmerso en un álgebra de Banach con unidad* $\widetilde{A}$ *como un ideal de codimensión uno.*

Prueba. Sea $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ como espacio lineal y definamos una multiplicación en $\widetilde{A}$ por $(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu)$. Con esta operación se tiene que $\widetilde{A}$ es un C^*-álgebra con identidad. Donde $\widetilde{A} = \{(a, \alpha); a \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$ y además en $\widetilde{A}$ definamos

- $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$, $\forall a, b \in A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- $z(a, \alpha) = (za, z\alpha)$, $\forall a \in A$, $\forall \alpha, z \in \mathbb{C}$
- $(a, \alpha)^* = (a^*, \overline{\alpha})$, $\forall a \in A$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$
- $1_{\widetilde{A}} = (0, 1)$
- Para cada $x \in \widetilde{A}$ pongamos $|||x|||_{\widetilde{A}} = \sup\{\|ax\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\}$ y definamos $\|x\|_{\widetilde{A}} = \text{máx}\left\{|||x|||_{\widetilde{A}}; |\pi(x)|\right\}$ donde $\pi : \widetilde{A} \to \mathbb{C}$.■

3. Teoría espectral

La caracterización de un C^*-álgebra A esta basado en definiciones y resultados corrspondientes a la teoría espectral.

Definición 3.1 *Sea* A *un álgebra de Banach. Un homomorfismo* $f : A \to \mathbb{C}$, $f \neq 0$ *es llamado un caracter (o funcional lineal multiplicativo).*

Definición 3.2 *El conjunto de caracteres de un álgebra de Banach con unidad cnmutativa A es llamada el espectro de A y se denota por S_pA, es decir*

$$S_pA = \{f : A \to \mathbb{C}; f \text{ es un caracter}\}.$$

Definición 3.3 *La topología W^* en el dual de A es generada por las vecindades*

$$\eta(\varphi : S, \varepsilon) = \{w \in A^*; |w(a) - \varphi(a)| < \varepsilon, \forall a \in S\}$$

donde $\varphi \in A^*$, ε es cualquier número real positivo y S es cualquier subconjunto finito de A.

Proposición 3.4 *Sea A un álgebra de Banach con unidad conmutativa, entonces el espectro S_pA es un subconjunto cerrado según W^* de la bola unitaria de A^* y por lo tanto es compacto.*

Prueba.- Ver [5] página 25.■

Teorema 3.5 *Sea A un álgebra de Banach con unidad conmutativa. Para $x \in A$ y $l \in S_pA$, definimos $\widehat{x} : S_pA \to \mathbb{C}$ como $\widehat{x}(l) = l(x)$. Entonces el rango de la función $\widehat{x}$ en S_pA satisface rang$(\widehat{x}) = \sigma_A(x)$. Además la aplicación $\widehat{\ }: A \to \mathcal{C}(S_pA)$ y $\|\widehat{x}\|_\infty \leq \|x\|$ para $x \in A$, para $x \in A$. $\widehat{\ }$* ***es llamada la transformación de Gelfand****.*

Prueba.- Para $x \in A$ y $l \in S_pA$ tenemos $l(x) \in \sigma_A(x)$; es decir $\widehat{x}(l) \in \sigma_A(x)$ y así el rango de $\widehat{x}$ satisface la inclusión siguiente $rang\hat{x} \subseteq \sigma_A(x)$.
Sea $\lambda \in \sigma_A(x)$ entonces $(x - \lambda 1)$ no es invertible y asi pertenece a algún ideal máximal J (En efecto, $(x - \lambda 1)$ pertenece al ideal propio $A(x - \lambda 1)$ el cual por el Lema de Zorn está contenido en un ideal máximal).
Sea $l \in S_pA$ tal que $Ker(l) = J$ entonces $(x - \lambda 1) \in J$ implica que $l(x) = \lambda$. De aqui $\widehat{x}(l) = l(x) = \lambda$ y de esto se sigue que $rang\widehat{x} = \sigma_A(x)$.

Claramente $\widehat{\ }$ es un homomorfismo; en efecto $\widehat{xy}(l) = l(xy) = l(x)l(y) = \widehat{x}(l)\widehat{y}(l)$; para $x, y \in A$, $l \in S_pA$ y asi $\widehat{xy} = \widehat{x}\widehat{y}$. Análogamente $\widehat{x + y} = \widehat{x} + \widehat{y}$.
Para mostrar que $\widehat{x} \in \mathcal{C}(S_pA)$. Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ mostraremos que $\widehat{x}^{-1}(U)$ es abierto en S_pA. Si $\widehat{x}^{-1}(U) = \phi$; no hay nada que probar. Supongamos que $\widehat{x}^{-1}(U) \neq \phi$. Sea $l \in \widehat{x}^{-1}(U)$, entonces existe $\varsigma \in U$ tal que $\widehat{x}(l) = \varsigma$ como U es abierto en $\mathbb{C}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N_\varepsilon(\varsigma) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \varsigma| < \varepsilon\} \subseteq U$. Sea $V = \eta(l : \{x\}, \varepsilon) = \{\omega \in S_pA : |\omega(x) - l(x)| < \varepsilon\}$ entonces $\omega(x) = \widehat{x}(\omega) \in U$, para todo $\omega \in V$; es decir $l \in V \subseteq \widehat{x}^{-1}(U)$. Deducimos que $\widehat{x}^{-1}(U)$ es abierto en S_pA y de aqui $\widehat{x} : S_pA \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua; esto es $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{C}(S_pA)$. Finalmente, tenemos que $rang\widehat{x} = \sigma_A(x) \subseteq \{\lambda : |\lambda| \leq \|x\|\}$ y asi se sigue que $|\widehat{x}(l)| \leq \|x\|$, para todo $l \in S_pA$. Asi $\|\widehat{x}\|_\infty \leq \|x\|$ para cualquier $x \in A$.■

Teorema 3.6 *Cada C^*-álgebra A abeliana es isometricamente isomorfica al álgbra $C_0(X)$ para algún espacio de Hausdorff X localmnte compacto.*

Prueba.- Ver [4] página 35.■

Definición 3.7 *Sea A un C^*-álgebra,* ***una representación de*** *A es un par (H, φ) donde H es un espacio de Hilbert y $\varphi : A \longrightarrow B(H)$ es un *-homomorfismo.*

Diremos que (H, φ) es fiel si φ es inyectiva. De este modo una representación fiel (H, φ) es uno a uno y por lo tanto isométrico. Recíprocamente, si φ es isométrica, entonces (H, φ) es una representación fiel.

Proposición 3.8 *Si $(H_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de representaciones de A, su suma directa es la representación (H, φ) escrito $H = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$, y $\varphi(a)\left((x_\lambda)_\lambda\right) = \left(\varphi_\lambda(a)(x_\lambda)\right)_\lambda$ $\forall\, a \in A$, y $\forall\, (x_\lambda)_\lambda \in H$ pues*

$$\varphi : A \longrightarrow B(H) = B(\bigoplus_\lambda H_\lambda)$$

$$a \longmapsto \varphi(a) : \bigoplus H_\lambda \longrightarrow \bigoplus H_\lambda$$
$$(x_\lambda)_\lambda \longmapsto \varphi(a)\left((x_\lambda)_\lambda\right) = \left(\varphi_\lambda(a)(x_\lambda)\right)_\lambda$$

donde $\varphi_\lambda : A \longrightarrow B(H_\lambda),\ \forall \lambda \in \Lambda$
$$a \longmapsto \varphi_\lambda(a) : H_\lambda \longrightarrow H_\lambda$$
$$x_\lambda \longmapsto \varphi_\lambda(a)(x_\lambda)$$

Claramente $(H, \varphi) = (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda, \varphi)$ *es una representación de* A.

Prueba. Como H_λ es un espacio de Hilbert para todo $\lambda \in \Lambda$ entonces $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ es un espacio de Hilbert. Ahora veamos que $\varphi : A \longrightarrow B(H) = B(\bigoplus H_\lambda)$ es un *-homomorfismo. Sean $a, b \in A$ probaremos que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ y $\varphi(a^*) = \varphi^*(a)$, para todo $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus H_\lambda$ se tiene
a) $\varphi(ab)\left((x_\lambda)_\lambda\right) = \left(\varphi_\lambda(ab)(x_\lambda)\right)_\lambda = \varphi(a)\varphi(b)\left((x_\lambda)_\lambda\right)$
Luego $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
b) $\varphi(a^*)\left((x_\lambda)_\lambda\right) = \left(\varphi_\lambda(a^*)(x_\lambda)\right)_\lambda = \left(\varphi_\lambda^*(a)(x_\lambda)\right)_\lambda = \varphi^*(a)\left((x_\lambda)_\lambda\right)$
Luego $\varphi(a^*) = \varphi^*(a)$.
Además es inmediato ver que; si para cada $a \in A\setminus\{0\}$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\varphi_\lambda(a) \neq 0$, entonces (H, φ) es fiel.■

Definición 3.9 *Sea* A *un álgebra* C^* *con unidad y* (H, π) *una representación de* A*. Un vector* $\xi \in H$ *es llamado vector cíclico (para la representación) si* $\pi(A)\xi$ *es denso en* H*. Si* (H, π) *tiene un vector cíclico, entonces esta es llamada una representación cíclica.*

Ahora, dada cualquier representación (H, π) de A y cualquier vector unitario $\xi \in H$, la aplicación $x \longmapsto \langle \pi(x)\xi, \xi\rangle$ es claramente un estado sobre A. (Observar que si $x > 0$, entonces existe $a \in H$ tal que $x = a^*a$ entonces $\pi(x) = \pi(a)^*\pi(a)$, $\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)^*\pi(a)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi\rangle \geq 0$). Así pues, dada cualquier representación podemos construir fácilmente estados sobre un álgebra C^*. La siguiente construcción establece la recíproca.

Teorema 3.10 ***(Gelfand, Naimark, Segal)***
Sea A un álgebra C^* con unidad y ω un estado en A. Entonces existe una representación cíclica (H, π) de A con vector cíclico unitario $\Omega \in H$ tal que $\omega(a) = \langle \pi(a)\Omega, \Omega\rangle$, para toda $a \in A$.
La tripleta (H, π, Ω) es única salvo equivalencia unitaria, es decir si (H', π', Ω') es otra tripleta, entonces existe un operador unitario $\mathcal{U} : H' \longrightarrow H$ tal que $\mathcal{U}(\Omega') = \Omega$ y $\mathcal{U}\pi'(a)\mathcal{U}^{-1} = \pi(a)$, $\forall\, a \in A$.

Prueba. Sea $N = \{x \in A : \omega(x^*x) = 0\}$. Entonces para cualquier $a \in A$ y $x \in N$, la desigualdad de Schwarz nos da $\omega((ax)^*ax) = \omega(x^*a^*ax) \leq \omega(x^*x)^{1/2}\omega(y^*y)^{1/2} = 0$, con $y = a^*ax$ lo cual muestra que $ax \in N$. Por tanto N es un ideal izquierdo en A.
Sea $K = \frac{A}{N}$ como espacio vectorial, y para cada $\xi, \eta \in K$ definimos $\langle \xi, \eta\rangle = \omega(y^*x)$, donde $x \in \xi$ y $y \in \eta$. Es directo verificar que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ es una forma sesquilineal bien definida sobre K es decir define un producto interno.
En efecto. $\langle \eta, \xi\rangle = \omega(x^*y) = \omega(y^*x)^* = \overline{\omega(y^*x)} = \overline{\langle \xi, \eta\rangle}$ observar que si $\|\xi\|_\omega^2 = \langle \xi, \xi\rangle = 0$, entonces $\omega(x^*x) = 0$ para cualquier $x \in \xi$. De aqui $x \in N$ y por tanto $\xi = 0$ en $K = \frac{A}{N}$. En otras palabras $\|\cdot\|_\omega$ es una norma en K.
Definimos una acción de A en K por $L_a\xi = clax$ para $a \in A$ y donde $x \in \xi$ observar que si $a \in A, x_1, x_2 \in \xi$, entonces $x_1 - x_2 \in N$ asi $clax_1 = clax_2$.
Además $\|L_a\xi\|_\omega^2 = \langle L_a\xi, L_a\xi\rangle = \langle clax, clax\rangle = \omega((ax)^*(ax)) = \omega(x^*a^*ax)$, con $x \in \xi$, luego

$$\|L_a\xi\|_\omega^2 = \omega(x^*a^*ax) \tag{1}$$

Pongamos $\rho(b) = \omega(x^*bx)$ para cualquier $b \in A$. Entonces vemos que ρ es lineal y también si $b \geq 0$, entonces $x^*bx \geq 0$ luego $\rho(b) \geq 0$. De aqui que $\rho(b)$ es un funcional lineal positivo sobre

A y por tanto $\|\rho\| = \rho(1)$.
Es decir $|\rho(b)| \leq \rho(1)\|b\|$, para todo $b \in A$. Entonces, tomando $b = a^*a$ tenemos $|\omega(x^*a^*ax)| \leq \omega(x^*x)\|a^*a\| = \omega(x^*x)\|a\|^2 = \langle \xi, \xi \rangle \|a\|^2$ luego

$$|\omega(x^*a^*ax)| \leq \langle \xi, \xi \rangle \|a\|^2 \tag{2}$$

De (1) y (2) se tiene $\|L_a\xi\|_\omega^2 \leq \|\xi\|^2\|a\|^2$ es decir $\|L_a\xi\|_\omega \leq \|\xi\|_\omega\|a\|$. De aqui, L_a define un operador lineal acotado en $K = \frac{A}{N}$ se verifica inmediatamente la relaciones

$$L_{a+b} = L_a + L_b$$

$$L_{ab} = L_aL_b$$

$$L_1 = 1_K$$

y $\langle L_{a^*}\xi, \eta \rangle = \omega(y^*a^*x) = \omega((ay)^*x) = \langle \xi, L_a\eta \rangle$, donde $x \in \xi$, $y \in \eta$.
Sea H la completación de K con respecto a la norma $\| \cdot \|_\omega$. Entonces H es un espacio de Hilbert y contiene (una copia isomorfa) de K como un subconjunto denso. Sea $\Omega \in K$ dado por $\Omega = cl1$. Entonces si $\xi \in K$ debe existir $x \in A$ tal que $\xi = clx = clx1 = L_x\Omega$ de aqui que $K = \{L_x\Omega : x \in A\}$.
Para cada $a \in A$, L_a es una aplicación lineal acotada de K en K y por tanto tiene una única extensión lineal acotada digamos $\pi(a)$ de H en H. Las relaciones anteriores permanecen válidas y por tanto vemos que

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow B(H) \\ a &\longmapsto \pi(a) \end{aligned}$$

es una representación de A en H. Desde que $K = \{L_x\Omega : x \in A\} = \{\pi(x)\Omega : x \in A\}$ es denso en H, se sigue que Ω es un vector cíclico para la representación (H, π) notar que, para cualquier $a \in A$, $\langle \pi(a)\Omega, \Omega \rangle = \langle L_a cl1, cl1 \rangle = \langle cla, cl1 \rangle = \omega(1^*a) = \omega(a)$.
Para establecer la unicidad, salvo equivalencia unitaria, supongamos que (H', π', Ω') es otra tal tripleta.
Definimos $\mathcal{U} : H' \longrightarrow H$ por $\mathcal{U}(\pi'(a)\Omega') = \pi(a)\Omega$. Entonces $\|\mathcal{U}\pi'(a)\Omega'\|_H^2 = \|\pi(a)\Omega\|_H^2 = \|L_a\Omega\|_H^2 = \langle cla, cla \rangle = \omega(a^*a) = \langle \pi'(a^*a)\Omega', \Omega' \rangle = \langle \pi'(a)^*\pi'(a)\Omega', \Omega' \rangle = \langle \pi'(a)\Omega', \pi'(a)\Omega' \rangle = \|\pi'(a)\Omega'\|_{H'}^2$.
Por tanto, $\mathcal{U}$ es un operador lineal isométrico de un conjunto denso en H' a un conjunto denso en H y de este modo podemos definir una extensión unitaria de H' sobre H.
Veamos que $\mathcal{U}$ satisface las condiciones requeridas $\mathcal{U}\pi'(a)\mathcal{U}^{-1}\pi(b)\Omega = \mathcal{U}\pi'(a)\pi'(b)\Omega' = \mathcal{U}\pi'(ab)\Omega' = \pi(ab)\Omega = \pi(a)\pi(b)\Omega$ entonces $(\mathcal{U}\pi'(a)\mathcal{U}^{-1})(\pi(b)\Omega) = \pi(a)(\pi(b)\Omega)$ para todo $a, b \in A$.
Como $\pi(A)\Omega$ es denso en H, deducimos que $\mathcal{U}\pi'(a)\mathcal{U}^{-1} = \pi(a)$, para todo $a \in A$ claramente $\mathcal{U}(\Omega') = \Omega$.■

Observación 3.11 (H, π, Ω) *es llamada la representación (o tripleta) de Gelfand, Naimark, Segal (GNS) asociada con ω en A.*

Ejemplo 3.12 *Sea $H_\circ$ un espacio de Hilbert y sea $\xi \in H_\circ$ un vector unitario. Sea ω el estado sobre $B(H_\circ)$ dado por $x \mapsto \langle x\xi, \xi \rangle$, $x \in B(H_\circ)$. Entonces la tripleta GNS (H, π, Ω) es la representación con $H = H_\circ$, $\Omega = \xi$ y $\pi(x) = x$, para todo $x \in B(H_\circ)$. Esto se sigue de la unicidad.*

$$\begin{aligned} \pi : A = B(H_\circ) &\longrightarrow B(H_\circ) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

donde $\omega(x) = \langle x\xi, \xi \rangle = \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle$

Teorema 3.13 ***(Caracterización de un C^*-algebra)*** *Cualquier C^*-algebra A, es isométricamente isomorfo * a un álgebra C^* de operadores sobre un espacio de Hilbert.*

Prueba. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A tiene unidad (si no tuviera, consideramos $\widetilde{A}$ en vez de A). Sea S_A el conjunto de estados de A y para cada $\omega \in S_A$ sea $(H_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ la correspondiente representación GNS de A. Sea (H, π) su suma directa, $H = \bigoplus_{\omega \in S_A} H_\omega$ y $\pi = \bigoplus_{\omega \in S_A} \pi_\omega$. Sea Ω el vector $\bigoplus \Omega_\omega$.

Supongamos que $\pi(a) = \pi(b)$ para algún $a, b \in A$. Entonces $(\pi(a) - \pi(b))\Omega = 0$ entonces $(\pi(a-b))\Omega = 0$ luego $\bigoplus_{\omega \in A} \pi_\omega(a-b)\Omega_\omega = 0$. Por lo tanto $\pi_\omega(a-b)\Omega_\omega = 0$, para todo $\omega \in S_A$.

En particular, $\omega(a-b) = \langle \pi_\omega(a-b)\Omega_\omega, \Omega_\omega \rangle = 0$, para todo $\omega \in S_A$. Pero S_A separa puntos de A, luego $a = b$ de modo que π es fiel (inyectiva) y por tanto A es isometricamente isomorfo * a $\pi(A)$.$\blacksquare$

4. Conclusiones

- Cualquier C^*-álgebra A (salvo isomorfismo) puede ser ser vista como un C^*-álgebra de operadores sobre un espacio de Hilbert.

- La teoría de espacios de Hausdorff localmente compactos forma el ángulo conmutativo del mundo de las C^*-álgebras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Corach, G., Andruchow, E. (1977). *Notas de análisis funcional.* Primera edición, UBA-Argentina.

[2] Conway, J. (1990). *A course in funtional analysis.* Second edition, Springer-Verlag, New York.

[3] Connes, A. (1994). *Nom Commutative Geometry.* Academic Press, San Diego.

[4] Erdos, J. A. (2003). C^*-*álgebras.* King′s College-London Department of Mathematics. Englad.

[5] Murphy, G. J. (1993). C^*-*álgebras and operator theory (studies in advanced mathematics).* CRC Press. Florida.

[6] Segal, I. (1947). *Irreducible representations of operator álgebra.* Bull. Am., Math. Suc 53: 17–44.

[7] Kenneth, R. (1996). C^*-*álgebras by example copyright.* The Americam Mathematical Society.