PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XIX N°1, pp. 40-50, Enero–Junio 2016

Fórmula de Stirling

Edinson Montoro[1] *Willy Barahona*[2] *Luis Macha*[3]
Gabriel Rodríguez[4] *Emilio Castillo*[5] *Rocío De La Cruz*[6]
Pedro Becerra[7]

(Recibido: 12/11/2015 - Aceptado: 10/02/2016)

Resumen: Con ayuda del desarrollo de la función logarítmica en serie de potencias se puede hallar fácilmente la fórmula, que describe el comportamiento asintótico del factorial $n!$ cuando n tiende al infinito. Esta fórmula es llamada **formula de Stirling** y puede ser escrita en la forma

$$n! \sim \sqrt{2\,\pi\,n}\,n^n\ \mathrm{e}^{-n}$$

Palabras Claves: Series, sucesiones, factorial, integrales, integrales impropias.

Stirling Formula

Abstract: Using the development of the logarithmic function in power series can easing find the formula that describes the asymptotic behavior of factorial of n as n approaches infinity. This formula is called Stirling formula can be written as follows

$$n! \sim \sqrt{2\,\pi\,n}\,n^n\ \mathrm{e}^{-n}$$

Key Words: Series, successions, factorial, integrals, integrals improper.

1 Introducción

Aproximaciones de Stirling para $n!$

Al evaluar las funciones de distribución en estadística, a menudo es necesario evaluar considerables factoriales de números, como en la **distribución binomial**:

$$f_b(x) = \frac{n!\,p^x\,(1-p)^{n-x}}{x!\,(n-x)!}$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: edinsonmontoro@yahoo.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:wilbara_73@yahoo.es
[3]UNMSM,Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: lmachac@hotmail.com
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: grodriguezv@unmsm.edu.pe
[5]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:ecastilloj@unmsm.edu.pe
[6]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: rodema_71@yahoo.es
[7]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: pbecerrap@unmsm.edu.pe

Una relación aproximada útil y de uso común en la evaluación de factoriales de grandes números es la aproximación de Stirling

$$n! \approx n^n \, \mathrm{e}^{-n} \, \sqrt{2\pi n}$$

La siguiente es una aproximación ligeramente más segura

$$n! \approx n^n \, \mathrm{e}^{-n} \, \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n}\right)$$

pero en la mayoría de los casos la diferencias es pequeña. Este término adicional, nos proporciona una forma de valorar si la aproximación tiene un error grande.

La aproximación de Stirling es también útil para calcular la aproximación al logaritmo de un factorial, la cual encuentra aplicación en la evaluación de la **entropía** en términos de la multiplicidad, como en el **sólido de Einstein**.

El logaritmo de $n!$ es

$$\ln n! = n \, \ln n - n + \ln\left(\sqrt{2\pi n}\right)$$

pero normalmente se suele despreciar el último término, de modo que una aproximación que funciona es

$$\ln n! \approx n \, \ln n - n$$

Shroeder da una evaluación numérica de la seguridad de las aproximaciones.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n!}$	$\boldsymbol{n^n \, \mathrm{e}^{-n} \, \sqrt{2\pi n}}$	***Error***	$\boldsymbol{\ln n!}$	$\boldsymbol{n \, \ln n - n}$	***Error***
1	1	0.922	7.7 %	0	-1	$\cdots$
10	3628800	3598696	0.83 %	15.1	13.0	13.8 %
100	9×10^{157}	9×10^{157}	0.083 %	364	360	0.89 %

De hecho el factor $\left(1 + \dfrac{1}{12n}\right)$ representa una sustancial mejora de la fórmula de la aproximación de $n!$, como lo muestra la tabla siguiente

n	$x = \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$	$y = \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}\right)}$
1	1.084437550	1.001019277
5	1.016783986	1.000115396
10	1.008365359	1.000031761
50	1.001668034	1.000001365
100	1.000833677	1.000000344
500	1.000166681	1.000000014
1000	1.000083337	1.000000003

La Función Gamma

Una función que a menudo aparece en el cálculo estadístico es la función gamma:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n \, e^{-x} \, dx$$

y se puede probar que satisface:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) 0! \qquad\qquad = \Gamma(1) = 1$$

De aquí, considerando $n \in \mathbb{N}$ nos conduce a

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^\infty x^n \, e^{-x} \, dx$$

Otras relaciones comunes con la función gamma:

$$\left(\frac{d}{2}-1\right)! = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)$$

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(n\,\pi)}$$

Una de las aplicaciones de la función gama se da en la evaluación de las **integrales estadísticas.**

La Función Zeta de Riemann

Una función que aparece a menudo en el cálculo estadístico es la función zeta de Riemann:

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

Una de las aplicaciones de la función zeta se da en la evaluación de las **integrales estadísticas**.

Funciones para Estadística

Una forma de integral que regularmente aparece en la **estadística cuántica** es:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x \pm 1}\, dx$$

La evaluación de esta clase de integrales, se realiza en término de dos funciones especiales, la **función gamma** y la **función zeta de Riemann**.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1}\, dx = \Gamma(n+1)\,\zeta(n+1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x + 1}\, dx = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\Gamma(n+1)\,\zeta(n+1)$$

ζ = Función Zeta de Riemann.
Γ = Función Gamma.

2 Metodología

Teorema 1: Una sucesión no decreciente y acotada superiormente es convergente. Una sucesión no creciente y acotada inferiormente es convergente. Una sucesión monótona y acotada es convergente.

Demostración: Ver [2].

Teorema 2 (Teorema del Sandwich): Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que

i) $x_n \le y_n \le w_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = L$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} y_n = L$$

Demostración: Ver [2].

Teorema 3: Se cumple

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\right]^2\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\right\}$$

Demostración: Calculamos I_n usando integrales por partes

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-1} x\, d(-\cos x) = \Big[-\operatorname{sen}^{n-1} x\, \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} +$$
$$+ (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\, \cos^2 x\, dx$$

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen}^{n-1} x \Longrightarrow u' = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x\, \cos^2 x \\ dv' = \operatorname{sen} x \Longrightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_n = 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\, \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n} x\, dx$$
$$= (n-1)\Big[-I_n + I_{n-2}\Big] = -(n-1)I_n + (n-1)I_{n-2}$$

entonces $(n-1+1)I_n = (n-1)I_{n-2} \implies I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$. Se obtiene una forma recurrente

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-3}{n-2}\right)I_{n-4} = \ldots = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2}\, I_0$$

Para n par, $n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx = I_n = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\, I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2} \tag{1}$$

Para n impar, $n = 2k+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$I_n = \frac{(n-1)}{n}\, I_{n-2} = \ldots = \frac{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}\, I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\, I_1$$

$$I_n = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\Big[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0\Big]$$

$$I_n == \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{(n)!!}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad n = 2k \quad \text{(par)} \\ \dfrac{(n-1)!!}{(n)!!} & \text{si} \quad n = 2k+1 \quad \text{(impar)} \end{cases} \tag{3}$$

Análogamente se calcula

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{(n)!!}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad n = 2k \quad \text{(par)} \\ \dfrac{(n-1)!!}{(n)!!} & \text{si} \quad n = 2k+1 \quad \text{(impar)} \end{cases} \tag{4}$$

Por otro lado como $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ se cumple que

$$0 \le \operatorname{sen} x \le 1$$

entonces

$$(\operatorname{sen} x)^{2n+1} \le (\operatorname{sen} x)^{2n} \le (\operatorname{sen} x)^{2n-1}$$

Luego, integrando la desigualdad

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1} x\, dx$$

En virtud de (3), se obtiene

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

de aquí

$$\frac{(2n)!!\,(2n)!!}{(2n+1)!!\,(2n-1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!\,(2n)!!}{(2n-1)!!\,(2n-1)!!}$$

$$\frac{1}{(2n+1)}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n} \tag{5}$$

Definamos $w_n = \frac{1}{(2n+1)}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$ y $u_n = \frac{1}{2n}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$
Luego de (5) se cumple

$$0 \leq u_n - w_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{(2n+1)}\right)$$

$$0 \leq u_n - w_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n(2n+1)} \leq \frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2} \tag{6}$$

Aplicando el Teorema del Sandwich cuando $n \to +\infty$

$$0 \leq u_n - w_n \leq \frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$$

entonces $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - w_n) = 0$ y el intervalo $[w_n, u_n]$ siempre contiene al $\frac{\pi}{2}$ debido a la relación (5). Por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{\pi}{2}.$$

3 Resultados y Discusión

Teorema 4 (Fórmula de Stirling):

$$n! \sim \sqrt{2\,\pi\,n}\,n^n\ \mathrm{e}^{-n}, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Demostración: Según la definición de igualdad asintótica para las sucesiones significa que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{\sqrt{2\,\pi\,n}\,n^n\ \mathrm{e}^{-n}}\right) = 1$$

Del desarrollo

$$\mathrm{Ln}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad |x| \leq 1$$

se deduce que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \mathrm{Ln}(1+x)-\mathrm{Ln}(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(-1)^n\frac{x^n}{n}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\\
&=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\cdots+=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\\
&=2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}
\end{aligned}$$

consideramos x de la forma $x=\dfrac{1}{2n+1}$, $n=1,2,3,\dots$ entonces

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}}=\frac{2n+1+1}{2n+1-1}=\frac{2\,(n+1)}{2\,n}=1+\frac{1}{n}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(\frac{1}{2n+1}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right)\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k}\\
&=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\frac{1}{7}\frac{1}{(2n+1)^6}+\cdots+\cdots\right]\\
&>\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+\dfrac{1}{2}}
\end{aligned}\tag{7}$$

De aquí:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Ln}\left(1+\frac{1}{n}\right)>1$$

usando propiedad de logaritmo

$$\mathrm{Ln}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}>1$$

tomando la exponencial (pues son inversas) se obtiene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}>\mathrm{e}^1=\mathrm{e}\tag{8}$$

Ahora, consideremos una sucesión

$$x_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \tag{9}$$

Luego

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}{\dfrac{(n+1)!\,\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}} = \frac{n!\,\mathrm{e}^n\,(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{(n+1)\,n!\,\mathrm{e}^n\;\mathrm{e}\;n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(n+1)^n\,(n+1)^{3/2}}{(n+1)\;\mathrm{e}\;n^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(n+1)^n\,(n+1)^{1/2}}{\mathrm{e}\;n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Usando (8):

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > \frac{1}{\mathrm{e}}\;\mathrm{e} = 1 \tag{11}$$

Luego, $x_n > x_{n+1}$. Esto prueba que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente (pues $x_n \geq 0, \quad \forall n$ ver (9)). Entonces la sucesión converge a un número. Sea

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{12}$$

Esto implica que $x_n = a\,(1-\varepsilon_n)$ donde $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Probemos ahora que $a \neq 0$. En efecto, como

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{7}\,\frac{1}{(2n+1)^6} + \cdots + \cdots < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2n+1)^6} + \frac{1}{(2n+1)^8} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right) + \left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^3 + \left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^4 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[-1+1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^k\right] \quad \text{y como} \quad \frac{1}{(2n+1)^2} \leq 1, \quad \forall n \geq 1$$

$$= \frac{1}{3}\left[-1+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^k\right] = \frac{1}{3}\left[-1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}}\right] = \frac{1}{3}\left[-1+\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2-1}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{-(2n+1)^2+1+(2n+1)^2}{(2n+1)^2-1}\right] = \frac{1}{3}\,\frac{1}{4n^2+4n+1-1} = \frac{1}{12n(n+1)}. \tag{13}$$

De (7)

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Ln}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left[1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4}+\frac{1}{7}\,\frac{1}{(2n+1)^6}+\cdots+\cdots\right]$$

y usando (13)

$$< 1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

aplicando la exponencial

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < \mathrm{e}^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}$$

Luego usando (9)

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)}}$$

de donde

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{12(n+1)}}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}}$$

$$x_n\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}} < x_{n+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{12(n+1)}}\,. \tag{14}$$

De aquí se concluye que la sucesión $y_n = x_n\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}$, $n = 1,2,3,\ldots$ es creciente. Así mismo notemos que

$$y_n = x_n\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}=\frac{x_n}{\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}} < x_n < x_1,\quad \forall n$$

Esto prueba que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente y por lo tanto tiene límite.

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\left(x_n\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}\right)=\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}\right)=a\cdot 1=a$$

Por otro lado, debe notar que $0 < y_n < a$, $\quad\forall n = 1,2,3,\ldots$ lo que prueba que $a > 0$.
Ahora reemplazamos (12) en (9)

$$\frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=a(1-\varepsilon_n)\quad\Longrightarrow\quad n!=\frac{a\,n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n}(1-\varepsilon_n) \tag{15}$$

Para $n\to\infty$ (suficientemente grande)

$$n!\sim\frac{a\,n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}=a\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n} \tag{16}$$

Solo falta probar que $a=\sqrt{2\pi}$.
Haremos uso del siguiente resultado (Teorema 3)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2n+1} \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots (2n-1)} \right]^2 \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \right\} \tag{17}$$

Luego, manipulando el término entre corchetes

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} &= \frac{(2n)!!\,(2n)!!}{(2n-1)!!\,(2n)!!} = \frac{\left[(2n)!!\right]^2}{(2n)!} = \frac{\left[2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n\right]^2}{(2n)!} \\ &= \frac{\left[2^n\,(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)\right]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!} \end{aligned} \tag{18}$$

Usando (15) en (18) y (17)

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} &= \frac{2^{2n}\left[a\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}\right]^2}{\left[a\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2n}\right]} = \frac{2^{2n}\,a^2\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} n}{a\,2^{2n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2n}}\cdot\frac{(1-\varepsilon_n)^2}{(1-\varepsilon_{2n})} \\ &= a\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{(1-\varepsilon_n)^2}{(1-\varepsilon_{2n})}. \end{aligned} \tag{19}$$

Análogamente (19) en (17) genera

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n+1}\,a^2\,\frac{n}{2}\,\frac{(1-\varepsilon_n)^4}{(1-\varepsilon_{2n})^2}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}\,\frac{(1-\varepsilon_n)^4}{(1-\varepsilon_{2n})^2}\right\} = \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore \quad a = \sqrt{2\pi}$$

4 Conclusiones

El desarrollo de la función logaritmo en serie de potencias puede ser utilizado para dar una demostración alternativa y elegante de la fórmula de Stirling.

Referencias Bibliográficas

[1] N.N. Lebedev: *Special Functions and their Applications*. Dover Publications, lne.

[2] H.E. Taylor y T.L. Wade: *Cálculo diferencial e integral*. Edit. Limusa. Wiley, S.A. México 1969.

[3] W.W. Bell: *Special Functions for Scientists and Engineers*. D. Van Nostrand Company, Ud.

[4] E.D. Rainville: *Special Functions*. Chelsea Publishing Company.

[5] M. Spiegel: *Análisis de Fourier (Series de Compendios Shaum)*. Mc Graw-Hill.

[6] http://enciclopedia.us.es/index.php/F%C3%B3rmula_de_Stirling

[7] www.uco.es/∼fa1orgim/fisica/archivos/Lecciones/AP_F-APS.PDF

[8] http://gaussianos.com/la-formula-de-stirling/