PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XIX N°1, pp. 51-60, Enero–Junio 2016

Algoritmo de Punto Proximal para Problemas de Desigualdad Variacional en $\mathbb{R}^n$

Frank Collantes[1] ***Marlo Carranza***[2] ***Milton Aycho***[3]

(Recibido: 29/02/2016 - Aceptado: 18/04/2016)

Resumen: Presentaremos el algoritmo del punto proximal sin restricciones para calcular ceros de operadores monótonos maximales con norma Euclidiana $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ que genera una sucesión $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ definida de la manera siguiente: x_0 es dado y $x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{\lambda_k}T\right)^{-1}(x_k)$, donde $\{\lambda_k\}$ es una sucesión de numeros positivos tal que $0 < \lambda_k < \overline{\lambda}$ para algún $\overline{\lambda} > 0$. Probaremos que esta sucesión x_k converge a un cero de T, luego vamos a resolver el problema de desigualdad variacional que es definido así, dado $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ monótono maximal y $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y convexo, el problema consiste en calcular $z \in C$ tal que $u \in T(z)$ satisfaciendo $\langle u, x - z\rangle \geq 0, \ \forall x \in C$, probaremos que la sucesión x_k generada por el algoritmo converge a una solución del problema de desigualdad variacional.

Palabras Claves: Conjunto Convexo, Funciones convexas, Operadores Monótonos, Algoritmo del Punto Proximal, Desigualdad Variacional.

Proximal Point Algorithm for Variational Inequality Problems in $\mathbb{R}^n$

Abstract: Present the proximal point algorithm whithout restrictions to find zeros of maximal monotone operators with the Euclidean norm $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ that generates a sequence $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ in the following way, given x_0 and $x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{\lambda_k}T\right)^{-1}(x_k)$, where $\{\lambda_k\}$ is a sequence of positive number $0 < \lambda_k < \overline{\lambda}$ for some $\overline{\lambda} > 0$. We show that the sequence x_k converges to zero of T, then we will solve the problem of variational inequality is well defined given $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ maximal monotone and $C \subset \mathbb{R}^n$ a closed convex set, the problem is to calculate $z \in C$ such that $u \in T(z)$ satisfying $\langle u, x - z\rangle \geq 0, \ \forall x \in C$, we prove that sequences x_k generated by the algotithm converges to a solution of the problem of variational inequality.

Key Words: closed convex set, functions convex, monotone operator, proximal point algorithm, variational inequality.

1 Introducción

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa y limitada inferiormente, el problema de optimización convexa sin restricción es definido como $\underset{x\in\mathbb{R}^n}{min} \ f(x)$
Cuando x esta restringido a un conjunto convexo cerrado $C \subset \mathbb{R}^n$ obtenemos el problema de optimización restricto $\underset{x\in C}{min} \ f(x)$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, E-mail: frank_1400113@hotmail.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, E-mail: marlocpx5@hotmail.com
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, E-mail: milton_0279@hotmail.com

Este problema se puede expresar con ayuda del subdiferencial ∂f de f como sigue

$$\text{Encontrar } x^* \in \mathbb{R}^n, \text{ tal que } 0 \in \partial f(x^*) \tag{1}$$

o encontrar $x^* \in C$ tal que si existe $u \in \partial f(x^*)$ satisfaciendo

$$\langle u, y - x^* \rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in C \tag{2}$$

Cuando f es una función convexa semicontinua inferiormente, tenemos que $\partial f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es un operador monótono maximal ($Teoremaxx$) así obtenemos extensiones de los problemas (1) y (2) reemplazando el operador ∂f por cualquier otro operador monótono maximal de interés $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera

$$\text{Encontrar } x^* \in \mathbb{R}^n, \text{ tal que } 0 \in T(x^*) \tag{3}$$

o encontrar $x^* \in C$ tal que existe $u \in T(x^*)$ satisfaciendo

$$\langle u, y - x^* \rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in C \tag{4}$$

de esta forma el problema (3) asociado a un operador monótono maximal es el problema de encontrar ceros de T, el problema (4) será llamado problema de desigualdad variacional para el operador T en el conjunto C el cual denotaremos $PDV(T; C)$

2 Metodología

Vamos a definir las ideas necesarias tales como el conjunto convexo y la función convexa

2.1 Existencia de Soluciones

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y una función $f : D \to \mathbb{R}$ el problema

$$\text{mín } f(x) \text{ tal que } x \in D \tag{5}$$

consiste en encontrar un minimizador de f en un conjunto D el cual es llamado conjunto factible y f es llamada función objetivo.

Definición 2.1. Decimos que $x^* \in D$

1. Es un minimizador global de (5) si

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in D \tag{6}$$

2. Es un minimizador local de (5) si $V \subset D$

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in D \cap V \tag{7}$$

Si $x \neq x^*$ y las desigualdades (6) y (7) son estrictas, diremos que x^* es llamado minimizador estricto (global o local respectivamente)
Para $D = \mathbb{R}^n$ el problema (5) toma la siguiente forma

$$\text{mín } f(x) \text{ tal que } x \in \mathbb{R}^n \tag{8}$$

Decimos que el problema (8) es irrestricto

Teorema 2.2. *(Teorema de Weiertrass)* Sea D un conjunto compacto no vacío y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces el problema de minimizar f en D tiene una solución global
Demostración. Vea [2] ■

Definición 2.3. Una función es *coerciva* en un conjunto D si para toda $x_k \subset D$ tal que $\|x_k\| \to \infty$ o $x_k \to x \in \overline{D}$ cuando $x \to \infty$ entonces $\liminf_{k\to\infty} f(x_k) = \infty$

Ejemplo 2.4. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, suponga que el problema (8) tiene solución y es definida por la función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $F(x) = f(x) + \frac{1}{2}\|x - x_0\|$ entonces F es coerciva en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.5. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua y coerciva en D, entonces el problema de minimizar f en D posee solución única global.
Demostración. Vea [2] ■

Definición 2.6. Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es *semicontinua inferiormente* en un punto $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ cuando para cualquier sucesión $x_k \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x_k \to x$ cuando $(k \to \infty)$ se tiene que

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geq f(x)$$

Decimos que f es *semicontinua superiormente* cuando con las mismas condiciones

$$\limsup_{k\to\infty} f(x_k) \leq f(x)$$

Una función f es semicontinua inferiormente (superiormente) en el conjunto D, cuando es semicontinua inferiormente (superiormente) en todos los puntos de D

Conjunto Convexo

Definición 2.7. Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si para cualesquiera $x, y \in D$ y $\alpha \in [0, 1]$ se tiene que

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in D \tag{9}$$

El punto $\alpha x + (1 - \alpha)y$ se llama *combinación convexa* de x e y con parámetro α

Función Convexa

Definición 2.8. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto Convexo, se dice que $f : D \to \mathbb{R}$ es una *función convexa* en D cuando para cualesquier $x, y \in D$ y cualquier $\alpha \in [0; 1]$ se tiene que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) \tag{10}$$

Se dice que f es *estrictamente convexa* cuando la desigualdad anterior es estricta para todo $x \neq y$ y $\alpha \in [0; 1]$

Definición 2.9. El *Epígrafo* de la función $f : D \to \mathbb{R}$ es el conjunto

$$E_f = \{(x, c) \in D \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq c\}$$

Teorema 2.10. Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto convexo, una función $f : D \to \mathbb{R}$ es convexa en D si y solo si el epígrafo de f es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

vea [5]

Definición 2.11. El problema

$$\text{mín } f(x) \text{ sujeto a } x \in D \tag{11}$$

es un *problema de minimization convexa* cuando $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y $f : D \to \mathbb{R}$ es una función convexa en el conjunto D.

Teorema 2.12. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : D \to \mathbb{R}$ una función convexa en D. Entonces todo minimizador de local del problema (11) es global.
El conjunto de minimizadores es convexo, si f es estrictamente convexa, entonces el minimizador es único.
Demostración. Vea [2] ■

Definición 2.13. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ el *conjunto de nivel* de la función $f : D \to \mathbb{R}$ asociado a $c \in \mathbb{R}$ es

$$L_{c,D}(c) = \{x \in D \ / \ f(x) \leq c\}$$

Teorema 2.14. *(Caracterización de funciones convexas)* Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto convexo y abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en D, las proposiciones son equivalentes

1. La función f es convexa en D.
2. Para todo $x \in D$ y todo $y \in D$, se cumple $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$.
3. Para todo $x \in D$ y todo $y \in D$,se cumple $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$.

Demostración. Vea [2] ■

Corolario 2.15. Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto convexo y abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en D, las proposiciones son equivalentes

1. La función f es estrictamente convexa en D.
2. Para todo $x \in D$ y todo $y \in D$, $x \neq y$, $f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$.
3. Para todo $x \in D$ y todo $y \in D$, $x \neq y$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle > 0$.

Demostración. Se sigue del teorema anterior ■

Teorema 2.16. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\overline{x}$ un minimizador local de f, entonces $\nabla f(\overline{x}) = 0$.
Demostración. Vea [2] ■

2.2 Subgradiente de una función

Definición 2.17. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa, decimos que $y \in \mathbb{R}^n$ es un *subgradiente* de f en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ si

$$f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x \rangle \ \ \forall z \in \mathbb{R}^n$$

El conjunto de todos los subgradientes de f en x es llamado el *subdiferencial* de f en x denotado por $\partial f(x)$

$$\partial f(x) = \{y \in \mathbb{R} \ / \ f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x \rangle\}$$

Teorema 2.18. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa, entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\partial f(x)$ es no vacío, convexo y compacto.
Demostración. Vea [2] ■

Teorema 2.19. Una función convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable si y solo si el conjunto $\partial f(x)$ contiene un único elemento, se denotara como $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$
Demostración. Vea [5] ■

Teorema 2.20. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa, hay mínimo en el punto $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ si y solo si $0 \in \partial f(\overline{x})$
Demostración. Vea [5] ■

2.3 Funciones convexas con valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Extenderemos las funciones convexas vistas en la Sección 2.3

Definición 2.21. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, no idénticamente $+\infty$, se dirá *convexa* si para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y)$$

Definición 2.22. El *dominio efectivo* de una función convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, es el conjunto denotado por $dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) < +\infty\}$

Definición 2.23. Una función es llamada *Cerrada* si su epígrafo es cerrado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ o su conjunto de nivel es cerrado.

Definición 2.24. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, el *Subdiferencial* de f es $x \in \mathbb{R}^n$ es el conjunto $\partial f(x)$ definido

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{s \in \mathbb{R}^n \ / \ f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle, \ \forall y \in \mathbb{R}^n\} & \text{si } x \in dom(f) \\ \phi & \text{si } x \notin dom(f) \end{cases}$$

Teorema 2.25. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas

1. $\partial(f + g) \supset \partial f(x) + \partial g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$
2. Sea $x \in ri(domf(x)) \cap ri(dom(g))$ tal que $\partial f(x)$ y $\partial g(x)$ son no vacíos, entonces

$$\partial(f + g) = \partial f(x) + \partial g(x)$$

Demostración. Vea [2] ■

2.4 Conjugada de una función convexa

Definición 2.26. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ función convexa y propia, definimos la *función conjugada* de f como

$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, s\rangle - f(x)\}$$

donde $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Teorema 2.27. Sea la función convexa, propia y semicontinua inferiormente $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ donde f es finita en $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $s \in \partial f(x)$ si y solo si $f^*(s) = \langle x, s\rangle - f(x)$.
Este Teorema garantiza que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa y $s \in \partial f(x)$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $f^*(x) < +\infty$
Demostración. Vea [5] ■

Teorema 2.28. Sea la función convexa, propia y semicontinua inferiormente $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, entonces la función conjugada de f es una función convexa.
Demostración. Vea [5] ■

Definición 2.29. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Decimos que la función $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es la función conjugada de f^* llamada la *Biconjugada* de f

Lema 2.30. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, entonces f^{**} es el supremo del conjunto de todas las funciones afines que minoran f.

Teorema 2.31. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, una función convexa, propia y semicontinua inferiormente, entonces $f = f^{**}$
Demostración. Vea [6] ■

3 Resultados y Discusión

Operadores Monótonos y Paramonótonos

Definición 3.1. Un operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ no necesariamente lineal sera llamado *monótono* si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq 0 \tag{12}$$

Observación 3.2. T es llamado *estrictamente monótono* cuando la desigualdad (12) es estricta para $x \neq y$.

Ejemplo 3.3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa estrictamente convexa y diferenciable, entonces $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador monótono estrictamente monótono.

Observación 3.4. ∂f asocia a cada vector $x \in \mathbb{R}^n$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, extenderemos la noción de operador monótono punto a punto a operador punto conjunto.

Notación. $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ o $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$

Definición 3.5. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador.

1. El *dominio* de T es el conjunto $dom(T) = \{x \in \mathbb{R}^n; T(x) \neq \emptyset\}$
2. La *imagen* de T es el conjunto $R(T) = \bigcup_{x \in dom(T)} T(x)$

Definición 3.6. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ el operador $T^{-1} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es definido por la siguiente relación $x \in T^{-1}(y) \leftrightarrow y \in T(x)$

Definición 3.7. Un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ es llamado *cero* de $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ cuando $0 \in T(\overline{x})$

Definición 3.8. $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, T es llamado *monótono* cuando para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in T(x)$ y $v \in T(y)$ se cumple que

$$\langle x - y, u - v \rangle \geq 0 \tag{13}$$

Observación 3.9. T es estrictamente monótono cuando la desigualdad (13) es estricta para $x \neq y$

Teorema 3.10. Sea $T_1 : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ y $T_2 : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ operadores monótonos tales que $dom(T_1) \bigcap dom(T_2) \neq \phi$, entonces $T_1 + T_2$ es un operador monótono.
Demostración. Vea [1] ■

Ejemplo 3.11. $\partial f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con f una función convexa, propia, semicontinua inferiormente, entonces ∂f es un operador monótono.

Definición 3.12. $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es llamado *operador monótono maximal* cuando

1. T es monótono
2. Para todo T' operador monótono tal que $T(x) \subset T'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $T = T'$.

Teorema 3.13. Sea $T_1 : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ y $T_2 : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ operadores monótonos maximales tales que $dom(T_1) \bigcap (dom(T_2))^0 \neq \phi$

1. Entonces $T_1 + T_2$ es un operador monótono maximal
2. Si T_2 es el subdiferencial de una función convexa propia y cerrada y T_2 es sobreyectiva entonces $T_1 + T_2$ es sobreyectivo

Demostración. Vea [6] ■

Lema 3.14. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ una función convexa semicontinua inferiormente y $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ las siguientes proposiciones son equivalentes

1. $z = x + y$ y $f(x) + f^*(y) = \langle x, y \rangle$
2. $x = prox_f(z)$ y $y = prox_f^*(z)$

Demostración. Vea [6] ■

Ejemplo 3.15. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ una función convexa semicontinua inferiormente, entonces $\partial f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es un operador monótono maximal.

Ejemplo 3.16. Sea C un subconjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^n$ la aplicación $P_C(x) : \mathbb{R}^n \to C$ que asocia a cada $x \in \mathbb{R}^n$ un punto de C mas proximo de x es llamada la proyección de x sobre C, esta aplicación es un ejemplo de un operador monótono maximal que no es subdiferencial de una función convexa semicontinua inferiormente.

El algoritmo del punto proximal para operadores monótonos maximales

En esta sección definimos el algoritmo del punto proximal para operadores monótonos maximales y vamos a analizar su convergencia para lo cual primero consideramos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y semicontinua inferiormente, el algoritmo del punto proximal, genera una sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ de la manera siguiente

$$x_{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|\}$$

donde $\{\lambda_k\}$ es una secesión de números positivos tales que $0 < \lambda_k \leq \overline{\lambda}$ para algún $\overline{\lambda} > 0$ y $\|\cdot\|$ la norma euclidiana, la sucesión converge a una solución del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \tag{14}$$

por el Teorema 2.20 se tiene $0 \in \partial f(x_{k+1}) + 2\lambda_k(x_{k+1} - x_k)$, de aquí $2\lambda_k(x_k - x_{k+1}) \in \partial f(x_{k+1})$, de donde $2\lambda_k x_k \in \partial f(x_{k+1}) + 2\lambda_k x_{k+1}$, es decir $x_k \in (\frac{1}{2\lambda_k}\partial f + I)(x_{k+1})$.
Dado que ∂f es una función convexa, semicontinua inferiormente y es un operador monótono maximal, extendemos el algoritmo del punto proximal para encontrar ceros de operadores monótonos

maximales $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. El algoritmo del punto Proximal para Operadores monótonos maximales (APPOMM) genera la sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ definida así $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_k \in (I + \frac{1}{2\lambda_k}T)(x_{k+1})$ es decir $x_{k+1} \in (I + \frac{1}{2\lambda_k}T)^{-1}(x_k)$ donde λ_k es una sucesión de números positivos tales que $0 < \lambda_k \leq \overline{\lambda}$, donde $\overline{\lambda} > 0$.

Definición 3.17. Una sucesión $\{y_k\}$ sera llamada Fejer convergente en un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ si

$$\|y_{k+1} - c\| \leq \|y_k - c\|, \forall c \in C \tag{15}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclidiana.

Teorema 3.18. Sea $\{y_k\}$ una sucesión Fejer convergente en un conjunto $C \neq \emptyset$, entonces $\{y_k\}$ es limitada y si $\overline{y} \in \{y_k\}$ es punto de acumulación en C entonces $\lim_{k\to\infty} y_k = \overline{y}$
Demostración. Sea $c \in C$ como $\{y_k\}$ es sucesión Fejer convergente en C se tiene que

$$\|y_{k+1} - c\| \leq \|y_k - c\| \leq \cdots \leq \|y_0 - c\|$$

por lo tanto $\{y_k\}$ esta contenida en la bola $B(c, \|y_0 - c\|)$, así se tiene que $\{y_k\}$ es acotada.
Ahora probaremos con las hipótesis que $\lim_{k\to\infty} y_k = \overline{y}$, para lo cual consideramos una subsucesión $\{y_{k_j}\}$ de $\{y_k\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} y_{k_j} = \overline{y}$.
Como $\overline{y} \in C$ y $\{y_k\}$ es Fejer convergente, por la definición (3.21) la sucesión $\{\|y_k - \overline{y}\|\}$ es decreciente y no negativa por lo tanto convergente.
Como la subsucesión $\{\|y_{k_j} - \overline{y}\|\}$ es converge a cero, se sigue que la $\{\|y_k - \overline{y}\|\}$ converge a cero, esto es $\lim_{k\to\infty} \|y_k - \overline{y}\| = 0$. ■

Definición 3.19. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador punto conjunto, decimos que

1. T es sobreyectivo cuando para todo $y \in \mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \in T(x)$
2. T es inyectivo si para $x \neq y$ se tiene $T(x) \cap T(y) = \phi$.

Teorema 3.20. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador monótono maximal y $\lambda > 0$, entonces el operador $I + \lambda T$ es biyectivo.
Demostración. Vea [7] ■

Corolario 3.21. La sucesión $\{x_n\}$ generada por el algoritmo del punto proximal para operadores monótonos maximales esta bien definida.
Demostración. Se sigue del teorema anterior. ■

Lema 3.22. Si $\lim_{k\to\infty} y_k = \overline{y}$ y $\lim_{k\to\infty} z_k = \overline{z}$ es un operador monótono maximal, si $y_k \in T(z_k)$ entonces $\overline{y} \in T(\overline{z})$
Demostración. vea [7] ■

Lema 3.23. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador monótono maximal y $C = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 \in T(x)\}$ no vacío, entonces la sucesión generada por el algoritmo del punto proximal satisface la desigualdad $\|x_{k+1} - \overline{x}\|^2 \leq \|x_k - \overline{x}\|^2 - \|x_{k+1} - x_k\|^2$
Demostración. Sea $\overline{x} \in U$, entonces

$$\begin{aligned} \|x_k - x\|^2 &= \|(x_k - x_{k+1}) + (x_{k+1} - \overline{x})\|^2 \\ &= \|x_k - x_{k+1}\|^2 + \|x_{k+1} - \overline{x}\|^2 + 2\langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - \overline{x}\rangle \end{aligned}$$

se tiene $\|x_k - x\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_{k+1} - \overline{x}\|^2 = 2\frac{1}{\lambda_k}\langle \lambda_k(x_k - x_{k+1}), x_{k+1} - \overline{x}\rangle$
como $x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{\lambda_k}T\right)^{-1}(x_k)$ se tiene $\lambda_k(x_k - x_{k+1}) \in T(x_{k+1})$
como $0 \in T(\overline{x})$ y como T es monótono tenemos

$$\langle \lambda_k(x_k - x_{k+1}), x_{k+1} - \overline{x}\rangle = \langle \lambda_k(x_k - x_{k+1}) - 0, x_{k+1} - \overline{x}\rangle \geq 0$$

por lo tanto

$$\|x_k - \overline{x}\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_{k+1} - \overline{x}\|^2 \geq 0$$

luego

$$\|x_{k+1} - \overline{x}\|^2 \leq \|x_k - \overline{x}\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2, \forall \overline{x} \text{ tal que } 0 \in T(\overline{x})$$

■

Lema 3.24. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ monótono maximal y el conjunto no vacío $C = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 \in T(x)\}$, entonces $\lim_{k\to\infty}(x_{k+1} - x_k) = 0$ donde $\{x_k\}$ está generada por el algoritmo del punto proximal para operadores monótonos maximales.
Demostración. La demostración se sigue del Lema 3.23. ■

Lema 3.25. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ monótono maximal y el conjunto no vacío $C = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 \in T(x)\}$ entonces $\{x_k\}$ generada por el algoritmo del punto proximal para operadores monótonos maximales posee puntos de acumulación y todos pertenecen a U
Demostración. Para la demostración se aplica el Lema 3.23 y el Teorema 3.18 ■

Teorema 3.26. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ monótono maximal y el conjunto no vacío $C = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 \in T(x)\}$, entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por el algoritmo del punto proximal para operadores monótonos maximales converge a un elemento de U .
Demostración. Por el Lema 3.23 $\{x_k\}$ es Fejer convergente en C, por el Teorema 3.18 es limitada. Sea $\overline{x}$ punto de acumulación de x_k por el Lema 3.25, $\overline{x} \in C$ por lo tanto por el Teorema 3.18 se tiene $\lim_{k\to\infty} x_k = \overline{x}$ así se tiene que $\{x_k\}$ converge a un elemento de C. ■

El algoritmo del Punto Proximal para problemas de desigualdades variacionales

Dado el problema

$$\min\{f(x) \text{ para } x \in A\} \tag{16}$$

Donde A es un conjunto convexo y cerrado, extender el problema a operadores monótonos se llama problema de desigualdad variacional.

Definición 3.27. Dados $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador monótono maximal y sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y cerrado, el *problema de desigualdad variacional* consiste en encontrar $z \in A$ tal que existe $u \in T(x)$ satisfaciendo

$$\langle u, x - z\rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in A \tag{17}$$

Teorema 3.28. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un operador monótono maximal, consideramos el problema de desigualdad variacional donde $A \subset \mathbb{R}$ es convexo y cerrado tal que $dom(T) \neq \phi$, el problema de desigualdad posee solución, $0 < \lambda_k \leq \overline{\lambda}$ y T es paramonótono entonces la sucesión generada por x_k converge hacia una solución del problema de desigualdad variacional.
Demostración. La demostración se sigue del Teorema 3.26 ■

4 Conclusiones

Se revisó el método del punto proximal el cual se planteo para problemas de operadores monótonos maximales luego para problemas de desigualdad variacional y comprobamos que la sucesión $\{x_k\}$ converge a una solución cuando esta exista, pensamos que abre la posibilidad a que se propongan otros métodos y algoritmos alternativos al método del punto proximal como la transformada de Goebel o la transformada de Mofatt para atacar este problema y hacer un estudio comparativo.

Referencias Bibliográficas

[1] Iusem,A.N. *Métodos de ponto Proximal em otimization*, 20 Coloquio brasileiro de Matemática, Impa Rio de Janeiro, 1995.

[2] Izmailov, A,Zolodov. *Otimizacao*, Impa volumen I Rio de Janeiro, 2015.

[3] Goebel, Lucet, Bauschke. *The proximal average, basic theory.* Siam, vol19, No2, pp 766-785, 2008.

[4] Moffat, S. *On the kernel average for n functions.* Thesis submited in partial fulfillment of the requirement for the degree pf master of science. The University of Columbia, 2009.

[5] Rockafellar, R.T. *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970.

[6] Rockafellar, R.T.Roger J.B Wets. *Variational analysis*, Springer-Verlag, 1997.

[7] Rockafellar, R.T. *Monotone operator and the proximal point algorithm* , Siam Journal on control and optimization, 1976.