PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. X N°2, pp 67 - 80, LIMA - PERÚ. Noviembre 2007

Singularidad de Soluciones para una Ecuación de Kirchhoff no lineal viscoelástica con término disipativo

Teófanes Quispe Méndez[1]
tquispem@unmsm.edu.pe

Resumen

En el presente trabajo, estudiamos la singularidad en tiempo finito de las soluciones del problema mixto para un tipo de ecuación de Kirchhoff no lineal viscoeláctica con término disipativo.

Palabras Clave: *Singularidad de soluciones, Solución Local, Ecuación de Kirchhoff no lineal viscoelástica, Ecuación integro-diferencial.*

Abstract

In present work, we study the blow-up infinite time of solutions to the mixed problem for a type of viscoelastic nonlinear Kirchhoff's equation with dissipative term.

Keywords: *Blow-up of solutions, Local solution, Viscoelastic nonlinear Kirchhoff's equation, Integro-differential equation.*

1. Introducción

En este artículo consideramos el siguiente problema de valores iniciales y frontera

$$\begin{array}{ll} u_{tt} + \alpha(x)u_t - \beta\Delta u_t - M\left(_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u & \\ \qquad\qquad +_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds = f(u) & , x \in \Omega, t \geq 0, \\ u = 0 & , x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & , x \in \Omega, \end{array} \tag{1.1}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera bien regular $\partial\Omega$, ∇ es el gradiente, Δ el operador laplaciano, β es una constante positiva, $\alpha(x)$ es una función real para $x \in \Omega$, $M(s)$ función real positiva para $s \geq 0$, $g(t)$ función real continua no negativa para $t \geq 0$ y $f(s)$ función real no lineal para $s \in \mathbb{R}$.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima - Perú.

El caso $n = 1$, el problema (1,1) describe las vibraciones transversales no lineales de una cuerda de material viscoelástica, fuertemente tensa entre dos puntos fijos $x = 0$ y $x = L$, en el eje x del plano xu. La ecuación resultante es

$$\begin{aligned} \rho h u_{tt} + \alpha(x)u_t - \beta\Delta u_t - \left(p_o + \frac{Eh}{2L}{}_0^L |u_x|^2\, dx\right) u_{xx} & \\ +{}_0^t\, g(t-s)u_{xx}(s)ds = f\,(u)\,, & \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $u = u\,(x,t)$ es el desplazamiento transversal en el espacio de coordenada x y en el tiempo t, ρ es la densidad de masa, h el área de la sección transversal de la cuerda, p_0 es la tensión inicial, E el módulo de Young del material, $\alpha(x)$ y β son los coeficientes de las fuerzas amortiguadoras, $g(t)$ la función de relajación, y $f\,(u)$ la fuerza restauradora. Cuando $\alpha \equiv \beta \equiv g \equiv 0$ y la cuerda de material elástica, la ecuación (1,2) fué propuesto y estudiado primero por Kirchhoff [5]. El caso general $n \geq 1$, la ecuación en (1,1) tiene diversas aplicaciones, como en el área de la óptica no lineal, física del plasma, mecánica de fluidos, etc.

Cuando g es una función no trivial y $M \equiv 1$, la ecuación en (1,1) fue investigado desde diferentes puntos de vista por diversos autores y la referencia citado por ellos $[1, 2, 4, 9, 10, 14]$. Para $\beta \equiv 0$ y $\alpha(x)$ no nulo en una parte del dominio Ω, Cavalcanti et al. [4], obtuvieron el decaimiento exponencial de las soluciones. Para $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ y $f(u) = |u|^\gamma u$ con $\gamma > 0$, Berrimi and Messaoudi [2] obtuvieron la existencia y el decaimiento de las soluciones, y Wu [14] obtiene la singularidad de las soluciones con modificación del método directo. Cuando g es una función no trivial, M es una función no constante, $\alpha \equiv 0$ y $\beta \equiv 1$, recientemente, Wu and Tsai [15] estudiaron la existencia, el decaimiento exponencial y la singularidad de las soluciones. También cuando $\alpha(x,t)$ y $\beta(t)$ son funciones no triviales en ciertos espacios, Quispe Méndez [13] obtiene la solución local del problema (1,1).

En este trabajo probaremos la propiedad de singularidad en tiempo finito de las soluciones del problema (1,1) con energía inicial no positiva y positiva restingida, por el método directo $[7, 8, 15]$.

2. Preliminares

En esta sección daremos algunas notaciones, conceptos y lemas sin demos- tración que serán utilizados en el desarrollo del presente trabajo.

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera bien regular $\partial\Omega$. Denotamos el producto interno y la norma de $L^2\,(\Omega)$ y $L^p\,(\Omega)$, con $(.,.)$ y $|\cdot|_p$, respectivamente, para $1 \leq p \leq \infty$. Además $((.,.))$ y $\|.\|$, denotaran el producto interno y la norma de $H_0^1\,(\Omega)$, donde $((u,v)) :=_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx$ es la forma de Dirichlet.

Sea X un espacio de Banach, $0 < T \leq \infty$ y $1 \leq p \leq \infty$. Representamos con $L^p\,(0,T;X)$ al espacio de Banach de las funciones vectoriales $u :]0,T[\longrightarrow X$ tales que son medibles y

$\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$, con la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup_{0<t<T} \text{ess} \, \|u(t)\|_X \ , \quad p = \infty.$$

Similarmente, cuando $0 < T \leq \infty$, representaremos con $C([0,T[\,;X)$ al espacio de las funciones continuas $u : [0,T[\longrightarrow X$.

Denotamos $v' := v_t$, $v'' := v_{tt}$, $v(t)(x) := v(x,t)$ y $L^\infty := L^\infty(\Omega)$.

Hipótesis. Imponemos sobre las funciones reales $\alpha(x)$, $g(t)$, $M(s)$ y $f(s)$ las siguientes condiciones para la existencia local:

$(H1)$ $\alpha \in L^\infty(\Omega)$.

$(H2)$ $g \in C^1([0,\infty[)$, acotada, $g(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$,

$$m_0 - \int_0^\infty g(s)ds := l > 0,$$

donde m_0 es una constante positiva, y existen constantes positivas C_1 y C_2 tal que

$$-C_1 g(t) \leq g'(t) \leq -C_2 g(t), \ \forall t \geq 0.$$

$(H3)$ $M \in C^1([0,\infty[)$ y $M(s) \geq m_0 > 0$, $\forall s \geq 0$.

$(H4)$ $f(0) = 0$ y existe una constante positiva K tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|\left(|x|^{p-2} + |y|^{p-2}\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

con $2 \leq p \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$ para $n \geq 3$ o $p \geq 2$ para $n \leq 2$.

Imponemos sobre las funciones $\alpha(x)$, $g(t)$, $M(s)$ y $f(s)$ las siguientes condiciones adicionales para la singularidad de soluciones:

$(H5)$ $\alpha(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$.

$(H6)$ $(2\gamma+1)\widehat{M}(s) \geq (M(s) + 2\gamma m_0)\, s$, $\forall s \geq 0$, donde γ es una constante positiva y $\widehat{M}(s) := \int_0^s M(\xi)\, d\xi$.

$(H7)$ $f(s)\, s \geq 2(2\gamma+1) F(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, donde $F(s) := \int_0^s f(\xi)\, d\xi$.

$(H8)$ $(4\gamma+1)\int_0^\infty g(s)ds < 4\gamma m_0$.

Lema 2.1 (Desigualdad de Sobolev-Poincaré [3]). *Si $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ para $n \geq 3$ o $p \geq 2$ para $n \leq 2$, entonces existe una constante positiva B_1 tal que*

$$|u|_p \leq B_1 \|u\|, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Lema 2.2. *Si $g \in C^1([0,\infty[)$ y $w \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$, entonces*

$$\begin{aligned} {}_0^t g(t-s)(w(s),w'(t))\,ds &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g\Box w)(t) - \left({}_0^t g(s)ds\right)|w(t)|_2^2\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}g(t)|w(t)|_2^2 + \frac{1}{2}(g'\Box w)(t), \end{aligned}$$

donde

$$(v\Box w)(t) :={}_0^t\, v(t-s)\,|w(t)-w(s)|_2^2\,ds.$$

Demostración. Diferenciando el término $g\Box w$, se obtiene el resultado. □

Definición 2.3. Una función $u : \Omega \times [0,T_{\text{máx}}[\to R$ es llamada solución del problema (1,1) sobre $[0,T_{\text{máx}}[$ si satisface las condiciones $(1{,}1)_2 - (1{,}1)_3$ y la igualdad

$$\begin{aligned} &u_{tt} + \alpha(x)u_t - \beta\Delta u_t - M\left({}_\Omega|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u \\ &\qquad + {}_0^t\, g(t-s)\Delta u(s)ds = f(u) \quad \text{en} \quad L^2(0,T_{\text{máx}};H^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Teorema 2.4

Theorem 2.1 ***(Existencia Local*** **[13]*)*.** Supongamos que las funciones α, g, M y f satisfacen las hipótesis $(H1),(H2),(H3)$ y $(H4)$, respectivamente, y que $u_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$. Entonces existe un único intervalo $[0,T_{\text{máx}}[$ con $0 < T_{\text{máx}} \leq \infty$ y el problema (1,1) admite una única solución u sobre $[0,T_{\text{máx}}[$ tal que

$$\begin{aligned} &u \in C\left([0,T_{\text{máx}}[\,;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right), \\ &u' \in C\left([0,T_{\text{máx}}[\,;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T_{\text{máx}};H_0^1(\Omega)\right), \\ &u'' \in L^2\left(0,T_{\text{máx}};H^{-1}(\Omega)\right). \end{aligned}$$

Observación 2.5. Supongamos que la función α satisface

$$\alpha \in L^2(0,\infty;L^\infty(\Omega))$$

y β sea una función que satisface

$$\beta \in C([0,\infty[)\,,\ \beta' \in L^1(0,\infty) \ \ y \ \beta(t) \geq \beta_0 > 0, \ \forall t \geq 0,$$

donde β_0 es una constante. Entonces se obtiene el mismo resultado del Teorema 2.4. Ver por ejemplo, Quispe Méndez [13].

Lema 2.6 ([7]). *Sea $\gamma > 0$ y sea $B \in C^2([0,\infty[)$ una función no negativa que satisface*

$$B''(t) - 4(\gamma+1)B'(t) + 4(\gamma+1)B(t) \geq 0.$$

Si $B'(0) > r_2 B(0) + K_0$, entonces $B'(t) > K_0$, para $t > 0$, donde K_0 es una constante y

$$r_2 := 2(\gamma+1) - 2\sqrt{(\gamma+1)\gamma}$$

es la menor raíz de la ecuación cuadrática $r^2 - 4(\gamma+1)r + 4(\gamma+1) = 0$.

Lema 2.7 ([7]). *Si $J(t)$ es una función no creciente en $[t_0,\infty[$, $t_0 \geq 0$ y satisface la inecuación diferencial*

$$[J'(t)]^2 \geq a + b[J(t)]^{2+\frac{1}{\gamma}}, \quad \textit{para } t \geq t_0,$$

donde $a > 0$, $\gamma > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces existe un número real positivo T_* tal que $\lim\limits_{t\to T_*^-} J(t) = 0$ y una cota superior de T_* puede ser estimado, respectivamente, en los siguientes casos:

(*i*) *Si $b < 0$ y $J(t_0) < \min\left\{1, \sqrt{\frac{a}{-b}}\right\}$, entonces*

$$T_* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{a}{-b}}}{\sqrt{\frac{a}{-b}} - J(t_0)}\right).$$

(*ii*) *Si $b = 0$, entonces*

$$T_* \leq t_0 + \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}.$$

(*iii*) *Si $b > 0$, entonces*

$$T_* \leq \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}$$

o

$$T_* \leq t_0 + 2^{\frac{3\gamma+1}{2\gamma}} \frac{\gamma c}{\sqrt{a}} \left(1 - [1 + cJ(t_0)]^{-\frac{1}{2\gamma}}\right),$$

donde $c := \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}$.

3. El resultado principal

El objetivo central del presente trabajo es discutir la propiedad de singularidad en tiempo finito de las soluciones del problema (1,1) sobre un intervalo maximal $[0, T_{\text{máx}}[$.

Definición 3.1. Una solución u del problema (1,1) sobre $[0, T_{\text{máx}}[$ tiene la propiedad de explosión o singularidad en tiempo finito, si

$$T_{\text{máx}} < \infty \ \text{ y } \lim_{t\to T_{\text{máx}}^-} \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\, dx = \infty.$$

Definición 3.2. La función energía $E(t)$ del problema (1,1), se define por

$$\begin{aligned} E(t) &:= \tfrac{1}{2}\left|u'(t)\right|_2^2 + \tfrac{1}{2}\widehat{M}\left(\left\|u(t)\right\|^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(g\Box\nabla w\right)(t) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\left\|u(t)\right\|^2 - \int_\Omega F\left(u(x,t)\right)dx, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

donde

$$\widehat{M}(s) := \int_0^s M(\xi)\,d\xi \ \text{ y } \ F(s) := \int_0^s f(\xi)\,d\xi.$$

Lema 3.3. *Supongamos que se cumplen las hipótesis $(H1)-(H8)$. Si u es una solución del problema (1,1) sobre $[0, T_{\text{máx}}[$ con datos iniciales $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$, entonces*

$$\begin{aligned} &E(t) + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds + \beta\int_0^t \left\|u'(s)\right\|^2 ds \\ &+ \tfrac{1}{2}\int_0^t g(s)\left\|u(s)\right\|^2 ds - \tfrac{1}{2}\int_0^t \left(g'\Box\nabla u\right)(s)\,ds = E(0), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $E(0)$ es la energía inicial definida por

$$E(0) := \frac{1}{2}\left|u_1\right|_2^2 + \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\left\|u_0\right\|^2\right) - \int_\Omega F\left(u_0(x)\right)dx.$$

Demostración. Multiplicando a la ecuación $(1,1)_1$ por u_t, integrando sobre Ω , aplicando el teorema de la divergencia y el Lema 2.2 , obtenemos

$$\begin{aligned} &E'(t) + \left|\sqrt{\alpha}u'(t)\right|_2^2 + \beta\left\|u'(t)\right\|^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}g(t)\left\|u(t)\right\|^2 - \tfrac{1}{2}\left(g'\Box\nabla u\right)(t) = 0. \end{aligned}$$

De aqui, se obtiene el resultado. $\Box$

Definición 3.4. Para una solución u del problema (1,1) sobre $[0, T_{\text{máx}}[$, se define la función explosión

$$A(t) := \left|u(t)\right|_2^2 + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha}u(s)\right|_2^2 ds + \beta\int_0^t \left\|u(s)\right\|^2 ds, \quad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Lema 3.5. *Supongamos que se cumplen las hipótesis $(H1)-(H8)$. Si u es una solución del problema (1,1) sobre $[0, T_{\text{máx}}[$ con datos iniciales $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$, entonces*

$$\begin{aligned} &A''(t) - 4(\gamma+1)\Big[\left|u'(t)\right|_2^2 +_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds \\ &+ \beta_0^t \left\|u'(s)\right\|^2 ds\Big] \geq -4(2\gamma+1)E(0). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Demostración. Por diferenciación de (3,2), se tiene

$$A'(t) = 2\left(u'(t), u(t)\right) + \left|\sqrt{\alpha}u(t)\right|_2^2 + \beta\left\|u(t)\right\|^2. \tag{3.4}$$

Diferenciando (3,4), utilizando la ecuación $(1{,}1)_1$ y el teorema de la divergencia, se obtiene

$$\begin{aligned} A''(t) &= 2\left|u'(t)\right|_2^2 - 2M\left(\|u(t)\|^2\right)\|u(t)\|^2 + 2\left(f\left(u(t)\right), u(t)\right) \\ &\quad +2_0^t g(t-s)\left((u(s),u(t))\right)ds.3{,}5 \end{aligned} \tag{1}$$

Por (3,1), se obtiene de (3,5)

$$\begin{aligned} & A''(t) - 4(\gamma+1)\Big[\left|u'(t)\right|_2^2 + \textstyle\int_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds \\ & + \beta \textstyle\int_0^t \|u'(s)\|^2 ds\Big] = -4(2\gamma+1)E(0) \\ & \qquad + 2\textstyle\int_\Omega \left[f(u)u - 2(2\gamma+1)F(u)\right]dx \\ & \qquad + 2(2\gamma+1)\widehat{M}\left(\|u(t)\|^2\right) \\ & \qquad - \left[2M\left(\|u(t)\|^2\right) + 2(2\gamma+1)\textstyle\int_0^t g(s)\,ds\right]\|u(t)\|^2 \\ & \qquad + 2\textstyle\int_0^t g(t-s)\left((u(s),u(t))\right)ds \\ & \qquad - 2(2\gamma+1)\textstyle\int_0^t \left(g'\Box\nabla u\right)(s)\,ds \\ & \qquad + 2(2\gamma+1)\textstyle\int_0^t g(s)\|u(s)\|^2 ds + 2(2\gamma+1)\left(g\Box\nabla u\right)(t) \\ & \qquad + 4\gamma\textstyle\int_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds + 4\gamma\beta\textstyle\int_0^t \|u'(s)\|^2 ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Young, se tiene

$$\begin{aligned} 2_0^t g(t-s)\left((u(s),u(t))\right)ds &= 2_0^t g(t-s)\left((u(s)-u(t), u(t))\right)ds \\ &\quad +2\left({}_0^t g(s)\,ds\right)\|u(t)\|^2 \\ &\geq -\left[\left(g\Box\nabla u\right)(t) + \left({}_0^t g(s)\,ds\right)\|u(t)\|^2\right] \\ &\quad +2\left({}_0^t g(s)\,ds\right)\|u(t)\|^2 \\ &= \left({}_0^t g(s)\,ds\right)\|u(t)\|^2 - \left(g\Box\nabla u\right)(t).3{,}7 \end{aligned} \tag{2}$$

Por las hipótesis y (3,7), se obtiene de (3,6) el resultado (3,3). □

Lema 3.6. *Supongamos que se cumplen las hipótesis $(H1)-(H8)$. Si u es una solución del problema (1,1) sobre $[0, T_{\text{máx}}[$ con datos iniciales $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$, y satisfaciendo una de las siguientes condiciones:*

(*i*) $E(0) < 0$,

(*ii*) $E(0) = 0$ *y* $A'(0) > K_0$,

(*iii*) $E(0) > 0$ *y* $A'(0) > r_2\left[A(0) + \dfrac{K_1}{4(\gamma+1)}\right] + K_0$,

donde

$$K_0 := \left|\sqrt{\alpha}u_0\right|_2^2 + \beta\|u_0\|^2,$$

$$A(0) := |u_0|_2^2\ , \quad A'(0) := 2(u_1,u_0) + K_0,$$

$$K_1 := 4(2\gamma+1)E(0) + 4(\gamma+1)K_0,$$

$$r_2 := 2(\gamma+1) - 2\sqrt{(\gamma+1)\gamma},$$

entonces

$$A'(t) > K_0, \quad \textit{para } t > t_0, \tag{3.8}$$

donde $t_0 := \text{máx}\left\{\frac{A'(0)-K_0}{4(1+2\gamma)E(0)}, 0\right\}$ *en el caso* (i) *y* $t_0 := 0$ *en los casos* (ii) *y* (iii).

Demostración. Consideremos tres casos de acuerdo al signo de la energía inicial $E(0)$.

(i) Si $E(0) < 0$, de (3,3), se tiene

$$A''(t) \geq -4(2\gamma+1)E(0)$$

y por integración, resulta

$$A'(t) \geq A'(0) - 4(2\gamma+1)E(0)t, \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Considerando $A'(0) - K_0 - 4(2\gamma+1)E(0)t > 0$, se obtiene

$$A'(t) > K_0, \quad \text{para } t > t_0,$$

donde

$$t_0 := \text{máx}\left\{\frac{A'(0)-K_0}{4(1+2\gamma)E(0)}, 0\right\}.$$

(ii) Si $E(0) = 0$, de (3,3), se tiene

$$A''(t) \geq 0$$

e integrando, resulta

$$A'(t) \geq A'(0), \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Considerando $A'(0) - K_0 > 0$, se obtiene

$$A'(t) > K_0, \quad \text{para } t > 0.$$

(iii) Para $E(0) > 0$. Primero notemos que se cumple

$$2_0^t (\alpha u'(s), u(s))\, ds = \left|\sqrt{\alpha}u(t)\right|_2^2 - \left|\sqrt{\alpha}u_0\right|_2^2 \tag{3.9}$$

y

$$2_0^t ((u'(s), u(s)))\, ds = \|u(t)\|^2 - \|u_0\|^2. \tag{3.10}$$

Usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Young de (3,9) y (3,10), se obtiene

$$\left|\sqrt{\alpha}u(t)\right|_2^2 \leq \left|\sqrt{\alpha}u_0\right|_2^2 + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha}u(s)\right|_2^2 ds + \int_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds \tag{3.11}$$

y

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \int_0^t \|u(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u'(s)\|^2 ds. \tag{3.12}$$

Nuevamente usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Young en (3,4) y por (3,11) – (3,12), resulta

$$\begin{aligned} A'(t) &\leq A(t) + K_0 + |u'(t)|_2^2 \\ &+_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds + \beta_0^t \|u'(s)\|_2^2 ds.3{,}13 \end{aligned} \tag{3}$$

De (3,3) y (3,13), obtenemos

$$A''(t) - 4(\gamma+1) A'(t) + 4(\gamma+1) A(t) + K_1 \geq 0,$$

donde

$$K_1 := 4(2\gamma+1) E(0) + 4(\gamma+1) K_0.$$

Definamos la función

$$B(t) := A(t) + \frac{K_1}{4(\gamma+1)}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Considerando $B'(0) > r_2 B(0) + K_0$, la función B satisface las condiciones del Lema 2.6. Asi se tiene $A'(t) > K_0$, para $t > 0$. Con esto se concluye la prueba del Lema 3.6. □

Definición 3.7. Para las estimativas del tiempo finito de la función explosión A, definamos la función

$$J(t) := [A(t) + (T_1 - t) K_0]^{-\gamma}, \quad \text{para } t \in [0, T_1], \tag{3.14}$$

donde T_1 es una constante positiva que será determinada mas tarde.

Teorema 3.8 (Singularidad de Soluciones). *Supongamos que se cumplen las hipótesis $(H1) - (H8)$. Si u es una solución del problema (1,1) sobre $[0, T_{\text{máx}}[$ con datos iniciales $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$, y satisfaciendo una de las siguientes condiciones:*

(*i*) $E(0) < 0$,

(*ii*) $E(0) = 0$ *y* $A'(0) > K_0$,

(*iii*) $0 < E(0) < \dfrac{[A'(0) - K_0]^2}{8[A(0) + T_1 K_0]}$ *y* $A'(0) > r_2 \left[A(0) + \dfrac{K_1}{4(\gamma+1)}\right] + K_0$,

entonces $T_{\text{máx}} < \infty$ *y* $\lim\limits_{t \to T_{\text{máx}}^-} \|u(t)\|^2 = \infty$. *Además el tiempo finito* $T_{\text{máx}}$ *es estimado, en el caso* (*i*),

$$T_{\text{máx}} \leq t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)}. \tag{3.15}$$

Además, si $J(t_0) \leq \text{mín}\left\{1, \sqrt{\frac{a}{-b}}\right\}$, *entonces*

$$T_{\text{máx}} \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{a}{-b}}}{\sqrt{\frac{a}{-b}} - J(t_0)} \right). \tag{3.16}$$

En el caso (ii),

$$T_{\text{máx}} \leq t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)} \tag{3.17}$$

o

$$T_{\text{máx}} \leq t_0 + \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}}. \tag{3.18}$$

En el caso (iii),

$$T_{\text{máx}} \leq \frac{J(t_0)}{\sqrt{a}} \tag{3.19}$$

o

$$T_{\text{máx}} \leq t_0 + 2^{\frac{3\gamma+1}{2\gamma}} \frac{\gamma c}{\sqrt{a}} \left\{1 - [1 + cJ(t_0)]^{-\frac{1}{2\gamma}}\right\}, \tag{3.20}$$

donde $a := \gamma^2 [J(t_0)]^{\frac{2}{\gamma}+2} \left[[A'(t_0) - K_0]^2 - 8E(0)[J(t_0)]^{\frac{-1}{\gamma}}\right]$, $b := 8\gamma^2 E(0)$ *y* $c := \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma+2}}$.

En el caso (i), $t_0 := \text{máx}\left\{\frac{A'(0)-K_0}{4(1+2\gamma)E(0)}, 0\right\}$ *y* $t_0 := 0$ *en los casos* (ii) *y* (iii).

Demostración. Por diferenciación de (3,14), resulta

$$J'(t) = -\gamma [J(t)]^{\frac{1}{\gamma}+1} [A'(t) - K_0] \tag{3.21}$$

y

$$J''(t) = -\gamma [J(t)]^{\frac{2}{\gamma}+1} V(t), \tag{3.22}$$

donde

$$V(t) := A''(t)[A(t) + (T_1 - t)K_0] - (\gamma+1)[A'(t) - K_0]^2.$$

Por $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$, (3,9) $-$ (3,10) y la desigualdad de Hölder, de (3,4), resulta

$$\begin{aligned}[A'(t) - K_0]^2 \; &\leq \; 4[A(t) + (T_1 - t)K_0]\Big[|u'(t)|_2^2 \\ &+ {}_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds + \beta_0^t \|u'(s)\|_2^2 ds\Big] .3,23 \end{aligned} \tag{4}$$

De (3,22) y (3,23), se tiene

$$J''(t) \leq -\gamma [J(t)]^{\frac{1}{\gamma}+1} K(t), \tag{3.24}$$

donde

$$K(t) := A''(t) - 4(\gamma+1)\left[|u'(t)|_2^2 + {}_0^t \left|\sqrt{\alpha}u'(s)\right|_2^2 ds + \beta_0^t \|u'(s)\|^2 ds\right].$$

Por (3,3) y (3,24), resulta

$$J''(t) \leq 4\gamma(2\gamma+1)E(0)[J(t)]^{\frac{1}{\gamma}+1}, \quad \text{para } t \geq t_0. \tag{3.25}$$

De (3,8) y (3,21), se tiene

$$J'(t) < 0, \quad \text{para } t > t_0. \tag{3.26}$$

Multiplicando (3,25) por $J'(t)$ y luego integrando de t_0 a t, se obtiene

$$[J'(t)]^2 \geq a + b\,[J(t)]^{2+\frac{1}{\gamma}}, \quad \text{para } t \geq t_0, \tag{3.27}$$

donde

$$\begin{aligned} a &:= [J'(t_0)]^2 - 8\gamma^2 E(0)\,[J(t_0)]^{\frac{1}{\gamma}+2} \\ &= \gamma^2\,[J(t_0)]^{\frac{2}{\gamma}+2}\left[[A'(t_0) - K_0]^2 - 8E(0)\,[J(t_0)]^{\frac{-1}{\gamma}}\right] \end{aligned}$$

y

$$b := 8\gamma^2 E(0).$$

Observemos que $a > 0$ si y solo si $E(0) < \dfrac{[A'(t_0) - K_0]^2}{8\,[A(t_0) + (T_1 - t_0)\,K_0]}$.

Por (3,26) y (3,27), la función J satisface las condiciones del Lema 2.7. Entonces existe un tiempo finito T_* tal que $\lim\limits_{t\to T_*^-} J(t) = 0$ y la cota superior de T_* son estimados respectivamente de acuerdo al signo de la energía inicial $E(0)$.

El caso particular en el que $E(0) < 0$, por (3,25) y (3,26), se tiene que la función $J(t)$ es decreciente y cóncava hacia abajo para $t \geq t_0$. Asi, la gráfica de $J(t)$ esta debajo de cualquier tangente, y se obtiene directamente $\lim\limits_{t\to T_*^-} J(t) = 0$ y la estimativa (3,15). Este es el argumento de la concavidad de Levine [6].

Obsevar que las estimativas (3,17) y (3,18) son equivalentes.

Desde que $[0, T_{\text{máx}}[$ es el intervalo maximal de las soluciones del problema (1,1), resulta que $T_{\text{máx}} = T_*$. También por $\lim\limits_{t\to T_{\text{máx}}^-} J(t) = 0$, se obtiene

$$\lim_{t\to T_{\text{máx}}^-} A(t) = \infty.$$

De aqui y la desigualdad de Sobolev-Poincaré, se deduce

$$\lim_{t\to T_{\text{máx}}^-} \|u(t)\|^2 = \infty.$$

Con todo esto se concluye la demostración del Teorema 3.8. □

Observación 3.9. La selección de T_1 de (3,14) es posible escoger con algunas condiciones. Veamos tres casos de acuerdo al signo de la energía inicial $E(0)$.

(a) *Para el caso* $E(0) = 0$.

Por la condición $A'(0) > K_0$, resulta $(u_1, u_0) > 0$ y $t_0 = 0$. Por (3,17), escogemos

$$T_1 \geq \frac{A(0) + T_1\,[|\alpha|_{L^\infty} B_1^2 + \beta]\,\|u_0\|^2}{\gamma\,[A'(0) - K_0]} \geq \frac{A(0) + T_1 K_0}{\gamma\,[A'(0) - K_0]} = -\frac{J(0)}{J'(0)},$$

donde B_1 es la constante de la desigualdad de Sobolev-Poincaré. Entonces, aplicando la desigualdad de Hölder, desigualdad de Sobolev-Poincaré y la desigualdad de Young, resulta

$$A(0) + T_1\left[|\alpha|_{L^\infty} B_1^2 + \beta\right]\|u_0\|^2 \leq \gamma T_1\left[\varepsilon B_1^2\,\|u_0\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,|u_1|_2^2\right],$$

donde ε es cualquier constante positiva. Escogiendo $\varepsilon = \frac{|\alpha|_{L^\infty} B_1^2+\beta}{\gamma B_1^2}$, tenemos

$$T_1 \geq \frac{\left[|\alpha|_{L^\infty} B_1^2 + \beta\right] A(0)}{\gamma^2 B_1^2 |u_1|_2^2}.$$

En particular, podemos tomar

$$T_1 = \frac{\left[|\alpha|_{L^\infty} B_1^2 + \beta\right] |u_0|_2^2}{\gamma^2 B_1^2 |u_0|_2^2}.$$

(b) *Para el caso* $E(0) < 0$.

Tenemos $A(0) > 0$. También por el argumento de la concavidad de Levine, resulta $A'(0) - K_0 \neq 0$. Ahora veamos dos casos de acuerdo al signo de $A'(0) - K_0$.

$b_1)$ Si $A'(0) > K_0$, entonces $(u_1, u_0) > 0$ y $t_0 = 0$. Por (3,15), podemos escoger T_1 como en el caso (a).

$b_2)$ Si $A'(0) < K_0$, entonces $(u_1, u_0) < 0$ y $t_0 = \frac{(u_1,u_0)}{2(1+2\gamma)E(0)}$. Por (3,15), escogemos T_1 que resuelva la inecuación

$$T_1 \geq t_0 + \frac{A(t_0) + (T_1 - t_0) K_0}{\gamma\left[A'(t_0) - K_0\right]}.$$

(c) *Para el caso* $E(0) > 0$.

Definamos las siguientes constantes positivas:

$$\kappa_1 := \frac{(\gamma+1)\left[A'(0) - r_2 A(0) - (r_2+1) K_0\right]}{r_2(2\gamma+1)},$$

$$\kappa_2 := \frac{\left[\left[A'(0) - K_0\right]^2 - 1\right]\left[\gamma - K_0\right]}{8\gamma A(0)},$$

$$\kappa_3 := \frac{A(0)}{\gamma - K_0},$$

$$\kappa_4 := \frac{\left[A'(0) - K_0\right]^2 - 8E(0) A(0) - 1}{8E(0) K_0}.$$

Entonces, resultan las siguientes equivalencias:

$$A'(0) > r_2\left[A(0) + \frac{K_1}{4(\gamma+1)}\right] + K_0 \Longleftrightarrow E(0) < \kappa_1, \tag{3.28}$$

$$\kappa_3 \leq \kappa_4 \Longleftrightarrow E(0) \leq \kappa_2. \tag{3.29}$$

Ahora hallemos la constante positiva T_1. Primero observemos las siguientes equivalencias con T_1:

$$E(0) < \frac{\left[A'(0) - K_0\right]^2}{8\left[A(0) + T_1 K_0\right]} \Longleftrightarrow T_1 < \frac{\left[A'(0) - K_0\right]^2 - 8E(0) A(0)}{8E(0) K_0}, \tag{3.30}$$

$$T_1 \leq \kappa_4 \Longleftrightarrow E(0) \leq \frac{[A'(0) - K_0]^2 - 1}{8[A(0) + T_1 K_0]}, \tag{3.31}$$

$$\frac{A(0) + T_1 K_0}{\gamma} \leq T_1 \Longleftrightarrow \kappa_3 \leq T_1, \tag{3.32}$$

$$\frac{1}{\sqrt{[A'(0) - K_0]^2 - 8E(0)[A(0) + T_1 K_0]}} \leq 1 \Longleftrightarrow T_1 \leq \kappa_4. \tag{3.33}$$

Por (3,19), debemos escoger T_1 que resuelva la inecuación

$$\frac{A(0) + T_1 K_0}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{[A'(0) - K_0]^2 - 8E(0)[A(0) + T_1 K_0]}} \leq T_1. \tag{3.34}$$

Por $(3{,}28) - (3{,}31)$, tenemos

$$E(0) < \text{mín}\{\kappa_1, \kappa_2\}. \tag{3.35}$$

Por (3,35) y $(3{,}32) - (3{,}33)$, el T_1 que satisface (3,34), debemos de escoger en la relación

$$\kappa_3 \leq T_1 \leq \kappa_4.$$

Con esto se concluye las posibles selecciones de T_1. □

Referencias

[1] Berrimi S. and Messaoudi S. A., *Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2004 (2004), No. 88, pp.1-10.

[2] Berrimi S. and Messaoudi S. A., *Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source*, Nonlinear Analysis 64 (2006) 2314-2331.

[3] Brézis H., *Análisis funcional*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[4] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N. and Soriano J. A., *Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2002 (2002), No. 44, pp.1-14.

[5] Kirchhoff G., *Vorlesungen über mechanik*, Leipzig, Teubner, 1883.

[6] Levine, H.A., *Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form* $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, Trans. Amer. Math. Soc. 192 (1974), 1-21.

[7] Li, M. R. and Tsai, L. Y., *Existence and nonexistence of global solutions of some systems semilinear wave equations*, Nonlinear Anal. TMA., 54 (2003), 1397-1415

[8] Li, M. R. and Tsai, L. Y., *On a system of nonlinear wave equations*, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 7, No. 4, pp. 557-573, December 2003.

[9] Messaoudi S. A., *Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation*, Math. Nachr. 260, 58-66 (2003).

[10] Messaoudi S. A., *Blow-up of positive-initial-energy solutions of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation*, J. Math. Anal. Appl. 320 (2006) 902-915.

[11] Ono, K., *Global existence, decay and blowup of solutions for some mildly degenerate nonlinear Kirchhoff strings*, Journal of Differential Equations 137, 273-301 (1997).

[12] Quispe Méndez, T., *Singularidad de soluciones de una ecuación de Kirchhoff no lineal con término disipativo*, Pesquimat Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. VII, No.1, pág. 18-29, LIMA-PERÚ. Junio 2004.

[13] Quispe Méndez, T., *Solución local de una ecuación de Kirchhoff no lineal viscoelástica con término disipativo*, Pesquimat Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. X, No.1, pp 11-32, LIMA-PERÚ. Agosto 2007.

[14] Wu S. T., *Blow-up of solutions for an integro-differential equation with a nonlinear source*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2006 (2006), No. 45, pp.1-9.

[15] Wu S. T. and Tsai L. Y., *On global existence and blow-up of solutions for an integro-differential equation with strong damping*, Taiwanese Journal of Mathematic Vol.10, No. 4, pp. 979-1014, June 2006.