PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVIII N°2, pp. 39-51, Lima - Perú, Diciembre 2015

EXISTENCIA DE SOLUCIONES LOCALES DÉBILES DE UN SISTEMA ACOPLADO DE KIRCHHOFF

Luis Guillermo Huamanlazo Ricci[1]

(Recibido: 12/12/2014 - Aceptado: 04/12/2015)

Resumen: En el presente trabajo, estudiamos la existencia de soluciones locales débiles de un sistema acoplado de Kirchhoff. Este sistema se trata de una generalización de sistemas acoplados del tipo Klein - Gordon.

Palabras clave: Solución local, sistema acoplado, Método de Galerkin, método de estimativas de Tartar.

WEAK LOCAL EXISTENCE OF SOLUTIONS OF A COUPLED KIRCHHOFF

Abstract: In present work, we study weak local existence of solutions of a coupled Kirchhoff. This system is a generalization of coupled Gordo Klein.

Keywords: Local solution, coupled system, Galerkin method, Tartar estimates method.

1. Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es estudiar el sistema acoplado siguiente:

$$(*)\left\{\begin{array}{c} u_{tt}\left(x,t\right)-M\left(\left\|u(t)^2\right\|\right)\Delta u\left(x,t\right)=v^2\left(x,t\right)u\left(x,t\right);\left(x,t\right)\in\Omega\times\left]0,T\right[\\ v_{tt}\left(x,t\right)-M\left(\left\|v\left(t\right)\right\|^2\right)\Delta v\left(x,t\right)=u^2\left(x,t\right)v\left(x,t\right);\left(x,t\right)\in\Omega\times\left]0,T\right[\\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right);v\left(x,0\right)=v_0\left(x\right);x\in\Omega \\ u_t\left(x,0\right)=u_1\left(x\right);v_t\left(x,0\right)=v_1\left(x\right);x\in\Omega \\ u\left(x,t\right)=v\left(x,t\right)=0;\left(x,t\right)\in\sum=\partial\Omega\times\left]0,T\right[\end{array}\right.$$

Donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera bien regular, M es una función de clase $C^1\left([0,+\infty[\right)$ la cual satisface que $M\left(S\right)\geq m_0>0$, donde m_0 es una constante real. Aquí $T>0$ es un número real que se ha escogido arbitrariamente y luego ya se considera fijado. Con el símbolo Δ representamos el operador Laplaciano definido por $\Delta=\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ y con $\|u(t)\|^2$ denotamos la norma del espacio de Hilbert $H_0^1\left(\Omega\right)$ definida por

$$\|u(t)\|^2=\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2dx$$

El sistema $(*)$ es una generalización de la ecuación

$$u_{tt}-M\left(\left\|u\left(t\right)\right\|^2\right)\Delta u=|u|^2u$$

Pues en $(*)$ haciendo $u=v$ obtenemos la ecuación anterior.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: e-mail: lhrguille@gmail.com

2. Resultados importantes

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$, Con frontera bien regular, $T > 0$ un número real y Q el cilindro $Q = \Omega \times]0, T[$. Por $(\cdot, \cdot)$ y $|\square|$ denotamos el producto interno y la norma de $L^2(\Omega)$ y por $\delta(u, v)$ y $\|\square\|$ denotamos el producto interno y la norma en $H_0^1(\Omega)$. Recordemos que $a(u, v)$ es la llamada forma de Dirichlet definida por

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

Que también se denota por $((\cdot, \cdot))$ y $\|\square\|$ denotaran el producto interno y la norma de $H_0^1(\Omega)$. Además $H_0^1(\Omega)$ es la clausura en $H^1(\Omega)$ del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$, donde $\mathcal{D}(\Omega)$ denota el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte contenido en Ω.

Sea X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$ un número real. Representamos por $L^p(0, T; X)$ al espacio de Banach de funciones con valores vectoriales $u :]0, T[\to X$ las cuales son medibles y $\|u(t)\|_X \in L^P(0, T)$, con la norma

$$\|u(t)\|_{L^P(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representamos al espacio de Banach de las funciones $u :]0, T[\to X$ las cuales son medibles y esencialmente acotadas en Ω, con la norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \underset{t \in]0,T[}{Sup} \; ess |u(t)|_X$$

Además $\mathcal{D}'(Q)$ y $\mathcal{D}(0, T)$ denotaran el espacio de distribuciones sobre Q y $]0, T[$ respectivamente. Todas las funciones escalares consideradas en este trabajo son de valores reales.

En nuestro resultado principal usaremos el siguiente Lema

Lema 2.1 *Si* $u, v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *entonces* $\exists c > 0$ *tal que* $|v^2 u| \leq c \|v\|^2 \|u\|$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n; n = 1, 2)$.

Demostración. Ver Milla Miranda - Medeiros [6] ■

Teorema 2.2 (Alaoglu-Bourbaki) *Sea X un espacio de Banach. Si* $(u_m)_{n \in \mathbb{N}}$ *satisface que* $\|u_m\|_X \leq C$. *Entonces existe* $(u_{n_k}) \subset (u_m)$, $u \in X$ *tal que* $u_{n_k} \overset{*}{\to} u$ *débil * en* X.

Demostración. Ver Brezis, H. [1]. ■

3. Teorema de la existencia local

Sean $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1, v_1 \in H_0^1(\Omega)$ entonces existe $T_0 > 0$ con $T_0 < T$ y funciones $u, v :]0, T_0[\to L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{gathered} u, v \in L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \\ u_t, v_t \in L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right) \\ u_{tt}, v_{tt} \in L^\infty\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right) \end{gathered}$$

y

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} - M\left(\|u(t)\|^2\right) \Delta u = v^2 u \\ v_{tt} - M\left(\|v(t)\|^2\right) \Delta v = u^2 v \end{aligned}\right\} \text{ en el sentido débil en } Q$$

Además

$$\begin{gathered} u(0) = u_0, v(0) = v_0 \\ u_t(0) = u_1, v_t(0) = v_1 \end{gathered}$$

Demostración. La demostración se hará usando el método de Faedo Galerkin, con argumentos de compacidad combinados con el método de estimativas de Tartar [9]. Este método consiste en etapas.

1ª Etapa: Soluciones Aproximadas

Sea $(\omega_\gamma)_\gamma \in \mathbb{N}$ una base de $H_0^1(\Omega)$ formado por las funciones propias del problema de Dirichlet:

$$\left| \begin{array}{c} \Delta\omega_j = \lambda_j\omega_j \text{ en } \Omega \\ \omega_j = \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

y sea $V_m = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m]$ el subespacio generado por los primeros m vectores $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$. Continuando con la demostración del teorema. Sean

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\,\omega_j \quad , \quad v_m(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\,\omega_j$$

Soluciones aproximadas en V_m donde $g_{jm}, h_{jm} \in C^2([0, T_0])$, del problema $(*)$.
Notemos:

De que $u_m(t)$ y $v_m(t) \in V_m$ es evidente pues son combinaciones lineales finitas de las m funciones $\omega_j \in V_m$ $(g_{jm}(t), h_{jm}(t) \in \mathbb{R})$.

Ellas $(u_m(t)\ \ y\ v_m(t))$ son definidas como soluciones del sistema (S.A):

$$\left(u_m''(t), \omega_j\right) + M\left(\|u_m(t)\|^2\right) a\left(u_m(t), \omega_j\right) = \left(v_m^2(t)u_m(t), \omega_j\right) \tag{1}$$

$$\left(v_m''(t), \omega_j\right) + M\left(\|v_m(t)\|^2\right) a\left(v_m(t), \omega_j\right) = \left(u_m^2(t)v_m(t), \omega_j\right); \quad j = 1, 2, ..., m \tag{2}$$

$$u_0(0) = u_{0m}; u_{0m} \to u_0 \ \text{ fuerte en } \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \tag{3}$$

$$v_0(0) = v_{0m}; v_{0m} \to v_0 \ \text{ fuerte en } \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \tag{4}$$

$$u_m'(0) = u_{1m}; u_{1m} \to u_1 \ \text{ fuerte en } \ H_0^1(\Omega) \tag{5}$$

$$v_m'(0) = v_{1m}; v_{1m} \to v_1 \ \text{ fuerte en } \ H_0^1(\Omega) \tag{6}$$

El sistema aproximado (1)–(6) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual por el teorema de Caratheodory nos garantiza que $u_m(t)$ y $v_m(t)$ son definidas en $[0, t_m]$ con $t_m > 0$.

(Es decir el intervalo de existencia de las soluciones depende de la dimensión de V_m). Para definir la solución en todo $[0, T]$ (extender el intervalo de solución) necesitamos obtener estimativas a priori para $u_m(t)$ y $v_m(t)$.

2ª Etapa: Estimativas a Priori

1ª Estimativa:

$$\left(u_m''(t), g_{jm}'(t)\omega_j\right) + M\left(\|u_m\|(t)^2\right) a\left(u_m(t), g_{jm}'(t)\,\omega_j\right) = \left(v_m^2(t)u_m(t), g_{jm}'(t)\,\omega_j\right); \ j = 1, 2, ..., m$$

$$\left(u_m''(t), \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\,\omega_j\right) + M\left(u_m(t)^2\right) a\left(u_m(t), \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\,\omega_j\right) = \left(v_m^2(t)\,u_m(t), \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\,\omega_j\right)$$

$$\left(u''_m(t), u'_m(t)\right) + M\left(u_m(t)^2\right) a\left(u_m(t), u'_m(t)\right) = \left(v_m^2(t)\,u_m(t), u'_m(t)\right)$$

Usando las identidades:

$$\left(u''_m(t), u'_m(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2$$

$$a\left(u_m(t), u'_m(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^2$$

(Las cuales se verifican en el sentido de $\mathcal{D}'(0,t_m)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}M\left(u_m(t)^2\right)\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2=\left(v_m^2(t)\,u_m(t)\,,u'_m(t)\right) \tag{7}$$

Análogamente:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v'_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}M\left(v_m(t)^2\right)\frac{d}{dt}||v_m(t)||^2=\left(u_m^2(t)\,v_m(t)\,,v'_m(t)\right) \tag{8}$$

<u>Afirmación</u>: $v_m^2(t)\,u_m(t)\,,u_m^2(t)\,v_m(t)\in L^2(\Omega)$, es decir

$$\left|v_m^2(t)\,u_m(t)\right|_{L^2(\Omega)}\le Cv_m(t)^2\,|u_m(t)|<\infty \tag{9}$$

y

$$\left|u_m^2(t)\,v_m(t)\right|_{L^2(\Omega)}\le Cu_m(t)^2\,|v_m(t)|<\infty \tag{10}$$

Luego usando la desigualdad de Schwartz en (7) y (8),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}M\left(u_m(t)^2\right)\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2\le\left(v_m^2(t)\,u_m(t)\,,u'_m(t)\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v'_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}M\left(v_m(t)^2\right)\frac{d}{dt}||v_m(t)||^2\le\left(u_m^2(t)\,v_m(t)\,,v'_m(t)\right)$$

Ahora usando (9) y (10), luego hacemos

$$\tilde{M}\left(\|u_m(t)\|^2\right)=\int_0^{\|u_m(t)\|^2}M(S)\,dS\;\;\text{y}\;\;\tilde{M}\left(\|v_m(t)\|^2\right)=\int_0^{\|v_m(t)\|^2}M(S)\,dS \tag{11}$$

y observamos que:

$$\frac{d}{dt}\tilde{M}\left(\|u_m(t)\|^2\right)=M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2$$

Luego tendremos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2+\frac{d}{dt}\tilde{M}\left(\|u_m(t)\|^2\right)\le C\|v_m(t)\|^2\,\|u_m(t)\|\cdot\left|u'_m(t)\right| \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v'_m(t)\right|^2+\frac{d}{dt}\tilde{M}\left(\|v_m(t)\|^2\right)\le C\|u_m(t)\|^2\,\|v_m(t)\|\cdot\left|v'_m(t)\right| \tag{13}$$

Ahora sumando (12) y (13) tenemos:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left|u'_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|v'_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\tilde{M}\left(\|u_m(t)\|^2\right)+\frac{1}{2}\tilde{M}\left(\|v_m(t)\|^2\right)\right]\\&\le C\|v_m(t)\|^2\,|u_m(t)|\cdot\left|u'_m(t)\right|+C\|u_m(t)\|^2\,|v_m(t)|\cdot\left|v'_m(t)\right|\end{aligned} \tag{14}$$

A partir de ahora haremos uso de un tipo de estimativas inspiradas en las estimativas de Tartar [9].

Llamamos:

$$\Psi_m(t)=\frac{1}{2}\left|u'_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|v'_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\tilde{M}\left(\|u_m(t)\|^2\right)+\frac{1}{2}\tilde{M}\left(\|v_m(t)\|^2\right) \tag{15}$$

Observación: $M(S)\ge m_0>0$

Luego usamos (11) y Observación en (15)

$$\Psi_m(t)\ge\frac{1}{2}\left|u'_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|v'_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}m_0\left(\|u_m(t)\|^2\right)+\frac{1}{2}m_0\left(\|v_m(t)\|^2\right) \tag{16}$$

Por tanto de (16) tenemos que:

$$\left.\begin{array}{c}\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{2}{m_0}\Psi_m(t)\,;\|v_m(t)\|^2 \leq \frac{2}{m_0}\Psi_m(t)\\ |u'_m(t)| \leq \sqrt{2}{\Psi_m}^{1/2}(t)\,;|v'_m(t)| \leq \sqrt{2}{\Psi_m}^{1/2}(t)\end{array}\right\} \tag{17}$$

Luego de (15) y (17) en (14) tenemos:

$$\Psi'_m(t) \leq C\frac{2}{m_0}\Psi_m(t)\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m_0}}{\Psi_m}^{1/2}(t)\,\sqrt{2}{\Psi_m}^{1/2}(t)$$

$$++C\frac{2}{m_0}\Psi_m(t)\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m_0}}{\Psi_m}^{1/2}(t)\,\sqrt{2}{\Psi_m}^{1/2}(t) = \frac{4C}{{m_0}^{3/2}}{\Psi_m}^2(t) + \frac{4C}{{m_0}^{3/2}}{\Psi_m}^2(t) \tag{18}$$

De donde:

$$\Psi'_m(t) \leq K{\Psi_m}^2(t) \tag{19}$$

Con $K = \frac{8C}{{m_0}^{3/2}} > 0$
De (19)tenemos

$$\frac{d}{dt}\left[{\Psi_m}^{-1}(t)\right] \geq -K \tag{20}$$

Integrando de 0 a t tenemos:

$$ {\Psi_m}^{-1}(t) \geq {\Psi_m}^{-1}(0) - Kt$$

Observamos que:
${\Psi_m}^{-1}(0) - Kt > 0$ si y solo si $t < \frac{{\Psi_m}^{-1}(0)}{K}$
Luego:

$$\Psi_m(t) \leq \frac{1}{{\Psi_m}^{-1}(0) - Kt} \text{ para t } \in \left[0, \frac{{\Psi_m}^{-1}(0)}{K}\right] \tag{21}$$

Sea:

$$\Psi_m(0) \leq \frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2}|v_1|^2 + \frac{1}{2}\tilde{M}\left(\|u_0\|^2\right)\frac{1}{2}\tilde{M}\left(\|v_0\|^2\right) + 1$$

Para $m \geq r_0$ suficientemente grande

Afirmación:

$$\Psi_m(t) \leq 2A; \forall t \in \left[0, \frac{A^{-1}}{2K}\right] \subset \left[0, \frac{{\Psi_m}^{-1}(0)}{K}\right] \tag{22}$$

Por tanto de (15) y (22) tenemos que:

(u_m) y (v_m) es acotado en $L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right)$

(u'_m) y (v'_m) es acotado en $L^\infty\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right)$

2^a Estimativa:
Multiplicando en (1) y (2) por $\lambda_j g'_{jm}(t)$ y $\lambda_j h'_{jm}(t)$ respectivamente y luego sumando de $j = 1, 2, \ldots, m$ tenemos:

$$\left(u''_m(t)\,, \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\,\lambda_j\omega_j\right)$$

$$+ M\left(\|u_m(t)\|^2\right) a\left(u_m(t)\,, \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\,\lambda_j\omega_j\right) = \left(v_m^2(t)\,u_m(t)\,, \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\,\lambda_j\omega_j\right) \tag{23}$$

Ahora usamos el hecho de que $-\Delta\omega_j = \lambda_j\omega_j$ en (23) se tiene:

$$\left(u''_m(t), -\Delta\sum_{j=1}^{m} {g'}_{jm}(t)\,\omega_j\right) + M\left(\|u_m(t)\|^2\right) a\left(u_m(t), -\Delta\sum_{j=1}^{m} {g'}_{jm}(t)\,\omega_j\right)$$

$$= \left(v_m^2(t)\,u_m(t), -\Delta\sum_{j=1}^{m} {g'}_{jm}(t)\,\omega_j\right)$$

Luego:

$$\left(u''_m(t), -\Delta u'_m(t)\right) + M\left(\|u_m(t)\|^2\right) a\left(u_m(t), -\Delta u'_m(t)\right) = \left(v_m^2(t)\,u_m(t), -\Delta u'_m(t)\right)$$

Ahora hacemos uso de las siguientes identidades:

$$\left.\begin{array}{l} \left({u''}_m(t), -\Delta {u'}_m(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla {u'}_m(t)\right|^2 \\ a\left(u_m(t), -\Delta {u'}_m(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\Delta u_m(t)\right|^2 \end{array}\right\} \text{ en el sentido de las distribuciones}$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla {u'}_m(t)\right|^2 + M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\Delta u_m(t)\right|^2 = \left(v_m^2(t)\,u_m(t), -\Delta u'_m(t)\right) \tag{24}$$

Por el teorema de Green en el 2° miembro de (24); y como $\|u_m(t)\|^2 \leq K$ (por la 1^a estimativa) Y $M \in C^1([0,+\infty[)$ entonces $m_0 = \underset{0\leq\|u_m(t)\|^2\leq K}{Min.M}\left(\|u_m(t)\|^2\right)$

Luego tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla {u'}_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}m_0\frac{d}{dt}\|\Delta u_m(t)\|^2 \leq \left(\nabla\left(v_m^2(t)\,u_m(t)\right), \nabla u'_m(t)\right)$$

Por la desigualdad de Schwartz tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla {u'}_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}m_0\frac{d}{dt}\|\Delta u_m(t)\|^2 \leq \left|\nabla\left(v_m^2(t)\,u_m(t)\right)\right| . \left|\nabla u'_m(t)\right| \tag{25}$$

Análogamente:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\nabla {v'}_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}m_0\frac{d}{dt}\|\Delta v_m(t)\|^2 \leq \left|\nabla\left(u_m^2(t)\,v_m(t)\right)\right| . \left|\nabla v'_m(t)\right| \tag{26}$$

Sumando miembro a miembro (25) y (26)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left|\nabla {u'}_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla {v'}_m(t)\right|^2 + \frac{m_0}{2}\left|\Delta u_m(t)\right|^2 + \frac{m_0}{2}\left|\Delta v_m(t)\right|^2\right] \leq$$

$$\leq \left|\nabla\left(v_m^2(t)\,u_m(t)\right)\right| . \left|\nabla u'_m(t)\right| + \left|\nabla\left(u_m^2(t)\,v_m(t)\right)\right| . \left|\nabla v'_m(t)\right| \tag{27}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla\left(v_m^2(t)\,u_m(t)\right) &= \nabla\left(v_m^2(t)\right) u_m(t) + v_m^2(t)\,.\nabla u_m(t) \\ &= 2v_m(t)\,u_m(t)\,\nabla v_m(t) + v_m^2(t)\,.\nabla u_m(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\nabla\left(v_m^2(t)\,u_m(t)\right)\right| &\leq \left|2v_m(t)\,u_m(t)\,\nabla v_m(t)\right| + \left|v_m^2(t)\,.\nabla u_m(t)\right| \\ &= 2\left|v_m(t)\right|\cdot\left|u_m(t)\right|\cdot\left|\nabla v_m(t)\right| + \left|v_m^2(t)\right|\cdot\left|\nabla u_m(t)\right| \end{aligned}$$

$$\leq 2C_1\|v_m(t)\|\cdot\|u_m(t)\|\cdot|\nabla v_m(t)| + C_2\|v_m(t)\|\cdot\|v_m(t)\|\cdot|\nabla u_m(t)| \quad (*)$$

Pues: $H_0^1(t) \to L^2$ es una inmersión continúa

Retomemos $(*)$

$$\leq 2C_3\|v_m(t)\|_{H^2}\|u_m(t)\|_{H^2}\,|\nabla v_m(t)| + C_4\|v_m(t)\|_{H^2}\|v_m(t)\|_{H^2}\,|\nabla u_m(t)|$$

$$= C_5\,|\Delta v_m(t)|\cdot|\Delta u_m(t)|\cdot|\nabla v_m(t)| + C_6|\Delta v_m(t)|^2\,|\nabla u_m(t)|$$

Así tenemos:

$$\left|\nabla\left(v_m^2(t)\,u_m(t)\right)\right| \leq C_5\,|\Delta v_m(t)|\cdot|\Delta u_m(t)|\cdot|\nabla v_m(t)| + C_6|\Delta v_m(t)|^2\,|\nabla u_m(t)| \tag{28}$$

Con $C_5, C_6 > 0$
Análogamente:

$$\left|\nabla\left(u_m^2(t)\,v_m(t)\right)\right| \leq C_7\,|\Delta v_m(t)|\cdot|\Delta u_m(t)|\cdot|\nabla u_m(t)| + C_8|\Delta u_m(t)|^2\,|\nabla v_m(t)| \tag{29}$$

Con $C_7, C_8 > 0$
Reemplazando (28) y (29) en (27) tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left|\nabla u'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla v'_m(t)\right|^2 + \frac{m_0}{2}|\Delta u_m(t)|^2 + \frac{m_0}{2}|\Delta v_m(t)|^2\right] \leq$$

$$\leq \Big(C_5\,|\Delta v_m(t)|\cdot|\Delta u_m(t)|\cdot|\nabla v_m(t)| + C_6|\Delta v_m(t)|^2\,|\nabla u_m(t)|\Big)\left|\nabla u'_m(t)\right|$$

$$+\Big(C_7\,|\Delta v_m(t)|\cdot|\Delta u_m(t)|\cdot|\nabla u_m(t)| + C_8|\Delta u_m(t)|^2\,|\nabla v_m(t)|\Big)\left|\nabla v'_m(t)\right| \tag{30}$$

Ahora empleamos la técnica de Tartar para lograr nuestra acotación:
Llamamos:

$$\Psi_m(t) = \frac{1}{2}\left|\nabla u'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla v'_m(t)\right|^2 + \frac{m_0}{2}|\Delta u_m(t)|^2 + \frac{m_0}{2}|\Delta v_m(t)|^2 \tag{31}$$

Desarrollando y usando la 1^a estimativa se tiene:

$$\Psi'_m(t) \leq K\Psi_m^{3/2}(t)$$

Luego: $\Psi_m^{3/2}(t)\,\Psi'_m(t) \leq K$ es decir: $\frac{d}{dt}\left[\Psi_m^{-1/2}(t)\right] \geq -\frac{1}{2}K$
Integrando de 0 a t, entonces

$$\Psi_m^{-1/2}(t) \leq \frac{1}{\Psi_m^{-1/2}(0) - Kt} \text{ para } t \in \left[0, \frac{\Psi_m^{-1/2}(0)}{K}\right] \tag{32}$$

Se sabe que:

$$\Psi_m(0) \leq A = \frac{1}{2}|\nabla u_1|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_1|^2 + \frac{m_0}{2}|\Delta u_0|^2 + \frac{m_0}{2}|\Delta v_0|^2 + 1 \tag{33}$$

Para $m \geq r_0$ suficientemente grande
<u>Afirmación</u>:

$$\Psi'_m(t) \leq \sqrt{2}A; \forall t \in \left[0, \frac{A^{-1}}{2K}\right] \subset \left[0, \frac{\Psi_m{}^{-1}(0)}{K}\right] \tag{34}$$

Por tanto de (31)y la afirmación tenemos que:

$$\frac{1}{2}\left|\nabla u'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla v'_m(t)\right|^2 + \frac{m_0}{2}|\Delta u_m(t)|^2 + \frac{m_0}{2}|\Delta v_m(t)|^2 \leq C; t \in [0, T_2]$$

de este modo

$$\frac{1}{2}\left|\nabla u'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla v'_m(t)\right|^2 + m_0|\Delta u_m(t)|^2 + m_0|\Delta v_m(t)|^2 \leq C_1; t \in [0, T_2] \tag{35}$$

Donde $C_1 = 2C = 2\sqrt{2}A$
3^a Estimativa:

$$\left(u''_m(t), u''_m(t)\right) = M\left(u_m(t)^2\right)\left(\Delta u_m(t), u''_m(t)\right) + \left(v_m^2(t)\, u_m(t), u''_m(t)\right)$$

$$\left(v''_m(t), v''_m(t)\right) = M\left(v_m(t)^2\right)\left(\Delta v_m(t), v''_m(t)\right) + \left(u_m^2(t)\, v_m(t), v''_m(t)\right) \tag{36}$$

(36) equivale a:

$$\left|u''_m(t)\right|^2 \leq M\left(u_m(t)^2\right)\left|\Delta u_m(t)\right|\left|u''_m(t)\right| + \left|v_m^2(t)\, u_m(t)\right|\left|u''_m(t)\right| \tag{37}$$

$\uparrow$

Aplicando la desigualdad de Schwartz

Usamos el resultado de que:

$$\left|v_m^2(t)\, u_m(t)\right| \leq C\|v_m(t)\|^2\,\|u_m(t)\|\,;\ \text{donde } C > 0$$

Luego (37) implica:

$$\left|u''_m(t)\right| \leq M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\left|\Delta u_m(t)\right| + C\|v_m(t)\|^2\,\|u_m(t)\| \tag{38}$$

En forma similar

$$\left|v''_m(t)\right| \leq M\left(\|v_m(t)\|^2\right)\left|\Delta v_m(t)\right| + C\|u_m(t)\|^2\,\|v_m(t)\| \tag{39}$$

Por la 1^a estimativa y la pertenencia de M, entonces:

$$M\left(\|u_m(t)\|^2\right) \leq \underset{0\leq\|u(t)\|^2\leq C}{Max.M}\left(\|u_m(t)\|^2\right) = C_0$$

Por la 2^a estimativa (33) que $\|\Delta u_m(t)\|^2 \leq C_1$
Entonces de (38) tenemos:

$$\left|u''_m(t)\right| \leq C_0 C_1^{1/2} + C C^{1/2} = \text{constante}, \forall t \in [0, T_0]\ \text{ con } T_0 = min\{T_1, T_2\}$$

Análogamente:

$$\left|u''_m(t)\right| \leq \text{constante}\ ; \forall t \in [0, T_0]$$

Luego:

$$\left|u''_m(t)\right| + \left|v''_m(t)\right| \leq K\,,\ K > 0$$

3^a ETAPA: Pasaje al limite
Las ecuaciones aproximadas son:

$$\left(u''_m(t), \omega_j\right) + M\left(\|u_m(t)\|^2\right) a\left(u_m(t), \omega_j\right) = \left(v_m^2(t)\, u_m(t), \omega_j\right)$$

$$\left(v''_m(t), \omega_j\right) + M\left(\|v_m(t)\|^2\right) a\left(v(t), \omega_j\right) = \left(u_m^2(t)\, v_m(t), \omega_j\right);\ \omega_j \in V_m\,,\quad j = 1, 2, \ldots, m$$

De las estimativas 1^a y de la 2^a, y considerando $\omega_j \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots, m$
Luego tomando supremo esencial tenemos:

$$\underset{t\in]0,T_0[}{Sup}.ess\|u_m(t)\|_{H_0^t(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \leq \sqrt{C_4}$$

Esto equivale:

$$\|u_m\|_{L^\infty\left(0,T_0,H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)} \leq \sqrt{C_4}$$

es decir: (u_m) es acotada en

$$L^{\infty}\left(0, T_0, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \tag{40}$$

Análogamente (v_m) es acotada en

$$L^{\infty}\left(0, T_0, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))\right)$$

También de (35) se tiene que: $|\nabla u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1;\ \forall t \in [0, T_0]$
Esto equivale a:

$$\left|u'_m(t)\right|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1;\ \forall t \in [0, T_0] \tag{41}$$

Tomando supremo esencial: $\|u'_m\|_{L^{\infty}\left(0,T_0,H_0^1(\Omega)\right)} \leq \sqrt{C_1}$
es decir: (u'_m) es acotada en

$$L^{\infty}\left(0, T_0, H_0^1(\Omega)\right) \tag{42}$$

análogamente (v'_m) es acotada en

$$L^{\infty}\left(0, T_0, H_0^1(\Omega)\right) \tag{43}$$

De la 3^a estimativa y luego tomando supremo esencial en $]0, T_0[$ tenemos:

$$\left\|u''_m\right\|_{L^{\infty}(0,T_0,L^2(\Omega))} \leq \text{ constante}$$

es decir: (u''_m) es acotada en

$$L^{\infty}\left(0, T_0, L^2(\Omega)\right) \tag{44}$$

Análogamente (v''_m) es acotada en

$$L^{\infty}\left(0, T_0, L^2(\Omega)\right) \tag{45}$$

Por otro lado de (43) y por el teorema de Alaoglu- Bourbaki se tiene que existe una subsucesión de (u''_m) y $y \in L^{\infty}\left(0, T_0, L^2(\Omega)\right)$ tal que:

$$u''_m \overset{*}{\rightarrow} Y \text{ débil*en } L^{\infty}\left(0, T_0, L^2(\Omega)\right)$$

esto es: $u''_m \rightarrow Y$ débil * en $L^{\infty}\left(0, T_0, L^2(\Omega)\right)$
Afirmamos que $u'' = Y$.
Considerando que:

$$u'_m \overset{*}{\rightarrow} u' \text{ débil*en } L^{\infty}\left(0, T_0, L^2(\Omega)\right)$$

Se tiene que:

$$\left\langle u'_m, \omega\right\rangle \rightarrow \left\langle u', \omega\right\rangle, \qquad \forall \omega \in L^1\left(0, T_0, L^2(\Omega)\right) \tag{46}$$

Donde hay que observar que $L^1\big(0, T_0, L^2(\Omega)\big)' = L^{\infty}\left(0, T_0, L^2(\Omega)\right)$
La notación de (44) significa que:

$$\int_0^{T_0} \left(u'_m(t), \omega(t)\right) dt \rightarrow \int_0^{T_0} \left(u'(t), \omega(t)\right) dt, \quad \forall \omega \in L^1\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right) \tag{47}$$

Notemos que el producto interno en $L^2(\Omega) : (u'_m(t), \omega(t))$ tiene sentido.
Luego tiene sentido el producto en $L^2(\Omega)$: $(u'_m(t), \omega(t))$, del mismo modo tiene sentido $(u'(t), \omega(t))$.
Continuando a partir de (45), tenemos que para $\omega(t) = v\theta(t)$ con

$$v \in H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \text{ y } \theta \in \mathcal{D}(0, T_0) \rightarrow L^2(0, T_0)$$

se tiene que

$$\omega \in L^1\left(0, T_0, L^2(\Omega)\right) \text{ y } \omega(t) \in L^2(\Omega),$$

luego para este $\omega(t) = v\theta(t)$ en (45) se tiene:

$$\int_0^{T_0} \left(u'_m(t), v\right)\theta(t)\,dt \to \int_0^{T_0} \left(u'(t), v\right)\theta(t)\,dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ y } \forall\theta \in \mathcal{D}(0, T_0)$$

de este modo

$$\left\langle \left(u'_m(t), v\right), \theta\right\rangle \to \left\langle \left(u'(t), v\right), \theta\right\rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ y } \forall\theta \in \mathcal{D}(0, T_0)$$

es decir:

$$\left(u'_m(t), v\right) \to \left(u'(t), v\right), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

en el sentido de $\mathcal{D}'(0, T_0)$ (Es decir en el sentido de las distribuciones).
Luego derivando en el sentido de las distribuciones tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(u'_m(t), v\right) \to \frac{d}{dt}\left(u'(t), v\right), \forall v \in H_0^1(\Omega)\, en \mathcal{D}'(0, T_0)$$

$$\left\langle \frac{d}{dt}\left(u'_m(t), v\right), \varphi\right\rangle \to \left\langle \frac{d}{dt}\left(u'(t), v\right), \varphi\right\rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega)\, y \forall\varphi \in \mathcal{D}(0, T_0)$$

Esto equivale a:

$$-\int_0^{T_0} \left(u'{}_m(t), v\right)\varphi'(t)\,dt \to -\int_0^{T_0} \left(u'(t), v\right)\varphi'(t)\,dt \tag{48}$$

Integrando por partes, luego equivale en particular para $\omega_j \in H_0^1(\Omega)$ tenemos:

$$\left\langle \left(u''{}_m(t), \omega_j\right), \varphi\right\rangle \to \left\langle \left(u''(t), \omega_j\right), \varphi\right\rangle, \forall j = 1, 2, \ldots \;\; \varphi \in \mathcal{D}(0, T_0)$$

Lo cual equivale a decir:

$$(u''_m(t), \omega_j) \to (u''(t), \omega_j), \quad \forall j = 1, 2, \ldots \quad \mathcal{D}'(0, T_0) \tag{49}$$

Análogamente: siguiendo los mismos pasos, se sigue que

$$(v''_m(t), \omega_j) \to (v''(t), \omega_j), \quad \forall j = 1, 2, \ldots \quad \mathcal{D}'(0, T_0) \tag{50}$$

De la 1^a Estimativa, entonces por el teorema de Alaoglu - Bourbaki existe una subsucesión de (u_m) tal que:

$$u_m \overset{*}{\to} u \text{ débil*en } L^\infty\left(0, T_0, H_0^1(\Omega)\right)$$

De ello tenemos que:

$$u_m \to u \text{ débil en } L^2\left(0, T_0, H_0^1(\Omega)\right) \tag{51}$$

Luego de (48) por la definición de convergencia débil tenemos que:

$$\langle \omega, u_m\rangle \to \langle \omega, u\rangle, \forall\omega \in L^2\left(0, T_0, H_0^1(\Omega)\right) \tag{52}$$

Continuando a partir de (49);
(49) significa (por definición de dicha convergencia en (48) que:

$$\int_0^{T_0} \left\langle \omega(t), u'_m(t)\right\rangle_{H_0^1(\Omega)xH_0^1(\Omega)} dt \to \int_0^{T_0} \left\langle \omega(t), u(t)\right\rangle_{H_0^1(\Omega)xH_0^1(\Omega)} dt \tag{53}$$

Como $\omega(t), u_m(t) \in H_0^1(\Omega)$ la dualidad de $H^{-1}(\Omega)$ con $H_0^1(\Omega)$ se convierte en un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ que es un espacio de Hilbert real, luego el producto interno es simétrico, así de (50) se tiene:

$$\int_0^{T_0} \left(\left(u_m(t), \omega(t)\right)\right) dt \to \int_0^{T_0} \left(u(t), \omega(t)\right) dt \tag{54}$$

Donde:

$((,))$ denota el producto interno en $H_0^1(\Omega)$ denotado también por $a(u,v) = ((u,v))$.
Luego (51) se escribe como:

$$\int_0^{T_0} a\left(u_m(t), \omega(t)\right) dt \to \int_0^{T_0} a\left(u(t), \omega(t)\right) dt, \quad \forall \omega \in L^2\left(0, T_0, H_0^1(\Omega)\right)$$

Luego se sigue, lo cual equivale a decir:

$$a(u_m(t), \omega_j) \to a(u(t), \omega_j), \quad \forall j = 1, 2, \ldots \quad \underbrace{en \ \ \mathcal{D}'(0, T_0)}_{\substack{\text{Es decir en el sentido de} \\ \text{las distribuciones sobre }]0, T_0[}} \tag{55}$$

Análogamente siguiendo los mismos pasos, se sigue:

$$a\left(v_m(t), \omega_j\right) \to a\left(v(t), \omega_j\right), \forall j = 1, 2, \ldots \text{ en } \mathcal{D}'(0, T_0) \tag{56}$$

<u>Afirmamos</u>: $M\left(|\nabla u_m(t)|^2\right) \to M\left(|\nabla u(t)|^2\right)$ fuerte en $L^2(0, T_0)$
Luego, haciendo cálculos, equivale a decir:

$$M\left(\|u_m(t)\|^2\right) a\left(u_m(t), \omega_j\right) \to M\left(\|u(t)\|^2\right) a\left(u(t), \omega_j\right), \forall j = 1, 2, \ldots \text{ en } \mathcal{D}'(0, T_0) \tag{57}$$

Análogamente:

$$M\left(\|v_m(t)\|^2\right) a\left(v_m(t), \omega_j\right) \to M\left(\|v(t)\|^2\right) a\left(v(t), \omega_j\right), \forall j = 1, 2, \ldots \text{ en } \mathcal{D}'(0, T_0) \tag{58}$$

4^a Etapa: Convergencia de los términos no lineales

No olvidemos que estamos considerando Ω abierto de $\mathbb{R}^n$; $n = 1, 2$
En este caso se obtiene que

$$\left|v_m^2(t)\, u_m(t)\right|_{L^2(\Omega)} \leq C|u_m(t)\, v_m(t)|_{L^2(\Omega)}. \|v_m(t)\| \leq C_1 \tag{59}$$

Análogamente

$$\left|u_m^2(t)\, v_m(t)\right|_{L^2(\Omega)} \leq C|u_m(t)\, v_m(t)|_{L^2(\Omega)}. \|u_m(t)\| \leq C_2 \tag{60}$$

Para (56) y (57) estamos haciendo uso de un trabajo de Medeiros - Milla Miranda [5] (página 176).
Luego de (56) tenemos usando supremos esencial que:

$$\left(v_m^2 u_m\right) \text{ es acotado en } L^\infty\left(0, T_0, L^2(\Omega)\right) \tag{61}$$

Del mismo modo se tiene:

$$\left(u_m^2 v_m\right) \text{ es acotado en } L^\infty\left(0, T_0, L^2(\Omega)\right) \tag{62}$$

Ahora, la siguiente etapa es estudiar la convergencia en casi todo punto de los términos no lineales $v_m^2 u_m$ y $u_m^2 v_m$ para cada $t \in [0, T_0]$
De la primera estimativa y de (42), luego se sigue que: u_m y v_m están acotadas en $H'(Q_0)$, pues con inmersión compactada, luego existen subsucesiones (u_m) y (v_m) tales que:
$u_m \to u$ y $v_m \to v$ fuerte en $L^2(Q_0)$, luego se sigue que

$$u_m \to u \ y \ v_m \to v \text{ en casi todo punto de } Q_0 \tag{63}$$

Luego se tiene que:

$$u_m^2 \to u^2 \ y \ v_m^2 \to v^2 \text{ en casi todo punto de } Q_0 \tag{64}$$

Combinando (60) y (61) se tiene:

$$v_m^2 u_m \to v^2 u \text{ en casi todo punto en } Q_0 \tag{65}$$

$$u_m^2 v_m \to u^2 v \text{ en casi todo punto en } Q_0 \tag{66}$$

De (62), (59), (62), (63) y el Lema de Lions, esto es equivalente a:

$$\int_0^{T_0} \left\langle v_m^2(t)\, u_m(t), \varphi(t) \right\rangle_{L^P x L^Q} dt \to \int_0^{T_0} \left\langle v^2(t)\, u(t), \varphi(t) \right\rangle_{L^P \times L^Q} dt \tag{67}$$

En particular para $p = 2$, siguiendo, equivale a

$$\left(v_m^2(t)\, u_m(t), \omega_j\right) \to \left(v^2(t)\, u(t), \omega_j\right), \forall j = 1, 2, \ldots \ en\ \mathcal{D}'(0, T_0) \tag{68}$$

Análogamente

$$\left(u_m^2(t)\, v_m(t), \omega_j\right) \to \left(u^2(t)\, v(t), \omega_j\right), \forall j = 1, 2, \ldots \ en\ \mathcal{D}'(0, T_0) \tag{69}$$

Ahora de (46), (54),(64) y haciendo $m \to +\infty$
Análogamente: De (47), (55),(65) y haciendo $m \to +\infty$
Luego ello prueba que existe (u, v) solución del sistema:

$$u'' - M\left(\|u(t)\|^2\right) \Delta u = v^2 u$$

$$v'' - M\left(\|v(t)\|^2\right) \Delta v = u^2 v$$

en el sentido débil. ■

4. Conclusiones

El sistema $(*)$ es una generalización del caso que considera $M \equiv 1$ que es el caso típico de un sistema acoplado de Klein - Gordon, al respecto se puede ver el trabajo de Medeiros - Milla Miranda [5] quienes estudian un sistema con acoplamiento más general de la forma

$$|v|^{p+2}|\mu|^p\mu \quad \text{y} \quad |\mu|^{p+2}|v|^p v$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Brezis,H. (1983). *Analyse Fonctionelle, Theorie et Applications*, Massor, Paris.

[2] Carrillo, D. L. (1988). *Ñao Existencia de Solucoes fracas Globais de una Equacao Hiperbolica.* Atas de 28 S.B.A., Rio de Janeiro.

[3] Kirchhoff, G. (1985). *Vorlesungerk Uber Mechanic Tauberk*, Leipzig.

[4] Lions, J.L. (1969). *Quelques Mathodes de Resolution des problems aux limites nonlineares*, Donod Paris.

[5] Medeiros, L.A., Milla Miranda M. (1986). *Weak Solutions for a System of non Linear Klein Gordon Equations.* Annali di Matematica Pura ed Applicata (IV). Vol CXLVI, 173-183.

[6] Milla Miranda M., Medeiros, L.A. (1987). *On the existence of global Solutions of a coupled nonlinear Klein Gordon Equations.* Funkcialaj Ekvadoj. Vol 30, 147-161.

[7] Perla M. (1995). *On a Mixed Problem for a class of non linear Klein Gordon Equations.* 21 Seminario Brasileiro.

[8] Schwartz, L. (1950). *Theorie des Distributions.* Tome I, II. Hermann Ed. Paris.

[9] Tartar, L. (1978). *Topics in Nonlinear analysis.* Publications Mathematiques D'orsay.