PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVIII N°2, pp. 52-62, Lima - Perú, Diciembre 2015

TRANSFORMADO ESTRICTO DE FOLIACIONES HOLOMORFAS SOBRE $\mathbb{C}^n$

Luis Javier Vásquez Serpa [1]

(Recibido: 03/10/2015 - Aceptado: 24/11/2015)

Resumen: En este trabajo mostraremos una herramienta que nos permita transformar una foliación holomorfa singular a otra foliación holomorfa singular de tal forma que en ésta última tenemos más oportunidad a que las multiplicidades de las sigularidades disminuyan y así poder hacer un mejor análisis cualitativo de las órbitas de la foliación alrededor de una sigularidad. Esta herramienta es una aplicación $E : \tilde{U}_p \longrightarrow U$ llamada Blow-up, donde $p \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $\tilde{U}_p = [U - \{p\}] \cup \mathbb{C}P(n-1)$ es una variedad compleja. Mostraremos que $E : \tilde{U}_p - \mathbb{C}P(n-1) \longrightarrow U - \{p\}$ es un biholomorfismo entre variedades complejas; lo que nos permite vía el Blow-up tener una conjugación analítica entre la órbitas de las foliaciones $\mathcal{F}_Z$ y $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ respecto a los campos vectoriales holomorfos sobre $U - \{p\}$ y $\tilde{U}_p - \mathbb{C}P(n-1)$ respectivamente, donde el campo $\tilde{Z} = E^*(Z)$ es el Pull-back de Z vía el Blow-up E. Mostraremos también que el campo $\tilde{Z}$ puede ser extendido de manera holomorfa sobre el espacio proyectivos n-1 dimensional $\mathbb{C}P(n-1)$, teniendo asi un campo holomorfo $\tilde{Z}$ sobre toda la variedad $\tilde{U}_p$ de tal forma que la proyección de ésta vía el Blow-up E coincide con el campo original Z. La foliación $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ sobre todo la variedad $\tilde{U}_p$ asociada al campo $\tilde{Z}$ es llamada *El Transformado Estricto de* $\mathcal{F}_Z$.

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Complejas, Foliación Holomorfa Singular, Blow-up, Sistemas Dinámicos, Dinámica Compleja.

TRANSFORMED STRICT OF HOLOMORPHIC FOLIATIONS ON $\mathbb{C}^n$

Abstract: In this work we show a tool that allows us to transform a singular holomorphic foliation another singular holomorphic foliation such that in the latter we have more opportunity to the multiplicities of the singularities decrease so we can do a better qualitative analysis of the orbits of the foliation around a sigularidad. This tool is an application $E : \tilde{U}_p \longrightarrow U$ Blow-up call where $p \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ open and $\tilde{U}_p = [U - \{p\}] \cup \mathbb{C}P(n-1)$ is a complex manifold. We show that $E : \tilde{U}_p - \mathbb{C}P(n-1) \longrightarrow U - \{p\}$ is a complex biholomorfismo between complex manifolds; allowing us via Blow-up have an analytical conjugation between the orbits of foliations $\mathcal{F}_Z$ and $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ respect to holomorphic vector fields on $U - \{p\}$ and $\tilde{U}_p - \mathbb{C}P(n-1)$ respectively, where the field $\tilde{Z} = E^*(Z)$ is the Pull-back of Z via the Blow-up E. We also will show that the Z field can be extended manner on the projective holomorphic n-1 dimensional space $\mathbb{C}P(n-1)$, also having a holomorphic field Z over the entire manifold $\tilde{U}_p$ such that the projection of it via the Blow-up E matches the original field Z. The foliation $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ on the manifold $\tilde{U}_p$ associated with the field Z is called Transformed Strict $\mathcal{F}_Z$.

Keywords: Ordinary Differential Equations Complex, Holomorphic Singular Foliation, Blow-up, Dynamical Systems, Complex Dynamics.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: javiervasquezserpa@gmail.com

1. Introducción

Sean $\mathcal{M}^n$ una variedad compleja de dimensión n, $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa singular por curvas sobre $\mathcal{M}^n$ y $p \in \mathcal{M}^n$ una singularidad aislada de la foliación $\mathcal{F}$. Sea Z el campo vectorial que genera la foliación alrededor del punto p (ver [4], [7]), en una carta (U, φ) de $\mathcal{M}^n$ tal que $p \in U$ y $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{C}^n$. Fijando coordenadas en esta carta, el campo Z se expresa como:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

donde $Z_1, Z_2, ..., Z_n \in \mathcal{O}_{n,p}$ (aquí $\mathcal{O}_{n,p}$ es el anillo de gérmenes de las funciones holomorfas en p) y $m.c.d.(Z_1, Z_2, ..., Z_n) = 1$. Denotaremos por $\mathcal{F}_Z$ a esta foliación, el cual coincide con la foliación $\mathcal{F}$. Como $p \in U$ es una singularidad aislada de Z, entonces existe una vecindad abierta U_p de p en la que $p \in U_p$ es la única singularidad y los demás puntos de $U_p - \{p\}$ son puntos regulares, por el Teorema del Flujo Tubular (ver [7], [8] y [1]) tenemos que las órbitas alrededor de un punto regular pueden "ser enderezadas" mediante una conjugación analítica local, entonces ya sabemos como se comporta localmente. Lo interesante sería ver qué pasa alrededor de un punto singular p, i.e como se comporta las órbitas alrededor del punto p.

En este trabajo mostraremos una herramienta que nos permita tranformar una foliación holomorfa singular a otra foliación holomorfa singular de tal forma que en ésta última tenemos más oportunidad a que las multiplicidades de las sigularidades disminuyan y así poder hacer un mejor análisis cualitativo de las órbitas de la foliación alrededor de una sigularidad. Esta herramienta es una aplicación $E : \tilde{U}_p \longrightarrow U$ llamada Blow-up, donde $p \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $\tilde{U}_p = [U - \{p\}] \cup \mathbb{C}P(n-1)$ es una variedad compleja. Mostraremos que $E : \tilde{U}_p - \mathbb{C}P(n-1) \longrightarrow U - \{p\}$ es un biholomorfismo entre variedades complejas; lo que nos permite, vía el Blow-up, tener una conjugación analítica entre la órbitas de las foliaciones $\mathcal{F}_Z$ y $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ respecto a los campos vectoriales holomorfos sobre $U - \{p\}$ y $\tilde{U}_p - \mathbb{C}P(n-1)$ respectivamente, donde el campo $\tilde{Z} = E^*(Z)$ es el Pull-back de Z vía el Blow-up E. Mostraremos que el campo $\tilde{Z}$ puede ser extendido de manera holomorfa sobre el espacio proyectivos n-1 dimensional $\mathbb{C}P(n-1)$, teniendo así un campo holomorfo $\tilde{Z}$ sobre toda la variedad $\tilde{U}_p$ de tal forma que la proyección de ésta vía el Blow-up E coincide con el campo original Z. La foliación $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$ sobre todo la variedad $\tilde{U}_p$ asociada al campo $\tilde{Z}$ es llamada *El Transformado Estricto de* $\mathcal{F}_Z$.

2. Preliminares

Proposición 2.1 *Sea $M \neq \phi$ y $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ una familia de biyecciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$ que satisface las condiciones siguientes:*

1. *Para todo $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}$, el conjunto $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$ es un abierto de $\mathbb{C}^n$.*
2. *$M = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$*
3. *Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$ son tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ entonces $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son abiertos de $\mathbb{C}^n$ y la composición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un biholomorfismo.*

Entonces existe una única topología $\tau(\mathcal{F})$ sobre M que torna a la familia $\mathcal{F}$ un atlas complejo de dimensión n para M, además con la topología $\tau(\mathcal{F})$ las biyecciones se tornan en homeomorfismos.

Demostración. Denotemos por $\tau(\mathcal{F})$ a la familia de subconjuntos de M definidas por

$$A \in \tau(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \varphi_\alpha(A \cap U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n \text{ es abierto } \forall \alpha.$$

Es fácil ver que $\tau(\mathcal{F})$ es una topología sobre M. ■

Proposición 2.2 *Sea* $M \neq \phi$ *y* $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *con las condiciones de la Proposición 2.1. La topología* $\tau(\mathcal{F})$ *es de Hausdorff si y sólo si* $\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$ *con* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ *no exista ninguna sucesión* $(x_n) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ *tal que* $x_n \to x \in \varphi_\alpha(U_\alpha - U_\beta)$ *y* $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x_n) \to y \in \varphi_\beta(U_\beta - U_\alpha)$.

Proposición 2.3 *Sea* $M \neq \phi$ *y* $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *con las condiciones de la proposición 2.1.* $\tau(\mathcal{F})$ *tiene base numerable si y sólo si el cubrimiento* $\{U_\alpha\}$ *de* M *admite un subcubrimiento numerable de* M.

Las demostraciones de las proposiciones anteriores las puede encontrar en [10].

El siguiente Teorema nos dá toda la información cualitativa alrededor de un punto regular.

Teorema 2.4 (Flujo Tubular) *Sean* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *un abierto,* $Z \in \mathcal{X}(U)$ *y* $z_0 \in U$ *un punto regular de* Z *entonces* Z *es localmente analíticamente conjugado al campo constante* $Y = (1, 0, ..., 0)$ *alrededor de* z_0 *y* 0.

Demostración. Ver [7]. ■

Definición 2.5 *Sean* $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ *dos variedades complejas de dimensiónes* m *y* n *respectivamente y* $f : X \to Y$ *continua.*

1. *Decimos que* f *es holomorfa en* $p \in X$ *si existe* $\varphi : U \to V$, $\varphi \in \mathcal{A}$ *y existe* $\psi : U' \to V'$, $\psi \in \mathcal{B}$ *con* $p \in U$ *y* $f(p) \in U'$, $f(U) \subseteq U'$ *tales que* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \subseteq \mathbb{C}^m \to V' \subseteq \mathbb{C}^n$ *es holomorfa en* $\varphi(p)$.
2. *Decimos que* f *es holomorfa en* X *si* f *es holomorfa en* p, $\forall p \in X$.
3. *Decimos que* f *es biholomorfa si* f *es biyectiva holomorfa y su inversa también es holomorfa.*
4. *Decimos que* $(X, \mathcal{A})$ *y* $(Y, \mathcal{B})$ *son biholomorfas si existe un biholomorfismo entre ellas.*

3. El Espacio Proyectivo Complejo $\mathbb{C}P(n)$

En $\mathbb{C}^n - \{0\}$ definimos la siguiente relación:

$$z \sim w \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\} \text{ tal que } w = tz,$$

donde z, $w \in \mathbb{C}^n - \{0\}$.
Es claro que "$\sim$" es una relación de equivalencia. Al conjunto cociente definido por la relación lo denotamos por:

$$\mathbb{C}P(n-1) = (\mathbb{C}^n - \{0\})/_\sim = \{[z] = [z_1; ...; z_{n+1}];\ z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\}.$$

donde $[z] = \{(tz_1, ..., tz_n);\, t \in \mathbb{C}^*\}$.
Los elementos de $\mathbb{C}P(n-1)$ son rectas complejas de $\mathbb{C}^n$ que pasan por el origen tal que el $0 \in \mathbb{C}^n$ no pertenece a la recta.

- Si $n = 1$, $\mathbb{C}P(1)$ es llamado linea proyectiva o esfera de Riemann.
- Si $n = 2$, $\mathbb{C}P(2)$ es llamado plano proyectivo complejo.

Demos una estructura de variedad al espacio $\mathbb{C}P(n-1)$. Sea $U_j = \{[z] = [z_1; ...; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1);$

$z_j \neq 0\}$ para $1 \leq j \leq n$, definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi_j :\ & U_j \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1} \\ & [z] \longmapsto \varphi_j([z]) = \left(\frac{z_1}{z_j}, ..., \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, ... \frac{z_n}{z_j}\right), \end{aligned}$$

es fácil ver que las aplicaciones φ_j son biyecciones ($1 \leq j \leq n$), donde las inversas son $\varphi_j^{-1} : \mathbb{C}^{n-1} \to U_j$ dadas por:

$$\varphi_j^{-1}(w_1, ..., w_{n-1}) = [w_1; ... : w_{j-1}; 1; w_j; ...; w_n].$$

Luego tenemos una familia de biyecciones $\mathcal{F} = \{(U_j, \varphi_j)\}_{1\leq j\leq n}$ tal que: $\varphi_j(U_j) = \mathbb{C}^{n-1}$ es abierto ($1 \leq j \leq n$) y $\cup_{j=1}^{n}(U_j) = \mathbb{C}P(n-1)$, con un fácil cálculo se muestra que para $U_i \cap U_j \neq \phi$ se tiene que $\varphi_i(U_i \cap U_j)$, $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ son abiertos en $\mathbb{C}^{n-1}$. Además $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es un biholomorfismo $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$.

Entonces la familia $\mathcal{F} = \{(U_j, \varphi_j)\}_{1\leq j\leq n}$ genera una topología $\tau(\mathcal{F})$ sobre $\mathbb{C}P(n-1)$ que torna a $\mathcal{F}$ un atlas holomorfo de dimensión n, como $\mathcal{F}$ es finito entonces $\tau(\mathcal{F})$ tiene base numerable (ver Proposiciones 2.1 y 2.3).

Sean (U_i, φ_i),$(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$ tal que $U_i \cap U_j \neq \phi$ un fácil cálculo muestra que no existe ninguna sucesión $(x_n) \subseteq \varphi_i(U_i \cap U_j)$ tal que $x_n \longrightarrow x \in \varphi_i(U_i - U_j)$ y $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x_n) \longrightarrow y \in \varphi_j(U_j - U_i)$ entonces $\tau(\mathcal{F})$ es de Hausdorff (ver Proposicóon 2.2). Luego tenemos que $\mathbb{C}P(n-1)$ es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable, por lo tanto $(\mathbb{C}P(n-1), \mathcal{A}(\mathbb{C}P(n-1)))$ es una variedad compleja holomorfa de dimensión $n-1$, donde $\mathcal{A}(\mathbb{C}P(n-1))$ es el atlas maximal que contiene al atlas generado por la familia $\mathcal{F}$.

Definición 3.1 $(\mathbb{C}P(n-1), \mathcal{A}(\mathbb{C}P(n-1)))$ *es llamado Espacio Proyectivo Complejo (n-1) dimensional.*

Proposición 3.2 $\mathbb{C}P(n-1)$ *es compacto.*

Demostración. La demostración puede ser encontrada en [10] y [5]. ■

Observación: El conjunto $\mathbb{C}^{n-1}$ puede ser identificado con U_1, y sea el conjunto $H_\infty = \{[z_1; ...; z_n];\ z_1 = 0\}$ en $\mathbb{C}P(n-1)$, observe que la primera carta de $\mathbb{C}P(n-1)$ no puede ver el conjunto $H_\infty = \mathbb{C}P(n-1) - U_1 = \mathbb{C}P(n-1) - \mathbb{C}^{n-1}$, es decir que H_∞ no intersecta la imagen de φ_1, donde (U_1, φ_1) es la primera carta de $\mathbb{C}P(n-1)$, es por eso que a $H_\infty = \mathbb{C}P(n-1) - \mathbb{C}^{n-1}$ se le llama conjunto del infinito (en la 1ra carta).

4. El Blow-up Centrado en el $0 \in \mathbb{C}^n$

El Blow-up centrado en el $0 \in \mathbb{C}^n$, consiste en remplazar el $0 \in \mathbb{C}^n$ por un espacio proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$, dejando todos los otros puntos invariante desde el punto de vista biholomorfo. Vamos a dar un sentido matemático preciso a esta idea informal, empezamos considerando las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{rccl} E_j : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (y_1, ..., y_n) & \longmapsto & E_1(y_1, ..., y_n) = (y_1, y_1y_2, ..., y_1y_n) = (z_1, ..., z_n), \end{array}$$

para $1 \leq j \leq n$. Es fácil deducir las siguientes propiedades:

1. $E_j^{-1}(0) = \{y_1 = 0\}$
2. $E_j(\mathbb{C}^n) = \{\mathbb{C}^n - \{z_j = 0\}\} \cup \{0\}$, i.e E_j no es sobreyectiva
3. $E_j : \mathbb{C}^n - \{y_j = 0\} \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{z_j = 0\}$ es un biholomorfismo, cuya inversa es:

$$\begin{array}{rccl} E_j^{-1} : & \mathbb{C}^n - \{z_j = 0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n - \{y_j = 0\} \\ & (z_1, ..., z_n) & \longmapsto & E_j^{-1}(z_1, ..., z_n) = \left(\dfrac{z_1}{z_j}, ..., \dfrac{z_{j-1}}{z_j}, z_j, \dfrac{z_{j+1}}{z_j}, ... \dfrac{z_n}{z_j}\right). \end{array}$$

De lo anterior deducimos que para poder cubrir todo el espacio $\mathbb{C}^n$ se necesitan las n-aplicaciones E_j, además el $0 \in \mathbb{C}^n$ es llevado a un espacio $(n-1)$-dimensional, $\{z_j = 0\}$, via la aplicación E_j.

Para cubrir todo $\mathbb{C}^n$ (es decir, todo punto de $\mathbb{C}^n$ tenga pre-imagen bajo $E_1, ..., E_n$) necesitamos pegar los n sistemas haciendo que los espacios $\{y_1 = 0\}, ..., \{y_n = 0\}$ se identifiquen dos a dos, de tal manera que $E_1, ..., E_n$ sigan siendo biholomorfismos, intuitivamente necesitamos construir una **variedad** con ayuda de las apliaciones $E_1, ..., E_n$.

Para $1 \leq j \leq n$, definimos los conjuntos:

$$\tilde{U}_j = \{(z_1, ..., z_n, [w]) \in \mathbb{C}^n \times U_j; (z_1, ...z_{j-1}, z_{j+1}, ..., z_n) = z_j \varphi_j([w])\},$$

donde (U_i, φ_i) son las cartas del plano proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$. Observe que:

$$\tilde{U}_j \subseteq \mathbb{C}^n \times U_j \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P(n-1), \ (1 \leq j \leq n).$$

Sea $z = (z_1, ..., z_n)$ y $[w] = [w_1; ...; w_n]$, definimos las funciones:

$$\begin{array}{cccl} \tilde{\varphi}_j : & \tilde{U}_j & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (z, [w]) & \longmapsto & \tilde{\varphi}_1(z, [w]) = \left(\dfrac{w_1}{w_j}, ..., \dfrac{w_{j-1}}{w_j}, z_j, \dfrac{w_{j+1}}{w_j}, ... \dfrac{w_n}{w_j}\right). \end{array}$$

Un fácil cálculo muestra que las $\tilde{\varphi}_j$,$(1 \leq j \leq n)$ son biyeciones, cuyas inversas son:

$$\begin{array}{cccl} \tilde{\varphi}_j^{-1} : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \tilde{U}_j \\ & (y_1, ..., y_n) & \longmapsto & \tilde{\varphi}_j^{-1}(y_1, ..., y_n) = \Big(E_j(y_1, ..., y_n), \varphi_j^{-1}(y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n)\Big). \end{array}$$

Luego tenemos una familia de biyecciones $\tilde{\mathcal{F}} = \{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{1 \leq j \leq n}$.

Definimos el conjunto

$$\tilde{\mathbb{C}}_0^n = \cup_{j=1}^n (\tilde{U}_j).$$

Un fácil cálculo se muestra que para $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \phi$ se tiene que $\tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$, $\varphi_j(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$ son abiertos en $\mathbb{C}^n$. Además $\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}$ es un biholomorfismo para todo $i, j \in 1, ..., n$. Entonces la familia $\tilde{\mathcal{F}} = \{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{1 \leq j \leq n}$ genera una topología $\tau(\tilde{\mathcal{F}})$ sobre $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$ que torna a $\mathcal{F}$ un atlas holomorfo de dimensión n, como $\tilde{\mathcal{F}}$ es finito entonces $\tau(\tilde{\mathcal{F}})$ tiene base numerable (ver Proposiciones 2.1 y 2.3).

Sean $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)$,$(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j) \in \mathcal{F}$ tal que $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \phi$ un fácil cálculo muestra que no existe ninguna sucesión $(x_n) \subseteq \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$ tal que $x_n \longrightarrow x \in \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i - \tilde{U}_j)$ y $(\tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1})(x_n) \longrightarrow y \in \tilde{\varphi}_j(\tilde{U}_j - \tilde{U}_i)$ entonces $\tau(\tilde{\mathcal{F}})$ es de Hausdorff (ver Proposición 2.2). Luego tenemos que $\mathbb{C}P(n-1)$ es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable. Por lo tanto $(\tilde{\mathbb{C}}_0^n, \mathcal{A}(\tilde{\mathbb{C}}_0^n))$ es una variedad compleja holomorfa de dimensión n, donde $\mathcal{A}(\tilde{\mathbb{C}}_0^n)$ es el atlas maximal que contiene al atlas generado por la familia $\tilde{\mathcal{F}}$.

Definición 4.1 *La variedad compleja* $(\tilde{\mathbb{C}}_0^n, \mathcal{A}(\tilde{\mathbb{C}}_0^n))$ *es llamada Blow-up centrado en el* $0 \in \mathbb{C}^n$.

Observe que $\tilde{\mathbb{C}}_0^n \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P(n-1)$, de manera natural existen dos proyecciones:

$$\begin{array}{cccl} E : & \tilde{\mathbb{C}}_0^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (z, [l]) & \longmapsto & E(z, [l]) = z, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccl} \pi : & \tilde{\mathbb{C}}_0^n & \longrightarrow & \mathbb{C}P(n-1) \\ & (z, [l]) & \longmapsto & E(z, [l]) = [l]. \end{array}$$

i) Expresamos la proyección E en coordenadas; es decir, trabajando con las cartas de la variedad $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$. En la j-ésima carta $(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)$

$$(E \circ \tilde{\varphi}_j^{-1})(y_1, ..., y_n) = E_j(y_1, ..., y_n).$$

Entonces $(E \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}) = E_j$ para todo $j \in 1, ..., n$, por lo tanto ahora sí cualquier punto $z \in \mathbb{C}^n$ tiene pre-imagen bajo $E_1, E_2, ...,$ ó E_n. Además como las aplicaciones E_j son holomorfas para todo $j \in 1, ..., n$. Por lo tanto la aplicacion $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es holomorfa entre variedades.

ii) Análogamente para la proyección π, es fácil ver que π es una función holomorfa entre variedades.

Definición 4.2 *La función holomorfa* $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *será llamada Blow-up con centro en el punto* $0 \in \mathbb{C}^n$.

Proposición 4.3 *La función* $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *verifica las siguientes propiedades:*

(1) $E^{-1}(\theta) = \mathbb{C}P(n-1)$ *; donde* $\theta = (0, 0, 0)$.

(2) $\tilde{\mathbb{C}}_0^n = \{(z, [z]);\ z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\} \cup \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$.

(3) $E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)}} : \tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1) \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{\theta\}$ *es un biholomorfismo.*

(4) $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *es un mapeo propio.*

Demostración.

(1) En efecto, sea $(z, [l]) \in E^{-1}(\theta) \Leftrightarrow E(z, [l]) = \theta \Leftrightarrow z = \theta \Leftrightarrow (z, [l]) \in \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$ entonces $E^{-1}(\theta) = \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$, sea $i : \mathbb{C}P(n-1) \hookrightarrow E^{-1}(\theta)$ la inclusión canónica, es claro que i es una inmersión holomorfa, entonces es claro que $\{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$ es biholomorfa a $\mathbb{C}P(n-1)$ $(\mathbb{C}P(n-1) \approx \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1))$, entonces $E^{-1}(\theta)$ se puede identificar con $\mathbb{C}P(n-1)$.

(2) En efecto, es claro que $\{(z, [z]);\ z \in \mathbb{C}^n - \{\theta\}\} \cup \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1) \subseteq \tilde{\mathbb{C}}_0^n$, veamos el otro contenido.

Sea $(z, [l]) \in \tilde{\mathbb{C}}_0^n$; donde $z = (z_1, ..., z_n)$, $[l] = [l_1, ..., l_n]$ entonces ocurren dos casos :

- Si $z = \theta$, entonces $(z, [l]) \in \{\theta\} \times U_i \subseteq \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$; para algún $i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow (z, [l]) \in \{(z, [z]);\ z \in \mathbb{C}^n - \{\theta\}\} \cup \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1)$
- Si $z \neq \theta$, sin pérdida de generalidad supongamos que $(z, [l]) \in \tilde{U}_1 \Rightarrow (z_2, ..., z_n) = z_1\varphi_1([l]) = z_1(\frac{l_2}{l_1}, ..., \frac{l_n}{l1})$, Además $z_1 \neq 0$, entonces $[z] = [l]$, luego $(z, [l]) \in \{(z, [z]);\ z \in \mathbb{C}^n - \{\theta\}\}$.

(3) En efecto, teniendo en cuenta las identificaciones anteriores, se aclara por última vez que $E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)}} : \tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1) \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{\theta\}$ es una biyección cuya inversa es : $(E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)}})^{-1} : \mathbb{C}^n - \{\theta\} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)$, ya sabemos que la aplicación E es holomorfa , sólo nos falta ver que $(E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)}})^{-1}$ sea holomorfa, como son aplicaciones entre variedades, entonces veamos mediante las cartas, es fácil ver que $\tilde{\varphi}_i \circ (E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)}})^{-1}$ es holomorfa $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$, entonces $(E_{|_{\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)}})^{-1}$ sea holomorfa.

(4) En efecto, sea $K \subseteq \mathbb{C}^n$ compacto, ocurren dos casos:

- Si $\theta \notin K$, entonces por definición de E, $E^{-1}(K)$ es compacto.

- Si $\theta \in K$, entonces $E^{-1}(K) = E^{-1}(K - \{\theta\}) \cup \mathbb{C}P(n-1)$ es compacto.

■

Observaciones: Con respecto a la Proposición anterior tenemos:

1. Teniendo en cuenta la identificacion en (1) de la demostración anterior se tiene que
$$\tilde{\mathbb{C}}_0^n = (z,[z]); z \in \mathbb{C}^n - 0 \cup \{\theta\} \times \mathbb{C}P(n-1).$$

2. Sea la proyección canónica $\tilde{\pi} : \mathbb{C}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P(n-1)$ obtenida apartir de la relación " $\sim$ " en $\mathbb{C}^n - \{0\}$,para la construcción de $\mathbb{C}P(n-1)$, es claro que la aplicación $\tilde{\pi}$ es holomorfa, pues $(\varphi_i \circ \tilde{\pi})$ es holomorfa $\forall\ i \in \{1,...,n\}$,entonces el gráfico de $\tilde{\pi}$: $G(\tilde{\pi})$ es una variedad Holomorfa, aún más $G(\tilde{\pi}) = \{(z,[z]);\ z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\}$ es biholomorfo a $\mathbb{C}^n - \{0\}$; entonces de (1) y (2) tenemos que:
$$\tilde{\mathbb{C}}_0^n = \{(z,[z]); z \in \mathbb{C}^n - \{0\}\} \cup \{0\} \times \mathbb{C}P(n-1) \approx (\mathbb{C}^n - \{0\}) \cup \mathbb{C}P(n-1),$$
entonces teniendo en cuenta las identificaciones en (1) y (2) tenemos el siguiente resultado:
$$\tilde{\mathbb{C}}_0^n = (\mathbb{C}^n - \{0\}) \cup \mathbb{C}P(n-1).$$

3. De la Observaciones anteriores (2) y de (3) podemos ver que que el origen 0 es remplazado por el proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$, ya que $\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)$ es una copia fiel (desde el punto de vista biholomorfo) de $\mathbb{C}^n - \{0\}$.

4. Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$, y sea $p \in U$, también se puede construir, de manera análoga al caso anterior, el Blow-up centrado en $p \in U$, denotándolo por $\tilde{U}_p$.

5. Transformado Estricto de Foliaciones

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo y $p \in U$ una singularidad aislada de Z, se sabe que las soluciones de la ecuaci'on diferencial ordinanria compleja $z' = Z(z)$ asociada al campo Z , induce una foliación $\mathcal{F}_Z$ en una vecindad de $p \in U$, como $p \in U$ es una singularidad aislada de Z, entonces existe una veciendad abierta U_p de p en la que el $p \in U_p$ es la única singularidad y los demás puntos de $U_p - \{p\}$ son puntos regulares, por el Teorema del Flujo Tubular nos dice que las órbitas alrededor de un punto regular las puedo enderezar mediante una conjugacion analítica local, entonces ya sabemos como se comporta localmente. Lo interesante sería ver que pasa alrededor del punto singular p. Es decir, como se comporta las órbitas alrededor del punto p, una manera de poder observar es "levantándola.ª $\tilde{U}_p$ vía el Blow-up $E : \tilde{U}_p \longrightarrow U$ (mediante el *Pull-Back de* Z bajo el biholomorfismo $E_{|_{\tilde{U}_p - \mathbb{C}P(n-1)}}$). Formando una nueva foliación que será llamada *El Transformado Estricto de* $\mathcal{F}_Z$ y será denotado por $\mathcal{F}_{\tilde{Z}}$.

Veamos que significa "levantarün campo holomorfo, en el caso general.

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo y $p \in U$ una singularidad aislada de Z, sea la ecuación diferencial ordinaria compleja
$$z' = Z(z) \tag{1}$$
asociada al campo Z, y sea $F : V \longrightarrow U$ un biholomorfismo ($V \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto). Si $z = F(w)$, entonces: $F'(w)w' = z' = Z(z) = Z(F(w))$ luego:
$$w' = [F'(w)]^{-1} Z(F(w)) = [(F^{-1})'(F(w))]Z(F(w)) = ([(F^{-1})'.Z] \circ F)(w), \tag{2}$$
donde $F^*(Z) = [(F^{-1})'.Z] \circ F$ es el **Pull-Back** *de* Z bajo F, observe que $F^*(Z) : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un campo vectorial holomorfo, entonces en el sistema (2) se tiene: $w' = F^*(Z)(w)$, además

que F es una conjugación analítica entre los campos Z y $F^*(Z)$ i.e $Z \sim_{ana} F^*(Z)$, entonces las soluciones de la ecuación (2) son transformadas por F en soluciones de la ecuacón (1) (ver [4], [7] y [8]).

Por simplicidad supongamos que $U = \mathbb{C}^n$, $p = 0 \in \mathbb{C}^n$ (singularidad aislada). Como el *Blow-up* $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un biholomorfismo entre $\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)$ y $\mathbb{C}^n - \{0\}$, entonces podemos hacer todo el procedimiento anterior, considerando el *Pull-Back de* Z restringido a $\mathbb{C}^n - \{0\}$. Entonces $E^*(Z)$ es un campo vectorial holomorfo sobre $\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)$, el problema es que no está definido sobre toda la variedad $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$, nos falta extender sobre el proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$, pues en esta zona es la que nos dara información de lo que pasa en el origen. Más adelante se verá que $E^*(Z)$ es extendido a todo $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$.

Sea $Z = \sum_{i=1}^n Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ un campo vectorial holomorfo tal que $m_p(Z) = \nu$, así tenemos:

$$Z_i(z_1, ..., z_n) = \sum_{k \geq \nu} Z_k^i(z_1, ..., z_n) \tag{3}$$

donde Z_k^i son polinomios homogéneos de grado k, obtenidos al desarrollar Z_i como series de potencias alrededor del origen, $1 \leq i \leq n$.

Realizamos el Pull-Back del campo Z bajo la aplicación del Blow-up. Viendo a $E^*(Z)$ con la j-ésima carta del Blow-up tenemos:

$$E(y_1, ..., y_n) = (z_1, ..., z_n),$$

donde $z_i = y_i y_j$ si $i \neq j$ y $z_j = y_j$.

El divisor (espacio proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$) es dado por:

$$E^{-1}(0) = \{(y_1, ..., y_n) : y_j = 0\}.$$

En esta carta, el pull-back de Z por E es generado por:

$$E^*(Z) = (Z_j \circ E)\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \left(\frac{Z_i \circ E - y_i Z_j \circ E}{y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{4}$$

De (3):

$$(Z_j \circ E)(y) = \sum_{k \geq \nu} y_j^k Z_k^j(\hat{y}),$$

donde $y = (y_1, ..., y_n)$ y $\hat{y} = (y_1, ..., y_{j-1}, 1, y_{j+1}, ..., y_n)$.
Luego tenemos:

$$E^* Z(y) = \left(\sum_{k \geq \nu} y_j^k Z_k^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \left(\sum_{k \geq \nu} y_j^{k-1} [Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y})] \right) \frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{5}$$

Se presenta dos casos:

Caso I: Si $\exists i \neq j$ tal que $Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y}) \neq 0$.
En este caso $E^*(Z)$ es divisible por $y_j^{\nu-1}$, denotamos:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(y) = &\ \frac{E_1^*(Z)(y)}{y_j^{\nu-1}}, \text{ luego tenemos:} \\ \tilde{Z}(y) = &\ y_j Z_\nu^j(\hat{y}) \tfrac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \left([Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y})] \right) \tfrac{\partial}{\partial y_i} + y_j \tilde{Y}(y), \end{aligned}$$

donde $\tilde{Y}$ es un campo vectorial holomorfo.

Observe que en este caso se tiene que $E^{-1}(0)$ es invariante por $\mathcal{F}_Z$, donde $\mathcal{F}_Z$ es la foliación generada por $\tilde{Z}$. Así $E^*(Z)$ se extiende sobre el conjunto $\{y_j = 0\}$.

CASO II: Si $\forall 1 \leq i \leq n$ con $i \neq j$ se tiene $Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y}) = 0$.
En este caso $E^*(Z)$ es divisible por y_j^ν, denotemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}(y) = &\ \frac{E_1^*(Z)(y)}{y_j^\nu}, \text{ luego tenemos:} \\
\tilde{Z}(y) = &\ Z_\nu^j(\hat{y})\frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \Big([Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^j(\hat{y})] \Big) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_j \tilde{W}(y),
\end{aligned}$$

donde $\tilde{W}$ es un campo vectorial holomorfo.

Observe que en este caso se tiene que $E^{-1}(0)$ no es invariante por $\mathcal{F}_Z$, donde $\mathcal{F}_Z$ es la foliación generada por $\tilde{Z}$. Así $E^*(Z)$ se extiende sobre el conjunto $\{y_j = 0\}$.

De los dos casos anteriores, se tiene la siguiente:

Definición 5.1 *Al campo holomorfo $\tilde{Z}$, que es la extensión de $E^*(Z)$ en todo $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$, se le llama el Transformado Estricto del Campo Z por E.*

Como consecuencia del análisis anterior se tiene los siguientes dos teoremas:

Teorema 5.2 *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo, $0 \in U$ una singularidad aislada de Z y $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la aplicación Blow-up (en la j-ésima carta) centrada en 0, tal que si $\exists i \neq j$ tal que $Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y}) \neq 0$ entonces $E^*(Z)$ se extiende a una función holomorfa*

$$\tilde{Z} = \frac{E^*(Z)}{y_j^{\nu-1}},$$

donde $\tilde{Z}$ esta definida sobre todo $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$. Además $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ es invariante por $\mathcal{F}_Z$.

Demostración. Es una consecuencia directa del análisis anterior vista en el caso I. ■

Teorema 5.3 *Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo, $0 \in U$ una singularidad aislada de Z y $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la aplicación Blow-up (en la j-ésima carta) centrada en 0, tal que si $\forall 1 \leq i \leq n$ con $i \neq j$ se tiene $Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y}) = 0$ entonces $E^*(Z)$ es extendido a una función holomorfa*

$$\tilde{Z} = \frac{E^*(Z)}{y_j^{\nu}},$$

donde $\tilde{Z}$ esta definida sobre todo $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$. Además $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ es no invariante por $\mathcal{F}_Z$.

Demostración. Es una consecuencia directa del análisis anterior vista en el caso II. ■

6. Singularidad Dicrítica

Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un campo vectorial holomorfo, $0 \in U$ una singularidad aislada de Z, sea $E : \tilde{\mathbb{C}}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la aplicación Blow-up centrada en 0 y $\tilde{Z}$ es el Transformado Estricto de Z por E. Siguiendo con las notaciones de la sección anterior, siguiendo con las ideas de [1], [2] y [3] y gracias a los Teoremas 5.2 y 5.3 se tienen las siguiente definiciones:

Definición 6.1 *Decimos que* $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una* ***Singularidad no Dicrítica*** *de* Z *cuando* $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ *es invariante por* $\mathcal{F}_Z$.

Definición 6.2 *Decimos que* $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una* ***Singularidad Dicrítica*** *de* Z *cuando* $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ *no es invariante por* $\mathcal{F}_Z$.

Observaciones:

1) Del Teorema 5.2 se tiene: Si para cada $j \in \{1, ..., n\}$ $\exists\ i \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ tal que

$$z_i Z_\nu^j - z_j Z_\nu^i \not\equiv 0$$

si y sólo si $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una Singularidad no Dicrítica de* Z.

2) Note que en cualquiera de los dos casos $\mathcal{F}_{E^*(Z)}$ y $\mathcal{F}_Z$, las foliaciónes generadas por $E^*(Z)$ y el Transformado Estricto $\tilde{Z}$ respectivamente, coinciden fuera del divisor $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$, pues $\tilde{Z} = \dfrac{1}{y_j^k}\ E^*(Z)$ en la j-esima carta, donde $k = \nu - 1$ si $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una* ***Singularidad no Dicrítica***, $k = \nu$ si $0 \in \mathbb{C}^n$ *es una* ***Singularidad Dicrítica.***

3) Teniendo una foliación $\mathcal{F}_Z$ en $\mathbb{C}^n$, llegamos a obtener una foliación $\mathcal{F}_{E^*(Z)}$ sobre $\tilde{\mathbb{C}}_0^n - \mathbb{C}P(n-1)$, la cual se extiende de manera única , obteniendo una foliación $\mathcal{F}_Z$ sobre $\tilde{\mathbb{C}}_0^n$ la cual es llamada el Transformado Estricto de $\mathcal{F}_Z$ (o de Z).

7. Conclusiones

1. Dado un campo vectorial holomorfo con una singularidad aislada, gracias a la herramienta Blow-up es posible encontrar otro campo vectorial holormofo sobre una variedad compleja de tal forma que entodos sus puntos regulares coincida con el campo original desde el punto de vista holomorfo y que la singularidad aislada es reemplazada por un espacio prorectivo n-1 dimensional.

2. En el transformado estricto $\tilde{Z}$ vía el Blow-up E sobre el campo Z se puede observar una caracterización de singularidades. Esto es viendo si el espacio proyectivo $\mathbb{C}P(n-1)$ es o no es invariante por el campo $\tilde{Z}$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] R Benazic, Carcaterización de Singularidades Dicríticas en foliaciónes de dimensión uno, PESQUIMAT, Vol I, N°1, (1998), p.73-81.

[2] C. Camacho, P. Sad, Pontos singulares de Equações Diferenciais Analíticas, 16° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1987)

[3] C. Camacho, Holomorphic Dynamical Systems, Summer School on Dynamical Systems, ICTP, Triestre-Italia,(16 August - 9 September, (1988).

[4] C. Camacho e A. Lins Neto, Teoria geométrica das folheações, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (1979).

[5] E. Chirka, Complex Analytic Sets, MIA, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, Boston, London (1989).

[6] H. Cartan, Elementary theory of Analytic Funcions of one or several Complex variables, Dover Publications, INC, New York, (1995).

[7] X. Gomez-Mont y L. Ortiz-Bobadilla, Sistemas Dinamicos Holomorfos en Superficies, Sociedad Matemática Mexicana, Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M, (1989).

[8] G. Soares M. G. e Mol S. M ., Indices de Campos Holomorfos e Aplicações, 23° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (2001).

[9] A. Lins Neto e B. Azevedo Scárdua, Folheações Algébraicas Complexas, 21° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1997).

[10] E. Lages Lima, Variedades Diferenciáveis, Monografías de Matemática, N°15, IMPA, Rio de Janeiro, (1973).