

ALGORITMOS PARALELOS PARA LA ECUACIÓN DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS

*Juan Luna Valdez*¹, *Zaida Sales Risco*²

(Recibido: 22/10/2015 - Aceptado: 24/11/2015)

Resumen: En este trabajo se pretende desarrollar algoritmos para la simulación de problemas de la dinámica de fluidos cuyo modelo matemático esta representado por ecuaciones en derivadas parciales. Se ha tomado en cuenta que el medio es continuo donde el análisis de las partículas elementales se realiza de manera local, es decir, se busca la descripción a través de su expresión más elemental, donde las condiciones de frontera suponen que el viaje de las partículas a una distancia es constante entre una y otra, cuyas dinámicas son hasta cierto punto independientes. Se desarrolla el modelo a partir de las ecuaciones de fluidos viscosos con características homogéneas de Burgers.

Palabras clave: Medio continuo. Ecuaciones de fluidos. Viscosidad. Descomposición de operadores. Esquemas de discretización.

PARALLEL ALGORITHMS FOR THE EQUATION OF FLUID DYNAMICS

Abstract: This paper aims to develop algorithms for the simulation of problems of fluid dynamics mathematical model which is represented by partial differential equations. It has taken into account that the medium is continuous where the analysis of elementary particles is done locally, that is, the description searches through its simplest expression, where the boundary conditions assume that the journey of the particles at a distance it is constant between them, whose dynamics are somewhat independent. The model was developed based on the equations of viscous fluids with similar characteristics Burgers.

Keywords: Middle continue. Fluid equations. Viscosity. Operator splitting. Discretization schemes.

1. Introducción

La descripción matemática del estado de un fluido en movimiento, en una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ó 3) durante un intervalo de tiempo $[0, T]$, se realiza por medio de una función que determina la distribución del campo de velocidades del mismo $u(x, t)$ y de cualesquiera de las variables termodinámicas asociadas.

La ecuación de Burgers se trata además de una ecuación no lineal que surge de manera natural cuando uno quiere entender las ecuaciones de Euler y también es un caso particular de la ecuación de Navier-Stokes, pues “refleja” (más o menos) el comportamiento de una ola, ver [1] y [3].

¹UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: jlunav@unmsm.edu.pe

²UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: zaida.sales@unmsm.edu.pe

La ecuación del movimiento del fluido se obtiene a partir del principio de conservación de cantidad de movimiento, que establece la relación entre las variables de los fenómenos físicos, que están dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

donde : $\gamma > 0$ es la viscosidad.

2. Preliminares

Analizaremos brevemente los métodos de separación de operadores para la resolución de las ecuaciones de la dinámica de fluidos que están dados por la ecuación de Burgers viscosa (1). La mayor parte de las ideas que aquí se utiliza serán útiles también en el contexto de las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes.

La ecuación (1) está dado por dos ecuaciones. Por una parte la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

y por otra parte, la ecuación de Burgers sin viscosidad

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) = 0 \quad (3)$$

En este tipo de situaciones, en los que el modelo en consideración incorpora dos subsistemas bien reconocibles, es natural utilizar métodos de descomposición o separación que permiten obtener la solución del sistema global a partir de la solución de cada subsistema y por otra parte aplicar a cada uno de los subsistemas un método numérico específico.

Teorema 2.1 (Teorema de Lie-Trotte) *Dadas las matrices cuadradas A y B de orden $N \times N$ se tiene*

$$e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} \right)^n \quad (4)$$

Demostración. Ver [4] y [5] ■

Por el Teorema de Lie, para dos matrices de orden $N \times N$, A_1 y A_2 cualesquiera se tiene

$$e^{A_1+A_2} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(e^{A_1/j} e^{A_2/j} \right)^j$$

Esto resulta de utilidad a la hora de resolver la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A_1 + A_2) x, & t \in R \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5)$$

donde su solución es de la forma

$$x(t) = e^{(A_1+A_2)t} x_0 \quad (6)$$

La ecuación de Burgers viscosa (1) puede entenderse también como un problema de la forma (5), en este caso la incognita $u = u(x, t)$, $t > 0$ es una función que depende de x y por tanto pertenece a un espacio de dimensión infinita, A_1 es el operador diferencial $A_1 u = \partial_x^2 u$ y A_2 es el operador no lineal $A_2 u = -(u^2)_x$.

Ahora vamos hacer esquemas de descomposición para las discretizaciones de estas ecuaciones.

Consideremos el modelo (5) que se puede discretizar en tiempo con el tamaño de paso Δt , reemplazando la derivada $x'(t)$ por un cociente incremental en el intervalo $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$. El tipo de esquemas de descomposición que se va a utilizar se basan en la utilización de un nodo

adicional (o varios), por ejemplo en el punto medio $(n + \frac{1}{2}) \Delta t$, de modo que en cada subintervalo $[n\Delta t, (n + \frac{1}{2}) \Delta t]$ y $[(n + \frac{1}{2}) \Delta t, (n + 1) \Delta t]$, se tiene que (5) es un sistema en el que domina A_1 o A_2 .

En lo que sigue analizaremos la validez de las discretizaciones temporales a la hora de aproximar las soluciones de las EDP de evolución.

Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f, & \text{en } (0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (7)$$

donde $A : H \rightarrow H$, H es un espacio de Hilbert.

Para resolver este tipo de problema usaremos el método de descomposición de operadores. Este método consiste en descomponer A en suma de dos operadores

$$A = A_1 + A_2 \quad (8)$$

de manera que A_1 y A_2 sean más “sencillos” de resolver por separado.

3. Algoritmos Paralelos

3.1. Esquema de Peaceman-Rachford

Este método consiste en la separación de operadores. Se tiene el siguiente esquema de discretización de Peacema-Rachford:

$$\begin{cases} u^0 = u^0 \\ \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\Delta t/2} + A_1(u^{n+1/2}) + A_2(u^n) = f^{n+1/2} \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t/2} + A_1(u^{n+1/2}) + A_2(u^{n+1}) = f^{n+1} \end{cases} \quad (9)$$

Se observa que el esquema así obtenido es doblemente implícito, la primera vez es al pasar de u^n a $u^{n+1/2}$ (implícita para A_1) y después al pasar de $u^{n+1/2}$ a u^{n+1} (implícita para A_2). En cada caso, nos apoyamos principalmente en uno de los operadores A , considerando al otro como una perturbación que incorpora la información del paso anterior, ver [2].

Ejemplo 3.1 *Aplicar este método a la ecuación del calor*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = 0, & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), & \text{en } \Omega \\ \varphi = g, & \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} \quad (10)$$

En este caso se puede descomponer el operador laplaciano como

$$-\Delta = \underbrace{-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}_{A_1} - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}}_{A_2}$$

así, primero calculamos $\varphi^{n+1/2}$, luego φ^{n+1} con el siguiente esquema

$$\begin{cases} \varphi^0 = u^0 \\ \frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\Delta t/2} - \frac{\partial^2 \varphi^{n+1/2}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial x_2^2} \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\partial^2 \varphi^{n+1}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \varphi^{n+1/2}}{\partial x_1^2} \end{cases} \quad (11)$$

Si $\Omega = (0, 1)^2$ y se discretiza usando diferencias finitas, por ejemplo con N nodos interiores por dirección, se tienen dos sistemas de ecuaciones cuyas matrices son tridiagonales e idénticas. Por tanto, el algoritmo se reduce a resolver una serie de sistemas cuya matriz es siempre la misma y tridiagonal. El esquema resultante es el método de la direcciones alternadas.

Convergencia y Comportamiento Asintótico

Consideremos el caso del sistema más sencillo posible

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

donde A es una matriz simétrica, definida negativa, para que la solución sea de la forma

$$u(t) = e^{At}u_0$$

Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ son los autovalores de la matriz A y $e_1, e_2, \dots, e_N$ los correspondientes autovectores, las soluciones son las combinaciones lineales de soluciones elementales de la forma

$$u(t) = e^{\lambda_j t} e_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

como $\lambda_j \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$, se tiene que

$$|u(t)| \leq |u_0|, \quad \forall t \geq 0$$

para toda solución.

Ahora descomponemos la matriz A como

$$A = \alpha A_1 + \beta A_2$$

de modo que

$$A_1 = \alpha A, \quad A_2 = \beta A$$

con

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

El método de Paeceman-Rachford dado en (9) con $f = 0$, se puede escribir como

$$\begin{cases} u^0 = u_0 \\ u^{n+1} + \alpha \frac{\Delta t}{2} A u^{n+1/2} = u^n - \beta \frac{\Delta t}{2} A u^n \\ u^{n+1} + \beta \frac{\Delta t}{2} A u^{n+1} = u^{n+1/2} - \alpha \frac{\Delta t}{2} A u^{n+1/2} \end{cases}$$

Aplicando el esquema de descomposición (9) se tiene

$$u^{k+1} = \left(I - \frac{\Delta t}{2} \beta A \right)^{-1} \left(I + \frac{\Delta t}{2} \alpha A \right) \left(I - \frac{\Delta t}{2} \alpha A \right)^{-1} \left(I + \frac{\Delta t}{2} \beta A \right) u^k$$

Iterando esta identidad se tiene

$$u^k = \left(I - \frac{\Delta t}{2} \beta A \right)^{-k} \left(I + \frac{\Delta t}{2} \alpha A \right)^k \left(I - \frac{\Delta t}{2} \alpha A \right)^{-k} \left(I + \frac{\Delta t}{2} \beta A \right)^k u^0$$

Al aplicar esta identidad en la dirección de cada uno de los vectores propios e_j , es decir, con $x^0 = e_j$, se tiene que

$$u_j^k = \left(\frac{1 + \frac{\Delta t}{2} \alpha \lambda_j}{1 - \frac{\Delta t}{2} \alpha \lambda_j} \right)^k \left(\frac{1 + \frac{\Delta t}{2} \beta \lambda_j}{1 - \frac{\Delta t}{2} \beta \lambda_j} \right)^k e_j$$

teniendo en cuenta que

$$\left| \frac{1+\xi}{1-\xi} \right| \leq 0, \quad \forall \xi < 0$$

se deduce la estabilidad del esquema puesto que

$$|u_j^k| \leq |e_j|, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N$$

Además en el caso en que $\lambda_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, N$ en el que $u(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ exponencialmente, la solución discreta también reproduce este comportamiento puesto que

$$\left| \frac{1 + \frac{\Delta t}{2} \alpha \lambda_j}{1 - \frac{\Delta t}{2} \alpha \lambda_j} \right| < 1, \quad \left| \frac{1 + \frac{\Delta t}{2} \beta \lambda_j}{1 - \frac{\Delta t}{2} \beta \lambda_j} \right| < 1, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Para estudiar con mas detalle este esquema introducimos la función racional

$$R_1(\xi) = \left(\frac{1 + \frac{\alpha \xi}{2}}{1 - \frac{\alpha \xi}{2}} \right) \left(\frac{1 + \frac{\beta \xi}{2}}{1 - \frac{\beta \xi}{2}} \right)$$

que admite, en un entorno de $\xi = 0$, el desarrollo de Taylor

$$R_1(\xi) = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) \frac{\xi^3}{4} + O(\xi^4)$$

mientras que la función exponencial que interviene en la resolución de la ecuación diferencial tiene el desarrollo

$$e^\xi = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} + O(\xi^4)$$

De estos desarrollos de Taylor se deduce que el esquema es consistente de orden dos para cualquier elección de los parámetros $0 < \alpha, \beta < 1$ tal que $\alpha + \beta = 1$. La menor diferencia en el término de orden 3 se produce para la elección $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

El esquema es por tanto convergente de orden 2.

3.2. El θ -Método

Supongamos que $H = R^N$, $f = 0$, u_0 , $A \in M_{n \times n}$ matriz simétrica y definida positiva. Resolver numéricamente el siguiente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = 0, & \text{en } (0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

cuya solución exacta es

$$u(t) = e^{-tA} u_0$$

Consideremos la partición del intervalo de la siguiente forma

$$n\Delta t \quad (n + \theta)\Delta t \quad (n + 1 - \theta)\Delta t \quad (n + 1)\Delta t$$

con

$$A_1 = \alpha A, \quad A_2 = \beta A$$

y

$$0 < \alpha, \beta < 1, \quad \alpha + \beta = 1$$

además

$$0 < \theta < 1, \quad \theta' = 1 - 2\theta$$

El θ - *esquema* consiste en lo siguiente, conocido u^k , calculamos $u^{k+\theta}$, $u^{k+1-\theta}$ y u^{k+1} del siguiente modo:

$$\begin{cases} u^0 = u_0 \\ \frac{u^{k+\theta} - u^k}{\theta \Delta t} = A_1(u^{k+\theta}, (k+\theta)\Delta t) + A_2(u^k, k\Delta t) \\ \frac{u^{k+1-\theta} - u^{k+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} = A_1(u^{k+\theta}, (k+\theta)\Delta t) + A_2(u^{k+1-\theta}, (k+1-\theta)\Delta t) \\ \frac{u^{k+1} - u^{k+1-\theta}}{\theta \Delta t} = A_1(u^{k+1}, (n+1)\Delta t) + A_2(u^{k+1-\theta}, (k+1-\theta)\Delta t) \end{cases} \quad (12)$$

Para mayor información sobre el θ - *esquema*, ver [2].

Convergencia y Comportamiento Asintótico

Se tiene lo siguiente

$$u^{k+1} = (I - \alpha\theta\Delta t A)^{-2} (I + \beta\theta\Delta t A)^2 (I - \beta\theta'\Delta t A)^{-1} (I + \alpha\theta'\Delta t A) u^k \quad (13)$$

Si hacemos la diagonalización de la matriz, se tiene que, respecto de una base de autovectores cada componente se puede escribir como

$$u_j^k = \frac{(1 + \beta\theta\Delta t \lambda_j)^{2k} (1 + \alpha\theta'\Delta t \lambda_j)^k}{(1 - \alpha\theta\Delta t \lambda_j)^{2k} (1 - \beta\theta'\Delta t \lambda_j)^k} e_j$$

Definimos la función racional característica del esquema como

$$R_3(\xi) = \frac{(1 + \beta\theta\xi)^2 (1 + \alpha\theta'\xi)}{(1 - \alpha\theta\xi)^2 (1 - \beta\theta'\xi)}$$

Como

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} R_3(\xi) = \frac{\beta}{\alpha},$$

para alcanzar la estabilidad del esquema es necesario imponer la condición $\alpha \geq \beta$, y la condición $\alpha > \beta$ para alcanzar la estabilidad absoluta.

La estabilidad incondicional del esquema exige que

$$|R_3(\xi)| \leq 1, \quad \forall \xi \in R^-$$

Un análisis más cuidadoso permite probar que

$$|R_3(\xi)| < 1, \quad \forall \xi \in R^-$$

se verifica cuando θ, α y β están en el rango

$$\theta \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right), \quad 0 < \beta < \alpha < 1, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Por otra parte

$$R_3(\xi) = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} [1 + (\beta - \alpha)(2\theta^2 - 4\theta + 1)] + O(\xi^3)$$

de modo que el sistema es consistente de orden dos si y solo si

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad (*)$$

o bien

$$\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (**)$$

Si se elige $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ se pierde la estabilidad absoluta. Por tanto conviene elegir $\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Al aplicar el θ -método en el contexto de las EDP, es conveniente que en cada una de las tres ecuaciones de (12) la ecuación sea la misma, esto conduce a la condición

$$\alpha\beta = \beta(1 - 2\theta)$$

lo cual implica

$$\alpha = \frac{1 - 2\theta}{1 - \theta}, \quad \beta = \frac{\theta}{1 - \theta} \quad (***)$$

combinando (***) con la condición $\alpha > \beta$ se deduce que $0 < \theta < \frac{1}{3}$.

3.3. Aplicación del Método de Descomposición a la Ecuación de Burgers

Vamos a aplicar el θ -método anterior a la ecuación de Burgers viscosa:

$$\begin{cases} u_t - \gamma u_{xx} + (u^2)_x = f, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u = 0, & x = 0, \quad 1; \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < 1 \end{cases} \quad (14)$$

Consideremos que el problema está dado en un abierto acotado con condiciones de contorno de Dirichlet.

Aplicando el θ -método obtenemos la siguiente sucesión de ecuaciones:

$$\{u^{k+\theta} = 0, \quad x = 0, 1 \quad (15)$$

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1-\theta} - u^{k+\theta}}{(1 - 2\theta)\Delta t} - \beta\gamma u_{xx}^{k+1-\theta} + ((u^{k+1-\theta})^2)_x = f^{k+\theta} + \alpha\gamma u_{xx}^{k+\theta}, & 0 < x < 1 \\ u^{k+1-\theta} = 0, & x = 0, 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - u^{k+1-\theta}}{\Delta t} - \alpha\gamma u_{xx}^{k+1} = f^{k+1} + \beta\gamma u_{xx}^{k+1-\theta} - ((u^{k+1-\theta})^2)_x, & 0 < x < 1 \\ u^{k+1} = 0, & x = 0, 1 \end{cases} \quad (17)$$

Las ecuaciones (15) y (17) se reducen a resolver el problema de Dirichlet lineal, que puede ser resuelto por el método de elementos finitos, lo cual proporciona un esquema completamente discreto.

La ecuación (16) es no-lineal aunque los experimentos numéricos indican que se obtienen esencialmente los mismos resultados si la no-linealidad $((u^{k+1-\theta})^2)_x$ se sustituye por $2(u^{k+\theta}(u^{k+1-\theta})_x)$, en cuyo caso el sistema reducido que se obtiene tiene la virtud de ser lineal.

4. Conclusión

En este trabajo se presentan algoritmos de separación de operadores para linealizar los problemas no lineal de Burgers, esta misma técnica se puede aplicar al problema de Navier-Stokes que es un problema no lineal y es la que representa mejor a la ecuación de la dinámica de fluidos, y esta debe ser materia de estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Alves, J. C. (2005). *Curso de Física-Matemática*. Universidade de Sao Paulo, Instituto de Física.
- [2] Bristeau, M. O., Glowinski, R. (1987). *Numerical methods for the Navier-Stokes equations*. Computer Physics Reports Vol 6: 73-187.
- [3] Evans, L. C. (1988). *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*. Vol.19, AMS.
- [4] Exner P., Neidhardt H., Zagrebnov V. (2011). *Remarks on the Trotter-Kato product fórmula for unitary groups*. Integral Equations and Operator Theory 69: 451-478.
- [5] Sabina de Lis, J. C. (2014). *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Universidad de La Laguna, Departamento de Análisis Matemático.