PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVIII N°1, pp. 71-75, Lima - Perú, Diciembre 2015

NO EXISTENCIA DE FUNCIONES CONTINUAS ENTRE CONTINUOS HEREDITARIAMENTE DESCOMPONIBLES E INDESCOMPONIBLES

William Olano [1], ***Adrian Aliaga***[2], ***Marco Rubio***[3]

(Recibido: 15/10/2015 - Aceptado: 30/11/2015)

Resumen: En el presente artículo detallaremos una demostración de la proposición: no existencia de funciones continuas entre continuos hereditariamente descomponibles e indescomponibles.

Palabras clave: Continuos, continuos hereditariamente descomponibles y continuos indescomponible.

NO EXISTENCE OF CONTINUOUS FUNCTIONS BETWEEN CONTINUOUS HEREDITARILY DECOMPOSABLE AND INDECOMPOSABLE

Abstract: In this paper will detail a demonstration of the proposition : absence of functions between continuous decomposable and indecomposable hereditarily.

Keywords: Continuous , on going and continuous indecomposable hereditarily decomposable.

1. Introducción

El presente trabajo pertenece a la rama de la topología conocida como **Teoría de los Continuos**. Dicha temática trata del estudio de las propiedades topológicas de los espacios que son métricos, no vacíos, compactos y conexos. A un espacio topológico con las propiedades antes mencionadas se le llama **continuo**. Mediante la teoría de continuos detallaremos la demostración del siguiente teorema: ¿exitirán funciones continuas entre continuos hereditariamente descomponibles e indescomponibles? La respuesta es no ([4]).

Este último resultado abre una línea de trabajo en el campo de la topología y más concretamente en la de los encajes ordenados en hiperespacios de continuos ([1]).

2. Prelimirares

Definición 2.1 *Un **continuo** es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío.*

Definición 2.2 *Sean X un continuo y A un subconjunto de X. Se dice que A es un **subcontinuo** de X, si A es un continuo.*

Definición 2.3 *Un continuo es **no degenerado** si contiene más de un punto. En caso contrario, diremos que el continuo es **degenerado**.*

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: wcolano@hotmail
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: agaliagall@hotmail.com
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: antoniorubiog@gmail.com

Ejemplos de continuos son: El intervalo unitario, el círculo, el triodo, la figura ocho, cualquier gráfica finita, el toro, la cerradura de la gráfica de la función sen $\frac{1}{x}$, el círculo de Varsovia, el cono del conjunto de Cantor y muchísimos más, que usted podrá encontrar en artículos escritos sobre hiperespacios de continuos ([1]).

Definición 2.4 *Un continuo X es* ***descomponible*** *si $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de X. Diremos que un continuo X es* ***indescomponible*** *si no es descomponible.*

Es un hecho conocido que el continuo de Igram, el arco iris de Knaster y el selenoide diadico son continuos indescomponibles.

Definición 2.5 *Sea X un continuo. Decimos que X es* ***hereditariamente*** *descomponible si cada continuo $Y \subset X$ con más de un punto es descomponible.*

Definición 2.6 *Una colección de subconjuntos $\mathcal{F}$ de un espacio X es una* ***cadena*** *en X si para cualesquiera elementos A y B en $\mathcal{F}$ se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$.*

Definición 2.7 *Una colección $\mathcal{C}$ de subconjunto de X se dice que tiene la* ***propiedad de la intersección finita*** *si cada subcoleción finita $\{C_1, \ldots, C_n\}$ de $\mathcal{C}$ se tiene la intersección no vacía, es decir, $C_1 \cap \ldots \cap C_n$ es no vacía.*

Definición 2.8 *Dado un conjunto A, una relación $\leq$ sobre A se denomina* ***orden parcial estricto*** *sobre A si tiene las siguientes propiedades:*

a) *(No-reflexiva) la relación $a \leq a$, nunca se cumple.*

b) *(Transitividad) si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.*

Definición 2.9 *Sea α elemento de un conjunto parcialmente ordenado Γ, por una relación $\leq$. Decimos que α es un* ***elemento minimal*** *en Γ si, para todo $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma \leq \alpha$, se tiene que $\gamma = \alpha$.*

Notación.- Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de X. La intersección de los elementos de $\mathcal{C}$, la denotaremos por $\bigcap \mathcal{C}$. Es decir, $\bigcap\limits_{C \in \mathcal{C}} C$.

Teorema 2.10 *Si $\mathcal{F}$ es una cadena de conjuntos cerrados en un espacio compacto X. Sea U un conjunto abierto de X tal que $\bigcap \mathcal{F} \subset U$, entonces existe un elemento A en $\mathcal{F}$ tal que $A \subset U$.*

Demostración

Sea X y $\mathcal{F}$ como se indican. Supongamos que, para todo $A \in \mathcal{F}$, A no contenido propiamente en U. Denotemos $\mathcal{A} = \{A - U \mid A \in \mathcal{F}\}$. Se tiene que $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Veamos que la colección $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita: como $\mathcal{F}$ es una cadena, para cada subcolección finita, $A_1, \ldots, A_n$, de elementos de $\mathcal{F}$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $A_i \subset A_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, luego, $\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j - U = A_i - U \neq \emptyset$.

Ahora, como X es compacto, se sigue que $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$, ([3],5.9;17). Luego, puesto que $\bigcap \mathcal{A} = \left(\bigcap \mathcal{F}\right) - U$, se obtiene que $\bigcap \mathcal{F}$ no esta contenido propiamente en U. Así, el teorema está demostrado.■

Teorema 2.11 *Si $\mathcal{F}$ es una cadena de subconjuntos cerrados, conexos y no vacíos, de un espacio de Hausdorff, compacto y conexo X, entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es un conjunto compacto, conexo y no vacío en X.*

Demostración

Como la intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, se tiene que $\bigcap \mathcal{F}$ es un conjunto cerrado y, es un conjunto compacto en X. Por otra parte, notemos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita (ya que es una cadena de conjuntos no vacíos), luego, por la compacidad de X, se obtiene que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, ([3],5.9;17). Así, resta mostrar que $\bigcap \mathcal{F}$ es conexo.

Supongamos que $\bigcap \mathcal{F} = A \cup B$, donde A y B son conjuntos cerrados y disjuntos. Probaremos que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Como X es de Hausdorff y compacto, se tiene que X es un espacio normal, así podemos considerar abiertos U y V, en X tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Se tiene que $\bigcap \mathcal{F} \subset U \cup V$ y $U \cup V$ es un conjunto abierto en X. Luego, por el Teorema 2.10, existe un elemento $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset U \cup V$. Como F es conexo y U y V son abiertos disjuntos, se tiene que $F \subset U$ o $F \subset V$. Sin perder generalidad, suponemos que $F \subset U$. Ahora, puesto que $\bigcap \mathcal{F} \subset F$, se tiene que $A \cup B \subset F$ y, en consecuencia, $B \subset U$. Así $B \subset U \cap V = \emptyset$, por lo cual $B = \emptyset$. Esto prueba que $\bigcap \mathcal{F}$ es conexo.■

3. Resultado principal

Teorema 3.1 *(Teorema de reducción de Brouwer)*
Sean X un espacio métrico con una base numerable y $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos cerrados de X, ordenada parcialmente por la inclusión de conjuntos. Si para toda sucesión decreciente en $\mathcal{C}$, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{C}$, entonces existe un elemento minimal en $\mathcal{C}$.

Demostración

Fijemos una base numerable para X, digamos $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y un elemento $C_0 \in \mathcal{C}$. Denotemos

$$\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C} \mid C \subset C_0 \cap (X - B_1)\}.$$

Si la colección $\mathcal{C}_0$ es no vacía, fijamos un elemento $C_1 \in \mathcal{C}_0$ y, si la colección $\mathcal{C}_0$ es vacía, definimos $C_1 = C_0$. Ahora supongamos que se han determinado n elementos de $\mathcal{C}$, digamos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que $C_i \subset C_{i-1} \subset C_0$ y, si C_i está contenido propiamente en C_{i-1}, entonces $C_i \cap B_i = \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos

$$\mathcal{C}_n = \{C \in \mathcal{C} \mid C \subset C_n \cap (X - B_{n+1})\}.$$

Si la colección $\mathcal{C}_n$ es no vacía, fijamos un elemento $C_{n+1} \in \mathcal{C}_n$ y, si la colección $\mathcal{C}_n$ es vacía, definimos $C_{n+1} = C_n$.

De este modo, inductivamente, hemos determinado una sucesión decreciente, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{C}$ con la propiedad adicional de que, para cada $n \in \mathbb{N}$, si C_{n+1} está contenido propiamente en C_n, entonces $C_{n+1} \cap B_{n+1} = \emptyset$.

Denotemos $E = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Por hipótesis se tiene que $E \in \mathcal{C}$.

Vamos a probar que E es un elemento minimal en $\mathcal{C}$.

Para esto supongamos lo contrario y fijemos $D \subset E$ con $D \neq E$ tal que $D \in \mathcal{C}$. Fijemos un punto $x \in E - D$. Como D es cerrado, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_k \subset (X - D)$. Notemos que

$$B_k \cap E \neq \emptyset, \; B_k \cap D = \emptyset \quad \text{y} \quad D \subset E \subset C_{k-1}.$$

Se sigue que $D \subset C_{k-1} \cap (X - B_k)$, así, $C_{k-1} \neq \emptyset$. Luego, C_k está determinado de modo que $C_k \in \mathcal{C}$ y $C_k \subset C_{k-1} \cap (X - B_k)$. Dado que $E \subset C_k \subset (X - B_k)$, se obtiene $E \cap B_k = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Esta contradicción demuestra que E es un elemento minimal en $\mathcal{C}$.■

Para probar la **"no existencia de funciones continuas entre continuos hereditariamente descomponibles e indescomponibles"** utilizaremos el Teorema de reducción de Brouwer.

Teorema 3.2 *Si X es un continuo hereditariamente descomponible e Y es un continuo indescomponible, entonces no existen funciones continuas de X sobre Y.*

Demostración

Supongamos que exista una función continua y suprayectiva $f : X \longrightarrow Y$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{Z} = \{A \subset X \mid A \text{ es un continuo y } f(A) = Y\},$$

el cual es no vacío por hipótesis. Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{Z}$ es una cadena, sea $C_0 = \bigcap \mathcal{C}$ que es un continuo (por el Teorema (2.11)). Vamos a probar que $f(C_0) = Y$, para esto, sea $y \in Y$. Para cada $C \in \mathcal{C}$, sabemos que $f^{-1}(y) \cap C$ es compacto no vacío. La familia $\{f^{-1}(y) \cap C \mid C \in \mathcal{C}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita así que su intersección es no vacía, $f^{-1}(y) \cap C_0 \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f(C_0) = Y$.

Por el Teorema de reducción de Brouwer, existe $M \in \mathcal{Z}$ minimal. Notemos que M es indescomponible. De lo contrario, al escribir $M = A \cup B$ con $A, B \subset M$ subcontinuos propios, $Y = f(M) = f(A) \cup f(B)$; por la minimalidad de M, $f(A)$ y $f(B)$ son subcontinuos propios, lo cual implica que Y es descomponible. Esta contradicción completa la prueba.■

4. Conclusión

Hay muchos artículos escritos sobre hiperespacios de continuos. Sería imposible incluir todos los posibles resultados. Hemos presentado algunos de los más representativos. Esperamos que el lector llegue a la conclusión de que el **conjunto potencia** de un continuo es **dificil**, que sus subconjuntos que llamamos **hiperespacios de subcontinuos** tienen una bonita estructura y que, además, son más **aceptables** que los continuos en general.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Andablo, G. (2009). *Funciones entre hiperespacios de continuos y relación de orden.* Memoria de la XIX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora, México. Mosaicos Matemáticos No 32: 163–169.

[2] Robles Corbal, Carlos A., Andrade Espinoza, Martha P. (2007). *Algunas técnicas para la construcción de continuos indescomponibles.* Memoria de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Universidad de Sonora. Departamento de Matemáticas. Mosaicos Matemáticos No. 20; 151–161.

[3] Munkres, James Raymond (1975). *Topology, a first course.* Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

[4] Wlodzimierz Charatonik (2010). *Propiedades que se preservan bajo Funciones Confluentes. IV Taller de Continuos e Hiperespacios.* Morelia, Michoacan.