PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XVIII N°2, pp. 84-95, Lima - Perú, Diciembre 2015

# EL SEMIGRUPO DE VALORES DE UNA CURVA PLANA IRREDUCTIBLE ALGEBROIDE

***Frank Collantes*** [1], ***Marlo Carranza*** [2]

(Recibido: 07/10/2015 - Aceptado: 26/10/2015)

**Resumen:** Dada una curva, tenemos en virtud al teorema de Newtón-Puiseux que ella posee solución en la cerradura algebraica de

$$\mathbb{C}((X))^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}((X^{\frac{1}{n}})).$$

Sea $\varphi(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i\geq 1} b_i X^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{C}((X))^*$ tal que $f(X, \varphi(X^{\frac{1}{n}})) = 0$. Esto nos lleva a representar a $f$ en forma paramétrizada, $X = T^n$, $Y = \sum_{i\geq 1} b_i T^i$.
Mostramos resultados vitales que servirán posteriormente para desarrollar investigación sobre la teoría de singularidades de curvas algebroides planas ya sea esta representada en forma de Weierstrass o en su forma parametrizada.

**Palabras clave:** Curvas algebroides planas, transformada cuadrática, (a)-equivalencia, contacto maximal, género de una curva.

## THE SEMIGROUP OF VALUES OF AN IRREDUCIBLE PLANE CURVE ALGEBROID

**Abstract:** In this paper we present important results on the theory of irreducible plane curves, vital to develop research on the theory of singularities of plane curves algebroids is represented either in the form of Weierstrass or formal power series.

**Keywords:** Algebroids planar curves, quadratic transformation, (a)-equivalence, maximal contact, a genus curve.

## 1. Introducción

Los estudios de semigrupo de una curva plana irreducible algebroide plana sobre un cuerpo algebraicamente fechado K son hechos principalmente en el caso char$(K) = 0$. La razón principal es que en ese caso pueden ser usados las series de Puiseux. En este trabajo demostraremos, (sin uso de tales métodos o resultados, conocidos en el caso de char$(K) = 0$,) sobre la estructura de los semigrupos de curvas planas irreducibles algebroides sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cualquiera. Además de eso damos una caracterización de los semigrupos, que ocurren como semigrupo de curvas planas sobre un cuerpo algebraicaimente cerrado $K$, una caracterización que hasta parece nueva si char$(K) = 0$. Nuestro método son las llamadas las sucesiones de Apery, que primeramente fueron usadas por Apery y después estudiados por Acebedo con eso determinamos el menor sistema de generadores de un semigrupo de una curva plana irreducible algebroide y además de eso mostraremos que ese menor sistema de generadores

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: E-mail: frank1400113@hotmail.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: E-mail: marlocpx5@hotmail.com

y los pares característicos en sentido de Hoch se determinan mutuamente, eso generaliza los teoremas de Abihyinkar y Hoch y Acebedo. También una caracterización de los semigrupos, que son semigrupos de curvas planas irreducibles algebroides es hecha con esas sucesiones, además de eso con ayuda de las secuencias de Apery obtenemos aplicaciones sobre ecuaciones lineales diofanticas, obtenemos un teorema sobre la conocida desigualdad sobre el conductor de un semigrupo, que contiene un teorema de Brawer y Sulvinder y que refina un teorema de Berlin y Carbone, además de eso computamos con esas sucesiones el conductor de progresiones.

El trabajo consiste en dos partes, la primera tratamos los semigrupo y la aplicación sobre ecuaciones lineales diofanticas. En la segunda estudiaremos los semigrupos de curvas planas irreducible algebroides.

# 2. Semigrupo de los Números Naturales

En este capitulo definimos los semigrupos y también de sus conjuntos generadores, luego definimos el conductor que un invariante que caracteriza a un semigrupo. Después definimos las sucesiones de Apery y escribimos algunas de sus propiedades, así como también definimos las sucesiones agradables, para luego estudiar las sucesiones de Apery fuertemente crecientes.

## 2.1. Semigrupos de los naturales

Un *semigrupo*, $H$ es un subconjunto de los naturales, conteniendo al cero y cerrado para la adición. Consideremos que nuestro semigrupo $H$ tenga la propiedad de $\mathrm{mcd}(H) = 1$

**Definición 2.1** *$H$ contiene casi todos los números naturales, el menor número $n$ tal que $[n, \infty[ \subset H$ es llamado el* conductor *de $H$.*

Definimos

$$e_0 = \text{mín}\{H \setminus \{0\}\ \}, \ldots, e_{i+1} = \text{mín}\{H \setminus \sum_{k=0}^{i} e_k\mathbb{N}\}, i = 1, \ldots, s-1,$$

se tiene que $e_0 < e_1 < \ldots < e_s$.
$s \leq e_0$. En efecto, para $e_i$ y $e_0$, Por el algoritmo de la division existe $k$ y $j$ tal que $e_i = e_0k + j$ con $0 \leq j < e_0$, esto es $e_i \in [j]_{e_0}$. Si $s = 0$, si, solamente si, $H = \mathbb{N}$.
De la definición podemos ver que $H$ es finitamente generado por $E = \{e_0, \ldots, e_s\}$.

## 2.2. Sucesiones de Apery

Sea $0 \neq p \in H$. Como $H$ contiene casi todos los números naturales, $H$ tiene intersección no vacía con cada clase módulo $p$ y el conjunto

$$A_p = \{\text{mín}\{H \cap n + p\mathbb{Z}\}/n \in \mathbb{N}\}$$

tiene $p$ elementos y generan $A_p = \{a_0, \ldots, a_{p-1}\}$ con $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{p-1}$.

**Definición 2.2** *$A_p$ es llamado el* conjunto de Apery *de $H$ con respecto a $p$, si*

$$p = \text{mín}\{H \setminus \{0\}\},$$

*diremos que $A_p$ es un Apery conjunto de $H$.*

*A los $a_0, \ldots, a_{p-1}$ es llamado el* Apery sucesión *de $H$ con respecto a $p$, si $p = \text{mín}\{H \setminus \{0\}\}$, diremos simplemente que $A_p$ es Apery sucesión de $H$.*

Cada número $n \in \mathbb{Z}$ por el algoritmo de la división se escribe de manera única en la forma

$$n = a_i + mp \text{ con } 0 \leq i \leq p-1, \; m \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Sigue que para $p \in H$

$$n \in H \quad \text{si, solo si,} \quad m \geq 0. \tag{2}$$

En efecto si $m < 0$ sigue $-m > 0$ luego $n < n + (-m)p$, lo que es una contradiición pues $n \in H$ y la definición de $a_i = n + (-m)p$. Por tanto $m \geq 0$.
Por definición de la Apery sucesión tenemos que

$$n \in A_p \quad \text{si, solo si, } n \in H, \quad n - p \notin H. \tag{3}$$

Consecuentemente

$$H = \bigcup_{i=0}^{p-1} a_i + p\mathbb{N} \tag{4}$$

y por tanto $p, a_1, \ldots, a_{p-1}$ es un sistema de generadores de $H$.
Si en particular $1 < p = \text{mín}\{H \setminus \{0\}\}$ y $E = \{e_0, \ldots, e_s\}$ es el menor sistema de generadores de $H$ , entonces

$$E \subseteq \{p, a_1, \ldots, a_{p-1}\}, \; e_0 = p, \; e_1 = a_1$$

**Lema 2.3** *Sea $H$ un semigrupo, y $a_0, \ldots, a_{p-1}$ la Apery sucesión. Entonces, son equivalentes.*

1. *$H$ es generado por dos elementos (i.e $s = 1$)*
2. *$a_i = ia_1$ para $i = 0, \ldots, p-1$*
3. *$H = \bigcup_{i=0}^{p-1} ia_1 + p\mathbb{N}$*

**Demostración** 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $H = \langle p, a_1 \rangle$, sigue $a_i = \alpha p + \beta a_1$ con $\alpha, \beta \geq 0$, luego $\beta a_1 = a_i - \alpha p$ con $-\alpha \geq 0$, por tanto $\alpha = 0$, consecuentemente

$$a_i = \beta_i a_1.$$

Sea $a_2 - a_1 = a_j + mp$, con $m \geq 0$, sigue $a_j + a_1 = a_2 + mp \in H$, luego $m \leq 0$, por tanto $m = 0$. Consecuentemente $a_2 = a_1 + a_j$, y $j < 2$.

$j \neq 0$ si no $j = 0$ sigue $a_2 = a_1 + p$, entonces $a_2 - p \in H$, que es una contradicción. Consecuentemente $j = 1$ y luego $a_2 = 2a_1$

2) $\Rightarrow$ 3) Es evidente de 4

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $m \in H$, luego $m \in i_0 a_1 + p\mathbb{N}$ sigue $m = i_0 a_1 + pk$, para algún $k \in \mathbb{N}$, consecuentemente $H$ es generado por $a_1, p$.

**Ejemplo 2.4** *Sea*

$$H = \{0, 4, 7, 8, 11, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, \ldots\}$$

*En este caso $s \leq e_0 = \text{mín}\{H \setminus \{0\}\} = 4$, luego $e_1 = \text{mín}\{H \setminus 4\mathbb{N}\} = 7$, $e_2 = \text{mín}\{H \setminus 4\mathbb{N}+7\mathbb{N}\} = \text{mín}\, \emptyset$. Por tanto $H$ es generado por $\{4, 7\}$. El conductor de $H$ es $c = 18$.*
*también tenemos la Apery sucesión*

$$A_p = \{\text{mín}\, H \cup n + p\mathbb{Z}\} = \{4, 7, 14, 21\},$$

*observe que $a_0 = 4$, $a_1 = 7$, $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 3a_1$.*

**Lema 2.5** *Sea $0 \neq p \in H$ y sea $a_0, \ldots, a_{p-1}$ la Apery-sucesión de $H$ a respecto de $P$. Entonces $a_{p-1} - p + 1$ es el conductor de $H$*

**Demostración** Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a_{p-1} - p + 1$, si se escribe de manera única de la forma $n = a_i + mp$ con $0 \leq i \leq p-1$, y $m \in \mathbb{Z}$. Si tome $m < 0$, entonces $n \leq a_i - p \leq a_{p-1} - p < n$ luego $m \geq 0$ i.e. $n \in H$. Como $a_{p-1} - p \notin H$ sigue inmediatamente la afirmación.
Si en particular $p = \min H \setminus \{0\}$ y si $H$ es generado por dos elementos, entonces

$$(p-1)(a_1-1) = (e_0-1)(e_1-1)$$

es el conductor de $H$.

□

**Definición 2.6** *Un semigrupo* $H$ *de* $\mathbb{N}$ *es llamado* simétrico, *si existe un número* $z \in \mathbb{Z}$, *tal que para cada entero* $n$ *vale*

$$n \in H \Leftrightarrow z - n \notin H.$$

$\mathbb{N} \setminus H$ es el conjunto de *las lagunas de* $H$.

**Proposición 2.7** *Si* $f$ *es el conductor de* $H$, *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. $H$ *es simétrico*
2. *Para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *vale* $n \in H \Leftrightarrow f - 1 - n \notin H$.
3. $|\mathbb{N} \setminus H| = |H \cap \{0, 1, 2, \ldots, f-1\}|$
4. $2|H \cap \{0, 1, 2, \ldots, f-1\}| = f$
5. $2|\mathbb{N} \setminus H| = f$

**Demostración** 1) $\Rightarrow$ 2) Bastará probar que $z = f - 1$ en la definición de semigrupo simétrico. En efecto. $z \notin H$ pues $0 \in H$, luego para $m > z$, sigue $z - m < 0$ luego $z - m \notin H$, entonces $m \in H$, consecuentemente $z = f - 1$.
2) $\Rightarrow$ 3) Sea

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & H \cap \{0, 1, 2, \ldots, f-1\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \setminus H \\ & n & \rightarrow & \Phi(n) = f - 1 - n \end{array} \tag{5}$$

$\Phi$ es biyección. En efecto, sean $n_1, n_2 \in H \cap \{0, 1, 2, \ldots, f-1\}$ con $n_1 \neq n_2$, sigue $f - 1 - n_1 \neq f - 1 - n_2$, luego $\Phi(n_1) \neq \Phi(n_2)$, por tanto $\Phi$ es inyectivo. Sea $z \in \mathbb{N} \setminus H$, sigue $z \notin H$, luego existe $n_1 = f - 1 - z \in H$, con $0 \leq n_1 \leq f - 1$, por tanto $\Phi$ es sobreyectivo. Consecuentemente

$$|\mathbb{N} \setminus H| = |H \cap \{0, 1, 2, \ldots, f-1\}|$$

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $z = f - 1 \in \mathbb{Z}$.
Si $n \in H$, entonces $z - n = f - 1 - n \notin H$. Si no es así $z - n \in H$ y $f - 1 = n + (z - n) \in H$, que es un absurdo.
Si $z - n \notin H$, sigue $f - 1 - n \notin H$, luego $n \in H$
$iii), iv)$ y $v)$ son evidentemente equivalentes. □

**Proposición 2.8** *Sea* $0 \neq p \in H$, *y sea* $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$, *la Apery-sucesión de* $H$ *a respecto de* $p$. *Entonces son equivalentes*

1. $H$ *es simétrico.*
2. *Para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *se tiene* $n \in H \Leftrightarrow a_{p-1} - p - n \notin H$.
3. *Para* $i = 0, 1, \ldots, p-1$ *se tiene* $a_{p-1} - a_i \in \{a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}\}$.
4. *Para cada* $i = 0, 1, \ldots, p-1$ *se tiene* $a_{p-1} = a_i + a_{p-1-i}$.

**Demostración** (1) $\Rightarrow$ (2) Para $n \in \mathbb{Z}$ y $f = a_{p-1} - p + n$ el conductor de $H$. Sigue de la proposición 2.7 que

$$n \in H \Leftrightarrow a_{p-1} - p - n \notin H$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Para $0 \leq i \leq p-1$, $a_{p-1} - p - a_i \in \mathbb{Z}$, sigue $a_{p-1} - p - a_i \notin H$, luego por (2) $a_{p-1} - p - a_i = a_j + mp$ con $m < 0$ y $0 \leq j \leq p-1$.
Si $m < -1$, sigue

$$a_{p-1} - p - (a_i - p) = a_j + (m+1)p \notin H,$$

luego $a_i - p \in H$. Que es una contradicción con 3. Por tanto $m = -1$ y $a_{p-1} - a_i = a_j$.
(3) $\Rightarrow$ (4) Se tiene que $a_{p-1} - a_i = a_{j_i}$. Además por la definición de Apery-sucesión tenemos que $a_0 < a_1 < \ldots < a_{p-1}$. Sigue

$$a_{j_0} > a_{j_1} > \ldots > a_{j_i} \ldots > a_{j_{p-1}},$$

consecuentemente $a_i + a_{p-i+1} = a_{p-1}$
(4) $\Rightarrow$ (1) Sea $z = f - 1 = a_{p-1} - p$. Luego, si $n \in H$, sigue $n = a_j + mp$ con $m \geq 0$. Luego $z - n = a_{p-1} - p - a_j - mp = a_{p-j-1} + (-m)p \notin H$. Recíprocamente si $z - n \notin H$, sigue $z - n = a_j + mp$, con $m < 0$, luego $n = a_{p-1} - p - a_j - mp = a_{p-j-1} - (m+1)p$ com $-(m+1) \geq 0$, consecuentemente $n \in H$.

□

En particular, si $H$ es generado por dos elementos, entonces la observación 2.8 muestra que $H$ es simétrico. Como los ejemplos de los subsemigrupos $\{0\} \cup \{n, n+1, \ldots, \infty\}$ de $\mathbb{N}$ para $n \geq 3$ muestran, eso no siempre es verdadero si el número de generadores mínimos es mayor que dos.

## 2.3. Sucesiones Agradables

**Definición 2.9** *Sea la sucesión de enteros positivos no necesariamente monótona* $t_0, t_1, \ldots, t_r$, *definimos*

1. *La sucesión acoplada* $g_0, g_1, \ldots, g_r$, *donde*

$$g_0 = t_0, \quad g_i = mcd(t_0, \ldots, t_i), \; i = 1, 2, \ldots, r$$

2. *La sucesión colada* $n_0, n_1, \ldots, n_r$, *donde*

$$n_0 = 1, \quad n_i = \frac{g_{i-1}}{g_i}, \; i = 1, 2, \ldots, r$$

3. *La sucesión a mano* $m_0, m_1, \ldots, m_r$, *donde*

$$m_0 = 1, \quad t_i = g_i m_i, \; i = 1, 2, \ldots, r$$

**Lema 2.10** *Dada la sucesión acoplada* $g_0, g_1, \ldots, g_r$, *y la sucesión colada* $n_0, n_1, \ldots, n_r$. *Entonces*

1. $g_i = n_{i+1} \ldots n_{r-1} n_r, \quad i = 1, \ldots, r.$
2. $g_i | g_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, r.$
3. $(m_i, n_i) = 1.$

**Demostración** Es una simple verificación de la definición.

□

**Definición 2.11** *Dada la sucesión* $t_0, , t_1, \ldots, t_r$ *como en* $1, 2$ *se define la sucesión derivada de enteros sin divisores comunes* $t'_0, t'_1, \ldots, t'_r$, *donde*

$$t'_i n_r = t_i, \quad i = 0, 1, \ldots, r - 1$$

*De manera similar se definen los la sucesión acoplada derivada* $g'_i$ *para* $i = 1, \ldots, r - 1$. *La sucesión colada derivada* $n'_i$ *para* $i = 1. \ldots, r - 1$. *Y la sucesión a mano derivada* $m'_i$ *para* $i = 1, \ldots, r - 1$.

**Proposición 2.12** *Tenemos que* $g_i = n_r g'_i$, $n_i = n'_i$ *y* $m = m'_i$ *para* $i = 1. \ldots, r - 1$

**Demostración** La prueba es evidente de la definición.

**Proposición 2.13** *Cada numero natural* $n < t_0$ *es representado de manera única como*

$$n = \sum_{i=1}^{r} s_i n_1 \ldots n_{i-1}.$$

**Demostración** Sea la sucesión colada $n_1, n_2, \ldots, n_r$ y $n < t_0$. Entonces para $n$ y $n_1$, por el algoritmo de la división, existe $p_1 \geq 0$ y $s_1$, tal que

$$n = s_1 + n_1 p_1 \quad \text{con} \quad 0 \leq s_1 < n_1. \tag{6}$$

Nuevamente para $p_1$ y $n_2$, por el algoritmo de la división existe $p_2$ y $s_2$ tal que

$$p_1 = s_2 + n_2 p_2 \text{ con } 0 \leq s_2 < n_2 \tag{7}$$

De 6 y 7 tenemos

$$n = s_1 + n_1 s_2 + n_1 n_2 p_2 \quad \text{con} \quad 0 \leq s_2 < n_2.$$

Así sucesivamente llegamos

$$n = s_1 + s_2 n_1 + \ldots + s_{r-1} n_1 n_2 \ldots n_{r-2} + p_{r-1} n_1 \ldots n_{r-1} \quad \text{con} \quad 0 \leq s_{r-1} < n_{r-1} \tag{8}$$

Verificaremos que $p_{r-1} < n_r$.
En efecto si no fuese así, tenemos que $p_{r-1} \geq n_r$, sigue $p_{r-1} = n_r + \alpha$ con $\alpha \geq 0$, luego

$$n = s_1 + s_2 n_1 + \ldots + n_1 \ldots n_r + n_1 \ldots n_{r-1} \alpha$$

$$= s_1 + s_2 n_1 + \ldots + t_0 + n_1 \ldots n_{r-1} \alpha,$$

sigue que $n > t_0$, lo que es un absurdo. Por tanto $p_{r-1} < n_r$, considerando $p_{r-1} = s_r$ en (8) el lema esta probado.

□

**Proposición 2.14** *Para cada entero* $n$ *la congruencia* $n \cong \sum_{i=1}^{r} s_i t_i mod t_0$, $0 \leq s_i < n_i$, $i = 1, \ldots, r$ *tiene solución única.*

**Demostración** Se probará por inducción sobre $r$.
Para $r = 1$, sigue que $g_1 = 1 = (t_0, t_1)$, luego existe $\alpha$ y $\beta$ enteros tal que

$$1 = t_0 \alpha + t_1 \beta,$$

entonces

$$t_0 \alpha n + t_1 \beta n = n. \tag{9}$$

Además por el algoritmo de la division, sigue que para $n\beta$ y $t_0$, existe $q$ y $s_1$ tal que

$$n\beta = t_0 q + s_1 \text{ con } 0 \leq s_1 < t_0 = n_1. \tag{10}$$

Entonces de (10) y (9) se tiene que

$$n = nt_0\alpha + t_1t_0q + t_1s_1 = t_0(n\alpha + t_1q) + s_1t_1,$$

consecuentemente $n \cong s_1t_1 \mathrm{mod} t_0$.
Supongamos válido para $r-1$.
Por el lema 2.10 item 3 se tiene que $(m_r, n_r) = 1$, luego existe $a$ y $b$ enteros tal que $am_r + bn_r = 1$, sigue

$$anm_r + bnn_r = n. \tag{11}$$

Por el algoritmo de la division para $an$ y $n_r$, existe $k$ y $s_r$ tal que

$$an = n_rk + s_r \text{ con } 0 \leq s_r < n_r. \tag{12}$$

Reemplazando (12) en (11) sigue

$$n = s_rm_r + n'n_r \quad \text{con} \quad 0 \leq s_r < n_r, \tag{13}$$

donde $n' = k + bn$. Luego para $n'$ tenemos por hipótesis inductiva una única representación

$$n' \cong \sum_{i=1}^{r-1} s_it'_i \mathrm{mod} t'_0 \quad \text{con} \quad 0 \leq s_i < n'_i = n_i. \tag{14}$$

Multiplicando (14) con $n_r$ y reemplazando en (13) sigue

$$n \cong \sum_{i=1}^{r} s_it_i \mathrm{mod} t_0,$$

la unicidad es clara por la construcción.

□

**Corolario 2.15** *Supongamos que $H = \sum_{i=0}^{r} \mathbb{N}t_i$ es un semigrupo generado por los $t_i$ y si $A$ es el Apery-conjunto de $H$ a respecto de $t_0$. Entonces para $a \in A$, se tiene una representación única $a = t_0s_0 + \sum_{i=1}^{r} s_it_i$, con $0 \geq s_i < n_i$, $i = 1, \ldots, r$ y $s_0 \leq 0$.*

**Demostración** Por el lema 2.14 tenemos que para $a = t_0s_0 + \sum_{i=1}^{r} s_it_i$, con $0 \geq s_i < n_i$, $i = 1, \ldots, r$. Si $s_0 > 0$ sigue que $a - t_0 \in H$ que es un absurdo. Por tanto $s_0 \leq 0$.

**Lema 2.16** *Cada número natural $n > \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)t_i - t_0$ tiene una única representación*

$$n = \sum_{i=0}^{r} s_it_i, s_i < n_i$$

*para $i = 1, 2, \ldots, r$ con enteros no negativos $s_i$.*

**Demostración** Por el lema 2.14, tenemos una representación única

$$n = \sum_{i=0}^{r} s_it_i,$$

con $0 \leq s_i < n_i$ para $i = 1, \ldots, r$. Como

$$n > \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)t_i - t_0 \geq> \sum_{i=1}^{r} s_it_i - t_0,$$

sigue $s_0t_0 > -t_0$, luego $s_0 \geq 0$

□

**Proposición 2.17 (Teorema de Brauer)** *Si $H = \sum_{i=0}^{r} \mathbb{N}t_i$ es el semigrupo generado por los $t_i$. Entonces*

$$f \leq \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)t_i - t_0 + 1$$

**Demostración** Por el lema 2.16 tenemos que para $n \in \mathbb{N}$ se tiene $n \geq \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)t_i - t_0 + 1$, entonces $n \in H$. Consecuentemente $f \leq \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)t_i - t_0 + 1$.

□

**Definición 2.18** *Sea sucesión $t_0, \ldots, t_r$, si*

$$n_i t_i \in \sum_{j<i} \mathbb{N}t_j, \quad i = 1, \ldots, r,$$

*diremos que* la sucesión es agradable

**Lema 2.19** *Sea $t_0, t_1, \ldots, t_r$ una sucesión agradable. Entonces*

1. *La sucesión derivada es agradable*

2. *Si eliminamos en una sucesión agradable todos los miembros con $n_i = 1$, la sucesión permanece agradable y genera el mismo semigrupo.*

3. *Para $r \leq 1$ cada sucesión es agradable, mas $8, 10, 11$ no es agradable (y también no genera un semigrupo simétrico)*

**Demostración** Sea $t_0, t_1, \ldots, t_r$ una sucesión agradable, sigue existe $\lambda_1, \ldots 0, \lambda_{i-1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_i t_i = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \cdots \lambda_{i-1} t_{i-1} \tag{15}$$

1. Sea $t'_0, t'_1, \ldots, t'_r$ la sucesión derivada. Sigue que $n'_i t'_i = n_i \frac{t_i}{n_r}$. De 15 se tiene que

   $$n'_i t'_i = \frac{1}{n_r}(\lambda_1 t_1 + \cdots \lambda_{i-1} t_{i-1}) = \lambda_1 t'_1 + \cdots \lambda_{i-1} t'_{i-1}.$$

   Por tanto $t'_0, t'_1, \ldots, t'_r$ es agradable.

2. Es suficiente probar que si $n_k = 1$ para algún $k = 0, 1, \ldots, r$, entonces la sucesión $t_0, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_r$ es agradable y genera el mismo semigrupo. En efecto, existen $\lambda_1, \ldots 0, \lambda_{k-1} \in \mathbb{N}$ tal que

   $$t_k = n_k t_k = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \cdots \lambda_{k-1} t_{k-1}. \tag{16}$$

   Para $i < k$ se tiene que

   $$n_i t_i \in \mathbb{N}t_1 + \cdots + \mathbb{N}t_{i-1}.$$

   Para $i > k$ se tiene que

   $$n_i t_i \in \mathbb{N}t_1 + \cdots + \mathbb{N}t_{k-1} + \mathbb{N}t_k + \mathbb{N}t_{k+1} + \cdots + \mathbb{N}t_{i-1}.$$

   De (16) tenemos que

   $$n_i t_i \in \mathbb{N}t_1 + \cdots + \mathbb{N}t_{k-1} + \mathbb{N}t_{k+1} + \cdots + \mathbb{N}t_{i-1}.$$

   Por tanto la sucesión $t_0, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_r$ es agradable.

   De manera similar se verifica que genera el mismo semigrupo.

   Tenemos dos casos:

   Primero caso $r = 0$ sigue que $t_0$ es agradable por definición.

   Segundo caso $r = 1$, sigue $g_0 = t_0$ y $g_1 = 1$, luego $n_1 = t_0$, por tanto $n_1 t_1 = t_0 t_1 \in \mathbb{N}t_0$ y $t_0, t_1$ es agradable.

**Ejemplo 2.20**

1. *La sucesión* $8, 10, 11$ *no es agradable*
2. *La sucesión* $6, 7, 8$ *no es agradable, mas la sucesión* $6, 8, 7$ *si es agradable. es agradable.*

**Teorema 2.21 (Teorema de Angermüller)** *Sea* $t_0, t_1, \ldots, t_r$ *una sucesión de los números naturales positivos sin divisor común y sea*

$$vH = \sum_{i=0}^{r} \mathbb{N}t_i.$$

*Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La sucesión* $t_0, \ldots, t_r$ *es agradable*
2. *Cada* $n \in H$ *posee una representación única* $n = \sum_{i=0}^{r} s_i t_i$ *con* $0 \leq s_0$*,* $0 \leq s_i < n_i$*,* $i = 1, \ldots, r$
3. *El Apery conjunto de* $H$ *respecto a* $t_0$ *es* $A = \{\sum_{i=1}^{r} s_i t_i,\ 0 \leq s_i < n_i\}$
4. $H$ *tiene conductor* $f = \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)t_i - t_0 + 1$

**Demostración** $1) \Rightarrow 2)$ Sea $n \in H$, sigue que existe $x_0, x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{N}$, tal que

$$n = \sum_{i=0}^{r} x_i t_i, \quad \text{con} \quad x_i \geq 0. \tag{17}$$

Luego para $x_r$ y $n_r$, existe $s_r$ y $q_r$, tal que

$$x_r = n_r q_r + s_r \quad \text{con} \quad 0 \leq s_r < n_r,$$

en (17) se tiene

$$n = x_0 t_0 + x_1 t_1 + \cdots + x_{r-1} t_{r-1} + q_r t_r n_r + s_r t_r.$$

Como $n_r t_r \in \mathbb{N}t_0 + \mathbb{N}t_1 + \cdots + \mathbb{N}t_{r-1}$, sigue que existe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$, tal que

$$n = \lambda_0 t_0 + \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_{r-1} t_{r-1} + s_r t_r,\ \text{con} 0 \leq s_r < n_r. \tag{18}$$

Para $\lambda_{r-1}$ y $n_{r-1}$, existe $s_{r-1}$ y $q_{r-1}$, tal que

$$\lambda_{r-1} = n_{r-1} q_{r-1} + s_{r-1} \quad \text{con } 0 \leq s_{r-1} < n_{r-1},$$

en (18), se tiene

$$n = \lambda_0 t_0 + \cdots + n_{r-1} q_{r-1} t_{r-1} + s_{r-1} t_{r-1} + s_r t_r$$

con $0 \leq s_{r-1} < n_{r-1}$ y $0 \leq s_r < n_r$. Así de manera sucesiva obtenemos el resultado.
$2) \Rightarrow 3)$ Por el corolario 2.15 sigue que para $n \in A$, entonces $n = s_0 t_0 + s_1 t_1 + \cdots + s_r t_r$ con $0 \leq s_i < n_i,\ i, \ldots, r$ y $s_0 \leq 0$, por tanto $s_0 = 0$. Consecuentemente

$$A = \{\sum_{i=1}^{r} s_i t_i,\ \text{con } 0 \leq s_i < n_i,\ i = 1, ldots, r\}.$$

$3) \Rightarrow 4)$ Por el lema 2.5 sigue

$$f = a_{t_0 - 1} - t_0 + 1,$$

donde

$$a_{t_0 - 1} = \max A = \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)t_i.$$

4) $\Rightarrow$ 1) Sea la sucesión derivada $t'_0, t'_1, \ldots, t'_{r-1}$ de $t_0, t_1, \ldots, t_r$ y sea $H'$ su semigrupo generado, esto es

$$H' = \sum_{i=0}^{r-1} \mathbb{N}t'_i.$$

Entonces

$$H'n_r \subset H. \tag{19}$$

**Afirmación 1.** El conductor $f'$ de $H'$ esta dado por

$$f' = \sum_{i=1}^{r-1} (n'_i - 1)t'_i - t'_0 + 1,$$

pues caso contrario por la Proposición 2.17 tenemos

$$f' < \sum_{i=1}^{r-1} (n'_1 - 1)t'_i - t'_0 + 1,$$

sigue $f' \leq \sum_{i=1}^{r-1} (n'_1 - 1)t'_i - t'_0 \in H'$ y por 19

$$f - 1 = \sum_{i=1}^{r} (n_1 - 1)t_i - t_0 \in H,$$

que es un absurdo!. Por tanto la afirmación es verdadera.

Sigue por hipótesis inductiva que $t'_0, t'_1, \ldots, t'_{r-1}$ es sucesión agradable. Luego $n'_i t'_i \in \sum_{j<i} \mathbb{N}t_j$, $i = 1, \ldots, r-1$, entonces

$$n_i t_i \in \sum_{j<i} \mathbb{N}t_j, \quad i = 1, \ldots, r-1. \tag{20}$$

**Afirmación 2.** $H'$ es simétrico. En efecto como $t'_0, t'_1, \ldots, t'_{r-1}$ es agradable sigue del item 3. que

$$a_{t'_0 - 1} = \text{máx}\, A' = \sum_{i=1}^{r-1} (n'_1 - 1)t'_i - t'_0,$$

luego $a_{t'_0-1} - t'_0 \notin H'$, sigue por la proposición 2.8 que $H'$ es simétrico.

$t_r \in H'$. En efecto si $t_r \notin H'$, sigue por ser $H'$ simétrico que para $z = f - 1$, se tiene $f' - 1 - t_r \in H'$, sigue $n_r(f' - 1) - n_r t_r \in H'n_r$, luego por (19)

$$n_r(f' - 1) \in n_r t_r + n_r H \subset H$$

Consecuentemente

$$f - 1 = (n_r - 1)t_r + \sum_{i=1}^{r-1} (n_1 - 1)t_i - t_0 = (n_r - 1)t_r + (f' - 1)n_r \in H,$$

que es un absurdo!. Por tanto la afirmación es verdadera.

**Afirmación 4.** $n_r t_r \in \sum_{j=1}^{r-1} \mathbb{N}t_j$ En efecto como $t_r \in H'$, sigue $t_t \in \sum_{j=1}^{r-1} \mathbb{N}t_j$, luego $n_r t_r \in \sum_{j=1}^{r-1} \mathbb{N}t_j$ y la afirmación es verdadera.

Por la afirmación 4. y (20) sigue que $t_0, t_1, \ldots, t_r$ sucesión agradable.

**Corolario 2.22** *Un subsemigrupo aditivo de* $\mathbb{N}$ *que es generado por una sucesión agradable , es simétrico.*

**Demostración** Sea $t_0, t_1, \dots, t_r$ una sucesión agradable y $H = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{N} t_i$, luego por el teorema 2.21 item 3. sigue que

$$a_{t_0 - 1} = \text{máx}\, H = \sum_{i=1}^{r-1} (n_i - 1) t_i - t_0,$$

luego $a_{t_0 - 1} - t_0 \notin H$ consecuentemente por la por la proposición 2.8 $H$ es simétrico.

□

La recíproca no es cierta pues si escojamos el semigrupo generado por $8, 10, 11, 13$.Entonces

$$\mathbb{N} \setminus H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 17, 25\},$$

luego por la Proposición 2.7 $H$ es simétrico. Pero por definición la sucesión $8, 10, 11, 13$ no es agradable. □

## 3. Conclusiones

La teoría de semigrupos es un campo muy interesante de investigación ya que aporta resultados que posteriormente usaremos en el estudio de una singularidad de una curva algebroide plana.

El teorema de Angermuller es un resultado que asegura la existencia de conductor de un semigrupo que es un invariante que caracteriza al semigrupo.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] G. Angermüller. *Die Wertehalbgruppe einer ebenen irreduziblen algebroiden Kurve*. Math. Zeitschr. 153, 1977. p. 267-282.

[2] A. Hefez. *Singularidades de curvas irredutiveis planas*. The sixth workshop on real and complex singulariies. USP-Sao Carlos,p. 17-21 July ,2000.