PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XIX N°2, pp. 9-13, Julio–Diciembre 2016

Encajes Ordenados Inducibles entre Hiperespacios

Pedro Contreras[1] *Adrián Aliaga*[2] *William Olano*[3] *Leticia Villegas*[3]
Marco Rubio[5] *Heidi Chupayo*[6]

(Recibido: 23/06/2016 - Aceptado: 07/07/2016)

Resumen: Dado un conjunto X y denotemos por $C(X)$ el hiperespacio de todo los subcontinuos no vacíos. Para dos continuos X e Y y la función $f : X \to Y$ continua, sea $C(f) : C(X) \to C(Y)$ la función inducida entre los correspondientes hiperespacios. Una función $h : C(X) \to C(Y)$ entre hiperespacios es un encaje ordenado si h bajo su imagen es homeomorfismo y si A y B son elemenos de $C(X)$ tal que $A \subset B$, entonces $h(A) \subset h(B)$. Una función $g : C(X) \to C(Y)$ entre hiperespacios es inducible si existe una función $k : X \to Y$ continua tal que $g = C(k)$. Demostraremos el siguiente hecho: Si $f : C(X) \to C(Y)$ es un encaje ordenado, entonces existirá un encaje ordenado $g : C(X) \to C(Y)$ inducible minimal.

Palabras Claves: Continuos, encajes ordenados y funciones inducibles entre hiperespacios.

Embedding Order Inducible Between Hyperspace

Abstract: Given a set X and denote by $C(X)$ hyperspace all non-empty subcontinuos. For two continuos X and Y and the function $f : X \to Y$ continuous, let $C(f) : C(X) \to C(Y)$ function induced between the corresponding hyperspace. A function $h : C(X) \to C(Y)$ between hyperspaces is a neat fit if h under your image is homeomorphism and if A and B are elements of $C(X)$ such that $A \subset B$, then $h(A) \subset h(B)$. A function $g : C(X) \to C(Y)$ between hyperspaces es inducible if there is a function $k : X \to Y$ continuous such that $g = C(k)$. We will show the following fact: If $f : C(X) \to C(Y)$ is a neat fit, then there will be an orderly lace $g : C(X) \to C(Y)$ inducible minimal.

Key Words: Continuous, ordered lace and inducible functions between hyperspaces.

1 Introducción

El presente trabajo pertenece a la rama de la topología conocida como **Teoría de los continuos**. Dicha temática trata del estudio de las propiedades topológicas de los espacios que son métricos no vacíos, compactos y conexos. A un espacio topológico con las propiedades antes mencionadas se le llama **continuo**. Siguiendo ([1]) sobre la definición de encajes ordenados entre hiperespacios de continuos se tiene el siguiente problema: "Si $f : C(X) \to C(Y)$ es un encaje ordenado entonces existirá un encaje ordenado $g : C(X) \to C(Y)$ minimal (es decir si $g_0 : C(X) \to C(Y)$ encaje ordenado $g_0(A) \subseteq g(A)$; para cada $A \in C(X)$ entonces $g = g_0$). Además si $g(F_1(X)) \subset F_1(Y)$, entonces g será inducible.
Este último resultado abre una línea de trabajo en el campo de la topología y más concretamente en la de los encajes ordenados en hiperespacios de continuos ([1]).

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: pcontreras@urp.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: aaliagal@unmsm.edu.pe
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: wolanod@unmsm.edu.pe
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: mrubiog@unmsm.edu.pe
[5]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: hchupayoe@unmsm.edu.pe

2 Metodología

2.1 Hiperespacios

Comenzamos nuestro estudio definiendo el siguiente hiperespacio de un continuo X.

Definición 2.1.
Dado un continuo X con métrica d, se denota el **hiperespacio** *de 2^X de X como sigue:*

$$2^X = \{A \subseteq X / A \; es \; cerrado \; y \; no \; vacío\}$$

A continuación mostraremos como dotar a 2^X de una estructura de espacio métrico, bajo la cual resulta ser un continuo. Mientras no se diga lo contrario, consideraremos que la letra X representa un continuo con métrica d.

Definición 2.2.
*Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. La ε-***nube** *de A es el conjunto*

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X / existe \; a \in A \; tal \; que \; d(a, x) < \varepsilon\}$$

A continuación se define una función para 2^X.

Definición 2.3.
Si A y $B \in 2^X$, entonces se define

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon / A \subset N(\varepsilon, B) \; y \; B \subset N(\varepsilon, A)\}$$

Note que H es una función del producto cartesiano $2^X \times 2^X$ a los números reales no negativos. En ([3], 0.2) está demostrado que $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ es una métrica para 2^X, llamada **métrica de Hausdorff**. La topología determinada por la métrica para 2^X, solo depende de la topología de X. En ([3], 0.8) se prueba que 2^X es compacto y, en ([3], 0.9), que 2^X es arco conexo (independintemente de que X sea o no arco conexo). Luego, 2^X es un continuo.
Ahora se define el siguiente hiperespacio de un continuo.

Definición 2.4.
Si X es un continuo, se define el hiperespacio $C(X)$ de X como sigue.

$$C(X) = \{A \subseteq 2^X / A \; es \; conexo\}.$$

A $C(X)$ se le llama **hiperespacio de los subcontinuos** *de X.*

Observemos que $C(X)$ es no degenerado. Además la restricción de la métrica de Hausdorff H a $C(X)$, hace de éste un espacio métrico. Al igual que en el caso de 2^X, la topología de $C(X)$ inducida por la métrica de Hausdorff, solamente depende de la topología de X. En ([3], 0.8) está demostrado que $C(X)$ es compacto y en ([3], 1.12), es arco conexo (también esto es independiente de la arco conexidad de X). Por lo tanto, $C(X)$ es un continuo.
Otro hiperespacio del continuo X que consideramos en este trabajo, es el siguiente.

Definición 2.5.
Si X es un continuo, se define el hiperespacio

$$F_1(X) = \{\{p\} / p \in X\}$$

Es claro que $F_1(X)$ es un subconjunto no degenerado de 2^X. La restricción de la métrica de Hausdorff H a $F_1(X)$, hace de éste un espacio métrico. Más aún tenemos que $F_1(X)$ es isométrico a X.

Definición 2.6.
Sean X, Y continuos y $F : X \to Y$ una función continua entre continuos. Denotamos por $C(f) : C(X) \to C(X)$ a la **función inducida** *definida, para cada $A \in C(X)$ por*
$C(f)(A) = f(A)$.

Obsérvese que la función f inducida es una función continua.

2.2 Funciones entre hiperespacios

Definición 2.7.
Sean los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ de los continuos X e Y, respectivamente. Decimos que: la función $f : C(X) \to C(Y)$ es una **función entre hiperespacios** *de X sobre Y, si la función $f : C(X) \to C(Y)$ es continua.*

Definición 2.8.
Decimos que la función entre hiperespacios $f : C(X) \to C(Y)$ es una **función inducible** *si existe una función $g : X \to Y$ continua tal que $C(g) = f$.*

Teorema 2.9. *La función entre hiperespacios $f : C(X) \to C(Y)$ es* **inducible** *si, y solo si*

1. *$f(F_1(X)) \subseteq F_1(Y)$*
2. *Para cada par $A, B \in C(X)$ con $A \subset B$ se tiene $f(A) \subset f(B)$*
3. *$f : C(X) \to C(Y)$ es minimal (es decir si existe $g : C(X) \to C(Y)$ con $g(A) \subseteq f(A)$; para cada $A \in C(X)$ entonces $f = g$).*

Demostración.
Ver Teorema 2.2 de ([2], 2.27). ■

Definición 2.10.
Sean X e Y continuos, una función $f : X \to Y$ es **un encaje** *si X es homeomorfo a $f(X)$.*

Definición 2.11.
Dados dos continuos X e Y y dos hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ de X e Y, respectivamente, decimos que: $C(X)$ puede **encajarse ordenadamente** *en $C(Y)$ siempre que exista un encaje $f : C(X) \to C(Y)$ tal que, si $A \subset B$, entonces $f(A) \subset f(B)$. En este caso, f es* **es llamado encaje ordenado**.

Teorema 2.12 (de reducción de Brower)**.** *Sean X un espacio con una base numerable y $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos cerrados de X, ordenada parcialmente por la inclusión de conjuntos. Si para cada sucesión decreciente en $\mathcal{C}$, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{C}$, entonces existe un elemento minimal en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Ver([5], 1.22;16). ■

Proposición 2.13. *[Existencia de encaje ordenado inducible minimal] Si $f : C(X) \to C(Y)$ es un encaje ordenado, entonces existe una función $g : C(X) \to C(Y)$ inducible minimal.*

Demostración. Definamos $\varepsilon = \{g : C(X) \to C(Y)/g$ es un encaje ordenado$\}$.
Ahora en ε, definamos la relación:
$g \prec h \Leftrightarrow g(A) \subseteq h(A)$; para cada $A \in C(X)$
Consideremos

$$\mathcal{F} = \{g \in \varepsilon / g \prec f\}.$$

Tenemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$: $f \prec f$ (por hipótesis)
Sea $\{g_i\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathcal{C}$ una sucesión decreciente sobre $\mathcal{F}$ y sean $g_i \in \mathcal{C}$, para $i = 1, 2, \cdots, n$ tenemos que $g_1(A) \cap g_2(A) \cap \cdots \cap g_n(A) \neq \emptyset$ puesto que $g_i(A)$ son subconjuntos de Y. Entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} g_n \in \mathcal{F}$ y por el Teorema de reducción de Brower existe un elemento minimal g_0 de $\mathcal{C}$. Ahora como $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, se obtiene que $g_0 \in \varepsilon$ es un encaje minimal de f.
Pongamos $g = g_0$, por hipótesis $g(F_1(X)) \subset F_1(Y)$ y si $A \subset B$ se tiene que $g(A) \subset g(B)$, por el Teorema 1, se concluye que g es inducible. ■

3 Resultados y Discusión

Definición 3.1.
Un continuo X es **descomponible** *si $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de X. Diremos que un continuo X es* **indescomponible** *si no es descomponible.*

Definición 3.2.
Sea X un continuo. Decimos que X es **hereditariamente** *descomponible si cada continuo $Y \subset X$ con más de un punto es descomponible.*

Teorema 3.3. *[No existencia de funciones continuas entre continuos] Si X es un continuo hereditariamente descomponible e Y es un continuo indescomponible, entonces no existen funciones continuas de X sobre Y.*

Demostración.
Ver ([4], 12;4). ■

Teorema 3.4. *[No existencia de funciones entre hiperespacios] Si X es un continuo hereditariamente descomponible e Y es un continuo indescomponible, entonces no existen encajes ordenados de $C(X)$ sobre $C(Y)$.*

Demostración.
Supongamos que exista un encaje ordenado $f : C(X) \to C(Y)$. Ahora por la Proposición 2.13, existe una función $g : C(X) \to C(Y)$ inducible minimal. Como g es inducible, entonces existe una función $h : X \to Y$ continua tal que $C(h) = g$. Por lo tanto existe una función continua $h : X \to Y$ contradiciendo al Teorema 3.3. ■

4 Conclusiones

Hay muchos artículos escritos sobre hiperespacios de continuos. Sería imposible incluir todos los posibles resultados. Hemos presentado algunos de los más representativos. Esperamos que el lector llegue a la conclusión que la Proposición 2.13 es una **proposición inédita**. De la misma manera el Teorema 3.4 es un **resultado inédito**.
Este trabajo se realizó en el Seminario "Godofredo Garcia Diaz", dentro del área de investigación de Geometría y Topología.

Referencias Bibliográficas

[1] Andablo G. (2009). *Funciones entre hiperespacios de continuos y relación de orden.* Memoria de la XIX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora, México. Mosaicos matemáticos N° 32, pp. 163 - 169.

[2] Charatonik, J. J., Charatonik, W. J. (1998). *Inducible Mappings between hyperspaces* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 46, pp. 5 - 9.

[3] Nadler S. B. (1978). *Hyperspaces of sets.* Monographs and Texbooks in Pure and Aplied Mathematics, 49, Marcel Dekker, Inc., New York.

[4] Charatonik W. (2010). *Propiedades que se preservan bajo Funciones Confuentes.* IV Taller de Continuos e Hiperespacios. Morelia, Michoacan, México.

[5] Sánchez V.(2012). *Semi fronteras en hiperespacios de continuos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, México.