PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XIX N°2, pp. 14-25, Julio–Diciembre 2016

Una Variante del Teorema de la Amistad

Montoro E.[1] *Huamán C.*[1] *Castillo E.*[1] *Melgarejo G.*[1] *Armas E.*[1]
Sampertegui M.[1]

(Recibido: 18/04/2016 - Aceptado: 01/07/2016)

Resumen: Con la ayuda de la teoría de grafos y del álgebra lineal se puede dar una demostración a una variante del teorema de la amistad.

Palabras Claves: Teorema de la amistad, Teoría de grafos y álgebra lineal.

A Variant of The Theorem of Friendship

Abstract: With the help of graph theory and linear algebra can give a demonstration a variant of the theorem of friendship.

Key Words: Theorem of friendship, graph theory and linear algebra.

1 Introducción

El Teorema de la Amistad fue dado a conocer por primera vez en 1930 gracias al matemático y filósofo Frank Plumpton Ramsey en un trabajo titulado "*On a Problem in Formal Logic*" (ver [2]). El Teorema de la Amistad nos dice que:

En cualquier grupo de seis personas, existen tres personas que son mutuamente conocidas o mutuamente desconocidas.

En el presente artículo demostramos la siguiente variante (Ver [1]):

Consideremos una fiesta con n personas, donde cada dos personas tienen exactamente un amigo en común. Entonces alguien conoce a todas las otras personas en la fiesta.

Cabe mencionar que esta variante ya ha sido estudiada y probada por diferentes autores. Nosotros aquí presentamos una demostración diferente.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: cdinsonmontoro@yahoo.com

2 Metodología

2.1 Teorema Central

El resultado principal de este trabajo está dado por el siguiente teorema:
Considérese una fiesta con n personas, donde cada dos personas tienen exactamente un amigo en común. Entonces alguien conoce a todas las otras personas de la fiesta.

Demostración.

1) La demostración se desarrollará a través de los siguientes pasos:

Paso 1: Enumeramos a las personas de la fiesta de manera conveniente: ①, ②, ③, ..., ⓝ.

Paso 2: Definimos el conjunto A_i para cada persona i como el conjunto de amigos de i.

Paso 3: Los A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, 2k+1$ forman una partición del conjunto de las personas de la fiesta, donde cada dos personas tienen exactamente un amigo en común.

Paso 4: Si alguien en la fiesta conoce exactamente a dos personas. Entonces A_2 ó A_3 es igual al conjunto vacío y el teorema es válido.

Paso 5: Si alguien conoce a más de dos personas. Entonces: Sean i, j dos amigos de la persona ① que no se conocen. Entonces A_i y A_j tienen el mismo número de elementos. Todos los conjuntos A_i, $2 \leq i \leq 2k+1$, tienen el mismo número de elementos.

Paso 6: Notemos que la elección de la persona que llamamos ①, fue totalmente arbitraria. Luego todas las personas en la fiesta conocen al mismo número de personas.

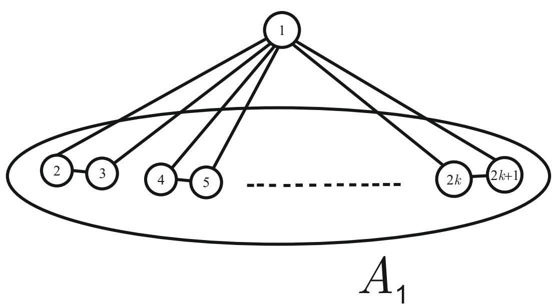
Paso 7: $n = 1 + 2k + 2k(2k-2)$, luego $n = 4k^2 - 2k + 1$ donde la única solución para k es $k = 1$.

Luego, la fiesta está compuesta por $n = 3$ personas y por lo tanto existe una persona que conoce a todos en la fiesta.

2) Elegimos a cualquier persona como la persona ①. Entonces se tiene por definición

$$A_1 = \{ \text{ Amigos de } ① \text{ , pero no esta el } ① \}$$

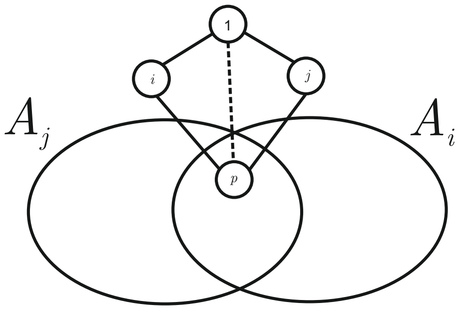
Por hipótesis, cada dos personas tienen exactamente un amigo común, por tanto $|A_1| = 2k$ (número par). La arista entre un par de nodos significa la relación de amistad entre ambos nodos.



3) Probemos el Paso 3.

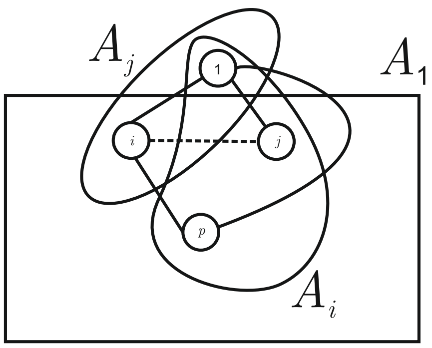
   Sea $i \neq j \neq 1$ entonces $A_i \cap A_j = \varnothing$. En efecto:

   i. Sea la persona ① conoce a la persona ⓘ y a la persona ⓙ, además las personas ⓘ y ⓙ (por hipótesis) tienen como amigo común a la persona ⓟ entonces se cumple que $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ pues ⓟ$\in A_i \cap A_j$. Si ① conoce a ⓟ entonces las personas ① y ⓟ tienen dos amigos comunes lo cual es una contradicción con la hipótesis.



(*i*)

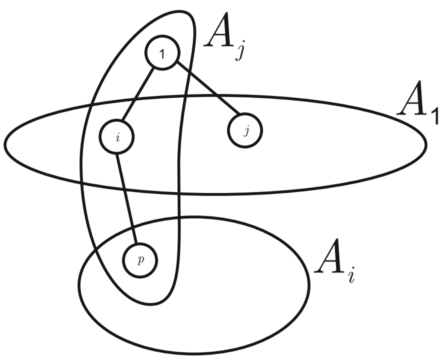
   ii. Ahora, supongamos que la persona ① conoce a la persona ⓟ y que el amigo común de ① e ⓘ es ⓙ y además supongamos que ⓘ conoce a ⓟ pero ⓙ no conoce a ⓟ. Entonces $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, ① e ⓘ tienen dos amigos comunes. Nuevamente llegamos a una contradicción con la hipótesis.



(*ii*)

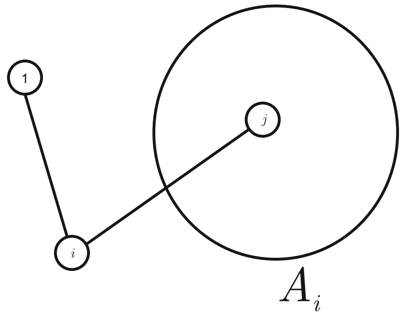
   Por lo anterior se tiene que ⓘ no debe conocer a ⓙ, entonces $j \notin A_i$.

4) Continuamos con la demostración. Sea la persona ⓙ en la fiesta.



i. Si (j) es amigo de (1) entonces $j \in A_1$ y $A_1 \cap A_i = \varnothing$. Además $A_j \cap A_i = \varnothing$ pues $j \notin A_i$.

ii. Si (j) no es amigo de (1), entonces $j \notin A_1$ y por hipótesis existe un i tal que $j \in A_i$ (cada dos personas tienen exactamente un amigo en común). En este caso estaríamos en el caso ii de la parte 3) y se cumple que $A_1 \cap A_j = \varnothing$ y por la parte i de 4) $A_i \cap A_j = \varnothing$.

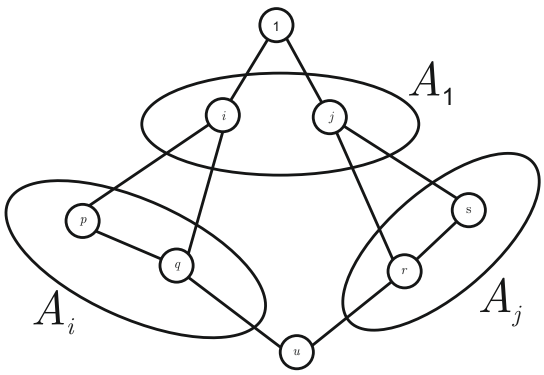


Asimismo, se cumple, que el conjunto total de personas en la fiesta está dado por (por ser i amigo de 1 puede ser cualquiera de $2 \leqslant i \leqslant 2k+1$)

$$\mathcal{F} = \{1\} \cup \left[\bigcup_{i=2}^{2k+1} A_i \right]$$

Esto prueba, que los A_i son una partición de $\mathcal{F}$.

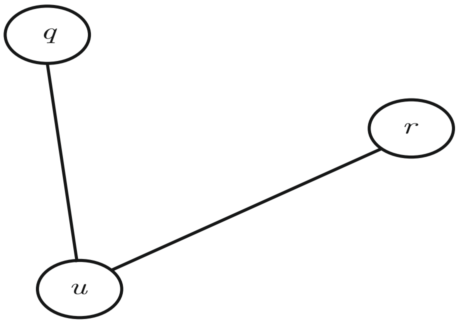
5) Por otro lado, probemos el paso 4: si alguien en la fiesta conoce exactamente solo a dos personas, entonces elegimos esta persona como (1) y por hipótesis existe un amigo en común.



Por la parte 4) los A_i, A_j y A_1 satisfacen que $A_i \cap A_1 = \varnothing$, $A_i \cap A_j = \varnothing$. Por otra parte,

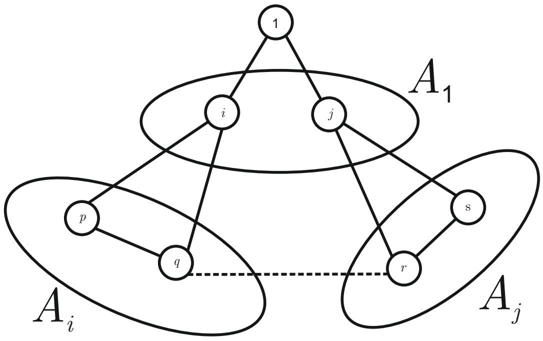
a. Supongamos que $|A_i| = |A_j| \neq 0$. Entonces $\exists\ q \in A_i$ y $r \in A_j$.

i. Si q y r no son amigos entonces debe existir un nodo u tal que sea el amigo común

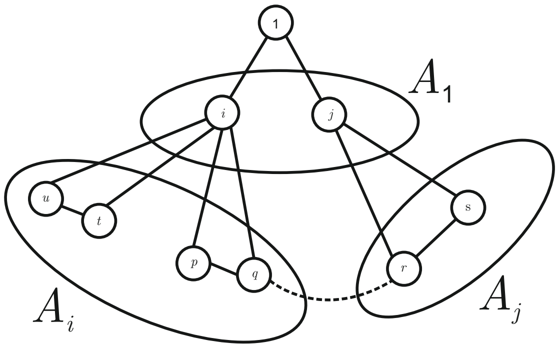


luego $A_q \cap A_r \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción con la parte 4).

ii. Si r y q son amigos entonces $r, i \in A_q$, luego $A_q \cap A_j \neq \varnothing$ y $A_q \cap A_1 \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción.

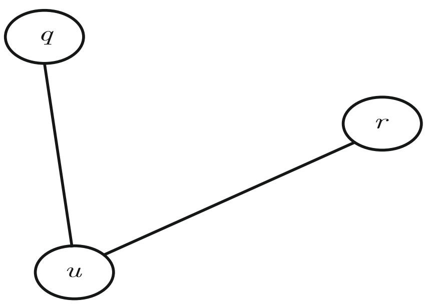


b. Supongamos ahora que $|A_i| > |A_j| \neq 0$. El esquema que usaremos será el siguiente:



Para este caso, el análisis es el mismo que en el caso a.

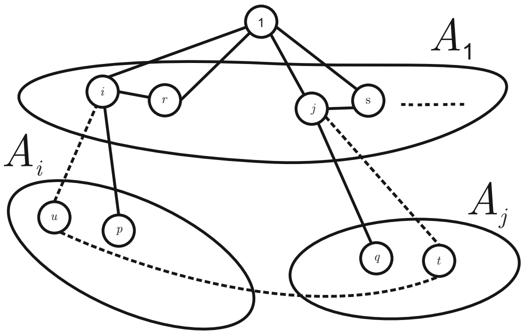
i. Si q y r no son amigos entonces debe existir un u tal que $r \in A_u$. Entonces $A_q \cap A_r \neq \varnothing$ y esto es una contradicción.



ii. Si q y r son amigos entonces $r, i \in A_q$ lo que implica que $A_q \cap A_1 \neq \varnothing$ y $A_q \cap A_1 \neq \varnothing$ lo cual es una contradicción.

Concluimos que en los casos $a)$ y $b)$ siempre se llega a una contradicción si $A_j \neq \varnothing$. Luego $A_j = \varnothing$ o $A_i = \varnothing$.

6) Ahora probemos que si la persona ① conoce a más de dos personas ⓘ y ⓙ, entonces: $|A_i| = |A_j|$. En efecto, Supongamos que ⓘ y ⓙ son dos amigos de ① que no se conocen. Entonces probaremos que A_i y A_j tienen el mismo número de elementos. Para ello, consideremos el siguiente esquema:



A. Si $A_j \neq \varnothing$ y $A_i \neq \varnothing$ entonces $q \in A_j$, $p \in A_i$.

i. En A_j: Si $t \neq q$ entonces $\exists u \neq p$, $u \in A_i$. Pues de lo contrario, si $u = p$ implicaría que p y j poseen dos amigos comunes. Por lo tanto el número de elementos de A_i debe ser mayor o igual que el número de elementos de A_j

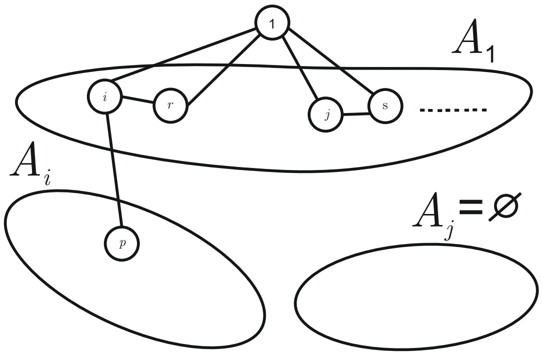
$$|A_i| \geq |A_j|$$

ii. En A_i: Se procede en forma análoga y se prueba que

$$|A_i| \leq |A_j|$$

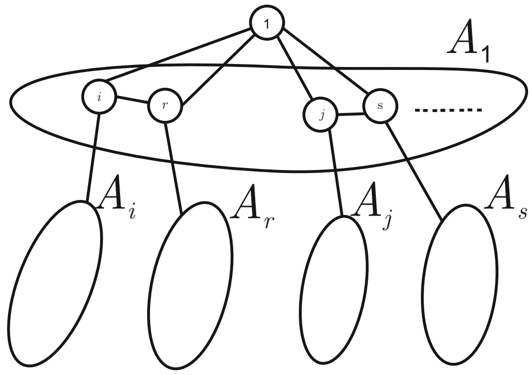
Por lo tanto $|A_i| = |A_j|$ cuando i y j no son amigos.

B. Si $A_j = \varnothing$ entonces $A_i = \varnothing$. En efecto, consideremos el siguiente esquema:



Supongamos que $A_i \neq \varnothing$, entonces $\exists\, p \in A_i$. Luego, el amigo común entre p y j que debe existir será ⓤ y $u \in A_j$ pero esto contradice el hecho de ser $A_j = \varnothing$. Por lo tanto no debe existir $p \in A_i$. Luego, $A_i = \varnothing$.

7) Ahora probemos que todos los A_i $(i = 2, 3, \ldots, 2k + 1)$ tienen el mismo número de elementos. En efecto, consideremos el siguiente esquema:



Como i y j no se conocen, entonces por la parte 6): $|A_i| = |A_j|$.

Como i y s no se conocen, entonces se tiene: $|A_i| = |A_s|$.

Como r y s no se conocen, entonces se tiene: $|A_r| = |A_s|$.

Como r y j no se conocen, entonces se tiene: $|A_j| = |A_r|$.

Luego: $|A_i| = |A_j| = |A_r| = |A_s| = \ldots$ y así sucesivamente.

8) Ahora, podemos concluir que, como ① fue elegido en forma arbitraria, entonces el r puede ser elegido como ①, entonces se cumple que

$$|A_1| = |A_j| = |A_s| = |A_i|$$

De aquí todas las personas en la fiesta tienen el mismo número de amigos.

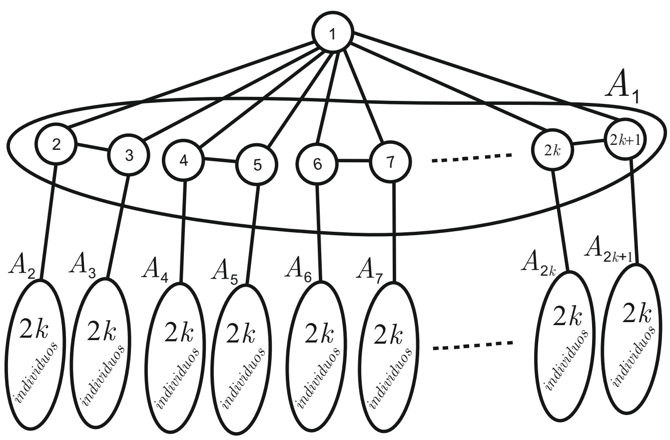
9) Luego, como ① tiene a ⓘ como amigo y $i = 2, 3, \ldots, 2k+1$ entonces A_1 tiene $2k$ elementos. Entonces para contabilizar el número total de personas en la fiesta utilizamos la fórmula (ii.)

$$n = 1 + (2k - 1)(2k) \tag{1}$$

$$n = 1 + 2k(2k) - 2k$$

$$n = 1 + 4k^2 - 2k \tag{2}$$

10) Ahora, vamos a construir la matriz de adyacencia del grafo que representa la amistad entre las personas de la fiesta.



Usando la fórmula (ii.):

$$n = 1 + |A_1| + \sum_{j=2}^{2k+1} |A_j| = 1 + 2k + \sum_{j=2}^{2k+1} |A_j|$$

$$n = 1 + 2k + 2k \sum_{j=2}^{2k+1} 1 = 1 + 2k + 2k[2k + 1 - 2 + 1]$$

$$n = 4k^2 - 2k + 1$$

11) La matriz de adyacencia tendrá la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

La matriz de adyacencia siempre es simétrica y cada fila o columna tendra $2k$ entradas iguales a 1 (que refleja la cantidad de amigos de cada nodo).

12) Por otro lado debemos notar que la matriz M tiene la siguiente propiedad:

La matriz M^2 va a reflejar el número de amigos comunes entre los nodos (o personas). Es decir la entrada $(M^2)_{ij}$ representa el número de amigos comunes entre las personas i y j y la entrada $(M^2)_{ii}$ representa el número de amigos que tiene la persona i.

13) La matriz M^2 tiene la siguiente forma:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2k & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2k & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2k & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2k & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2k & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 2k \end{pmatrix}_{n \times n}$$

La cual puede ser escrita como

$$M^2 = U + (2k - 1)I$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

14) Ahora, vamos a usar algunas propiedades del álgebra lineal para calcular el valor de k.

   i. Lo primero que notamos es que las entradas de la matriz M son puros unos (números enteros)

   ii. Los autovalores de la matriz M, son las raíces cuadradas (positivas o negativas) de los autovalores de M^2.

   iii. Es fácil verificar que n es un autovalor para la matriz U asociado al autovector $v = (1, 1, 1, \ldots, 1)$

$$U \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

   iv. Por propiedad de traza de una matriz se cumple:

$$n = \text{traza}(U) = \sum_{i=1}^{n} u_i = n, \text{ donde los } u_i \text{ son los autovalores de } U$$

   Si $u_1 = n$ entonces $\sum_{i=1}^{n} u_i = n + \sum_{i=2}^{n} u_i = n$. Luego $\sum_{i=2}^{n} u_i = 0$.

15) Por otro lado, traza$(M) = 0$, entonces

$$\text{traza}(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

Así mismo

$$\begin{aligned} \text{traza}(M^2) &= \text{traza}(U) + \text{traza}((2k-1)I) \\ &= n + n(2k-1) = n[1 + 2k - 1] \\ &= 2k \cdot n \end{aligned}$$

Por otro lado, para la matriz diagonal $(2k-1)I = B$ se tiene que $p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = 0$, lo cual implica que $p(\lambda) = ((2k-1) - \lambda)^n$ es el polinomio característico entonces tiene como autovalor $\lambda_i' = 2k - 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (n veces).

16) Por otro lado se cumple,

$$\det|U - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} - \lambda I = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Usando operaciones elementales fila, la 1^{ra} columna C_1 la multiplicamos por (-1) y sumamos a cada columna de la matriz $(U - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

Ahora sumando la $2^{\text{da}}, 3^{\text{ra}}, 4^{\text{ta}}, \ldots, n$ filas a la 1^{ra} fila se obtiene

$$= \begin{vmatrix} [(n-1)-\lambda] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

y por ser matrices triangulares

$$\begin{aligned} \det(U - \lambda I) &= [(n-1)-\lambda] \cdot (-\lambda)^{n-1} + (-\lambda)^{n-1} \cdot (1) \\ &= (-\lambda)^{n-1} \cdot ((n-1) - \lambda + 1) \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \lambda^{n-1} \cdot (n - \lambda) \end{aligned}$$

de donde $0 = \det(U - \lambda I) = (-1)^{n-1} \cdot \lambda^{n-1} \cdot (n - \lambda)$ nos brinda los autovalores de $U, \lambda_1 = n \wedge \lambda_i = 0,\ i = 2, 3, \ldots, n$ (autovalor cero de multiplicidad $n-1$).

Con esto queda también probada la afirmación en 13.

17) Por la parte 15) se tiene que $B = (2k-1)I$ es una matriz que tiene como autovalor a $\lambda_1' = (2k-1)$ de multiplicidad n y los autovalores de U son $\lambda_1 = n$ y $\lambda_i = 0\ i = 2, 3, \ldots, n-1$.

Por la forma de $M^2 = U + (2k-1)I$ un autovalor λ_1 de U y λ_1' de $(2k-1)I$ forman un autovalor de M^2.

En efecto sea θ autovalor de M^2 entonces

$$M^2 v = \theta v$$

lo que implica que

$$(U + (2k-1)I)v = \theta v$$

por lo tanto

$$Uv + (2k-1)Iv = \theta v$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 v + \lambda_1' v &= \theta v \\ (\lambda_1 + \lambda_1') &= \theta v \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \theta &= \lambda_1 + \lambda_1' \\ \theta &= n + 2k - 1. \end{aligned}$$

Entonces los autovalores de M^2 pueden ser formados

$$\begin{array}{lll} \theta_1 & = \lambda_1 + \lambda_1' & = n + 2k - 1 \\ \theta_2 & = \lambda_2 + \lambda_2' & = 0 + 2k - 1 = 2k - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_n & = \lambda_n + \lambda_n' & = 0 + 2k - 1 = 2k - 1 \end{array}$$

Luego, los autovalores de M deben ser las raíces cuadradas (positivas o negativas) de los autovalores de M^2

$$\sigma_1 = \sqrt{n + 2k - 1} \text{ y } \sigma_i = \sqrt{2k - 1} \; i = 2, 3, \ldots, n$$

Entonces, por la traza de M igual a cero, se tiene

$$0 = \text{traza}(M) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \sqrt{n + 2k - 1} + \sqrt{2k - 1} + \ldots + \sqrt{2k - 1}$$

entonces existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\sqrt{n + 2k - 1} = a\sqrt{2k - 1}$$

Por otro lado recordemos que k es un entero positivo, luego

$$n + 2k - 1 = a^2(2k - 1)$$

y por la relación (2) se tiene

$$4k^2 = a^2(2k - 1)$$

De donde la única solución resulta para $k = 1$. Luego, usando la relación $n = 4k^2 - 2k + 1$ se concluye que $n = 3$. Con lo cual queda probado el teorema.

3 Conclusiones

El uso de la teoría de grafos y del algebra lineal nos ha permitido brindar otra demostración de una variante del famoso teorema de la amistad de Ramsey. De esta manera se muestra que se pueden llegar a los mismos resultados siguiendo caminos diferentes.

Referencias Bibliográficas

[1] Erdos, P., Rényi, A., Sós, V. (1966). *On a problem of graph theory Hungar*. Studia Sci. Math.1: 215-235.

[2] Ramsey, F. (1930) *On a problem of Formal Logic*. Proc. London Math. Soc. S2-30 (1): 264-286.

[3] Chvátal, V., Kotzig, A., Rosenberg, I., Davies, R. (1976). *There are* 2^{N_α} *friendship graphs of cardinal* $N_{\boldsymbol{\alpha}}$. Canadian Mathematical Bulletin 19 (4): 431-433.

[4] Foulds, L. (1992). *Graph Theory Applications*. New York, Springer Verlag.

[5] Lang, S. (1987). *Linear Algebra*. Third Edition, New York, Springer Verlag.