PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XIX N°2, pp. 86-90, Julio–Diciembre 2016

Sobre una Ecuación Elíptica en un Dominio no Acotado

Carlos Peña[1] ***Elizabeth Cosi***[2]

(Recibido: 04/07/2016 - Aceptado: 13/09/2016)

Resumen: En este trabajo empleamos la Transformada de Fourier para estudiar un teorema de regularidad elíptica para la solución débil de la ecuación $-\Delta u + \alpha(\cdot)u = f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Palabras Claves: Transformada de Fourier, Solución débil, Regularidad Elíptica

On an Elliptic Equation in a Domain Unbounded

Abstract: In this paper we use the Fourier Transform to study a theorem of elliptic regularity for solution weak of the equation $-\Delta u + \alpha(\cdot)u = f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Key Words: Fourier transform, Weak solution, Elliptic regularity.

1 Introducción

En el presente trabajo estudiamos la regularidad de la solución débil de la ecuación elíptica

$$-\Delta u + \alpha(\cdot)u = f \text{ en } \mathbb{R}^n \tag{1}$$

con $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Considerando α una constante real, H. Brézis [2] y S. Kesavan [4] estudiaron el problema (1) con condición de Dirichlet en la frontera. Motivados por los trabajos mencionados nosotros estudiamos el problema (1) considerando α una función real de variable vectorial, esto es, $\alpha(x)$, y con las hipótesis

$$u \in H^1(\mathbb{R}^n),\ \alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \text{ y } \alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 \text{ c.s en } \mathbb{R}^n$$

demostramos con la ayuda de la Transformada de Fourier que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$|u|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq C|f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: cpenam@unmsm.edu.pe
[2]UNFV, Facultad de Educación, e-mail: ecosi_euded@yahoo.es

2 Metodología

Definición 2.1. El ***Espacio de Sobolev*** $H^m(\mathbb{R}^n)$ se define por

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ / \ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \ |\alpha| \leq m \Big\}$$

donde $D^\alpha u$ es la derivada en el sentido distribucional,

Proposición 2.1. *El espacio* $H^m(\mathbb{R}^n)$ *con el producto interno*

$$(u, v)_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

y con norma inducida

$$|u|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|^2 dx \tag{2}$$

es un espacio de Hilbert, reflexivo y separable.
Demostración: Ver Adams [1].

Definición 2.2. Diremos que $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ es solucion débil de (1) si

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) u(x) w(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) w(x) dx, \ \forall w \in H^1(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Teorema 2.1. *Existe una única solución débil de* (1)

Demostración: Basta aplicar el teorema de Lax-Milgram a la forma bilineal

$$a(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) u(x) v(x) dx$$

Observación 2.1. Reemplazando $u = w$ en (3) se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) |u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) u(x) dx$$

entonces

$$\begin{aligned} \beta |u|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x) u(x) dx \\ &\leq |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)} |u|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

donde $\beta = min\{1, \alpha_0\} > 0$.
Por lo tanto,

$$|u|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4}$$

Definición 2.3. Sea $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la ***Transformada de Fourier*** de u, denotada por $\widehat{u}$, es una función definida en $\mathbb{R}^n$ por:

$$\widehat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} u(\xi) d\xi$$

donde $\langle x, \xi \rangle = x_1 \xi_1 + \cdots + x_n \xi_n$ es el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Observación 2.2. La transformada de Fourier esta bien definida en $L^1(\mathbb{R}^n)$.
En efecto, como $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tenemos

$$|\widehat{u}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}||u(\xi)|d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi)|d\xi = |u|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

De la observación 2.2 se deduce que

$$|\widehat{u}|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq |u|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Por otro lado, usando la identidad de Green, se obtiene

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial \xi_j}}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\frac{\partial u}{\partial \xi_j}(\xi)d\xi = 2\pi i x_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}u(\xi)d\xi = 2\pi i x_j\widehat{u}(x)$$

y

$$\widehat{-\triangle u} = -\sum_{k=1}^{n}\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2}} = -\sum_{k=1}^{n}(2\pi i x_k)^2\widehat{u} = 4\pi^2|x|^2\widehat{u}. \tag{5}$$

Para todo $m \in \mathbb{N}$, consideremos el siguiente espacio

$$H = \left\{u \in S'(\mathbb{R}) \ / \ (1+|x|^2)^{m/2}\ \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

dotado del producto interno

$$\big((u,v)\big)_H = \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x|^2\right)^m\widehat{u}(x)\widehat{v}(x)dx$$

y con norma

$$||u||_H^2 = \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|x|^2\right)^m|\widehat{u}(x)|^2dx. \tag{6}$$

Proposición 2.2. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, se cumple*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in S'(\mathbb{R}^n) \ / \ (1+|x|^2)^{m/2}\ \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Además las normas dadas en (2) *y* (6) *son respectivamente equivalentes.*
Demostración: Ver Cavalcanti y Domingos [3].

Ahora enunciamos el resultado principal de este trabajo

3 Resultados y Discusión

Teorema 3.1. *Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ c.s en $\mathbb{R}^n$. Si $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ es solución débil de la ecuación* (1) *entonces $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ y*

$$|u|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq C|f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

donde C es una constante independiente de f.

Demostración: Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$|\widehat{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}(x)|^2dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)|\widehat{u}(x)|^2dx = |u|_{H^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

luego
$$\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{7}$$
Como $\alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ entonces
$$|\widehat{\alpha(\cdot)u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = |\alpha(\cdot)u|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq |\alpha|_\infty |u|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$$
luego
$$\widehat{\alpha(\cdot)u} \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{8}$$
De (1), (5), (7)y (8) se obtiene
$$(1 + |\cdot|^2)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$
entonces
$$u \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

Por otro lado,
$$\begin{aligned} |(1 + |x|^2)\widehat{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq |\widehat{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||x|^2\widehat{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_1\big(2|\widehat{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |\widehat{f}|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\big). \end{aligned}$$
Por el teorema de Plancherel se tiene
$$|(1 + |x|^2)\widehat{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\big(2|u|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\big). \tag{9}$$
De las desigualdades (4) y (9) se obtiene
$$|(1 + |x|^2)\widehat{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C|f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{10}$$
Por otro lado,
$$|u|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^2 |\widehat{u}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |x|)\widehat{u}(x)|^2 dx = |(1 + |x|^2)\widehat{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$
De la desigualdad (10) obtenemos
$$|u|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq C|f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

4 Conclusiones

Usando las propiedades de la Transformada de Fourier, se demuestra que si $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ es solución débil de la ecuación (1) entonces $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ y
$$|u|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq C|f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Referencias Bibliográficas

[1] Adams, R. A. (1975). *Sobolev Spaces.* New York: Academic Press.

[2] Brézis, H. (1973). *Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications.* Paris: Mason.

[3] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N. (2009). *Introdução à Teoria das distribuções e aos Espaços de Sobolev.* Maringá: Eduem.

[4] Kesavan, S. (1990). *Topics in Functional Analysis and Applications.* New Delhi: Willey Easten Limited.