PESQUIMAT 20(1): 19–40 (2017) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
http://dx.doi.org/10.15381/pes.v20i1.13746 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

No Existencia Global para un Sistema de Ecuaciones de Onda Viscoelástica no Lineal

***Teófanes Quispe Méndez*[1], *Yolanda Santiago Ayala*[2],**
***Santiago Rojas Romero*[3]**

Resumen: Consideramos un problema mixto para un sistema de ecuaciones de onda viscoelástica no lineal. Probamos la existencia de su solución local por el método de Faedo-Galerkin y mostramos la explosión de soluciones por el método indirecto.

Palabras clave: Sistema de ecuaciones de onda viscoelástica no lineal; solución local; método de Faedo-Galerkin; explosión de soluciones.

Global Nonexistence for a System of Nonlinear Viscoelastic Wave Equations

Abstract: We consider a mixed problem for a system of nonlinear viscoelastic wave equations. We prove the existence of its local solution by the Faedo-Galerkin method and show the blow-up of solutions by the indirect method.

Keywords: System of nonlinear viscoelastic wave equations; local solution; Faedo-Galerkin method; blow-up of solutions.

Recibido: 04/04/2017. *Aceptado*: 31/07/2017. *Publicado online*: 01/09/2017

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: tquispem@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: ysantiagoa@unmsm.edu.pe
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: srojasr@unmsm.edu.pe

1. Introducción

En este artículo, se considera el siguiente sistema de ecuaciones de onda viscoelástica no lineal:

$$\left|u'\right|^{\rho} u'' - \Delta u - \Delta u'' + \int_0^t g_1\left(t-s\right)\Delta u\left(s\right)ds - \Delta u' = f_1\left(u,v\right) \quad \text{en } \Omega\times\left]0,\infty\right[, \tag{1}$$

$$\left|v'\right|^{\rho} v'' - \Delta v - \Delta v'' + \int_0^t g_2\left(t-s\right)\Delta v\left(s\right)ds - \Delta v' = f_2\left(u,v\right) \quad \text{en } \Omega\times\left]0,\infty\right[, \tag{2}$$

con condiciones iniciales

$$u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \, u'\left(x,0\right) = u_1\left(x\right) \quad \text{en } \Omega, \tag{3}$$

$$v\left(x,0\right) = v_0\left(x\right), \, v'\left(x,0\right) = v_1\left(x\right) \quad \text{en } \Omega, \tag{4}$$

y condiciones de frontera

$$u\left(x,t\right) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega\times\left]0,\infty\right[, \tag{5}$$

$$v\left(x,t\right) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega\times\left]0,\infty\right[, \tag{6}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 1)$ con frontera regular $\partial\Omega$, Δ es el operador Laplaciano y ρ es un número real positivo. Las funciones u_0, u_1, v_0 y v_1 son datos iniciales dados. Las funciones $g_1\left(t\right)$ y $g_2\left(t\right)$ son reales positivas diferenciables para $t\geq 0$ y las funciones $f_1\left(s,r\right)$ y $f_2\left(s,r\right)$ son reales no lineales para $\left(s,r\right)\in\mathbb{R}^2$. Las derivadas parciales con respecto al tiempo se denotan como: $u' = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ y $u'' = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Este problema tiene su origen en la descripción matemática de los materiales viscoelásticos y describe la interacción de dos campos escalares. Es bien sabido que los materiales viscoelásticos exhiben amortiguación natural, debido a la propiedad especial de estos materiales para retener una memoria de su historia pasada. Desde el punto de vista matemático, estos efectos de amortiguación se modelan por los operadores integro-diferenciales. Por tanto, la dinámica de los materiales viscoelásticos son de gran importancia e interés ya que tienen amplias aplicaciones en la física y la ingeniería. Más información al respecto, ver [3, 6, 21].

El presente trabajo fue motivado por el problema de valores iniciales y contorno de la ecuación escalar

$$\begin{cases} \left|u'\right|^{\rho} u'' - \Delta u - \Delta u'' + \displaystyle\int_0^t g\left(t-s\right)\Delta u\left(s\right)ds - \Delta u' = f\left(u\right) & \text{en } \Omega\times\left]0,\infty\right[, \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \, u'\left(x,0\right) = u_1\left(x\right) & \text{en } \Omega, \\ u\left(x,t\right) = 0 & \text{en } \partial\Omega\times\left]0,\infty\right[, \end{cases} \tag{7}$$

que ha sido estudiado por muchos autores, y sus resultados relativos a la existencia, comportamiento asintótico y explosión de soluciones han sido establecidos recientemente, ver por ejemplo [3, 7, 10, 11, 12, 16]. Aquí, entenderemos que

$$-\Delta u'', \quad \int_0^t g\left(t-s\right)\Delta u\left(s\right)ds, \quad -\Delta u' \quad \text{y} \quad f\left(u\right)$$

son los términos de dispersión, disipativo de viscoelasticidad, disipativo de viscosidad y fuente, respectivamente.

El problema (7) cuando $f(u) = 0$, Cavalcanti et al. [3] estudiaron la existencia global y el decaimiento exponencial. Con $f(u) = b|u|^{p-2}u$, Messaoudi y Tatar [11] demostraron la existencia global y el decaimiento exponencial. En ausencia del término disipativo de viscosidad y $f(u) = b|u|^{p-2}u$, Messaoudi y Tatar [10, 12] demostraron la existencia global y el decaimiento exponencial. Con el término disipativo de viscosidad de la forma u' y $f(u) = |u|^{p-2}u$, Wu [24] demostró la existencia global y los decaimientos exponencial y polinomial. En ausencia del término disipativo de viscosidad y $f(u) = b|u|^{p-2}u$, Liu [16] estableció el decaimiento exponencial y la explosión de soluciones en tiempo finito.

El presente estudio también está motivado por el sistema propuesto por Segal [22]

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + m_1^2 u + k_1^2 u v^2 = 0, \\ v'' - \Delta v + m_2^2 v + k_2^2 u^2 v = 0, \end{cases} \tag{8}$$

que surge en el estudio de la teoría del campo cuántico y describe la interacción de los mesones u y v, donde m_1 y m_2 son las masas de estos mesones respectivamente, k_1 y k_2 son las constantes de interacción. El siguiente sistema de ecuaciones de onda con término fuente no lineal

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \alpha_1 u + \beta_1 |v|^{p+2} |u|^p u = f_1, \\ v'' - \Delta v + \alpha_2 v + \beta_2 |u|^{p+2} |v|^p v = f_2, \end{cases} \tag{9}$$

fué estudiado por Medeiros y Miranda [8, 9]. Otro sistema de ecuaciones de onda con términos de viscoelasticidad, viscosidad y fuente

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \displaystyle\int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)\,ds - \Delta u' = f_1(u,v), \\ v'' - \Delta v + \displaystyle\int_0^t g_1(t-s)\Delta v(s)\,ds - \Delta v' = f_2(u,v), \end{cases} \tag{10}$$

fue investigado por Liang y Gao [14] quienes demostraron la existencia global, el decaimiento exponencial y la explosión de soluciones; Andrade y Mognon [2], sin término de viscosidad establecieron la existencia y la unicidad global; Sun y Wang [23], sin término de viscoelasticidad, demostraron la existencia local y global, el decaimiento exponencial y la explosión de soluciones en tiempo finito. Posteriormente, se formula el siguiente sistema

$$\begin{cases} |u'|^\rho u'' - \Delta u - \Delta u'' - \Delta u' = f_1(u,v), \\ |v'|^\rho v'' - \Delta v - \Delta v'' - \Delta v' = f_2(u,v), \end{cases} \tag{11}$$

el cual fue estudiado por Liu [18] quien estableció la existencia global y el decaimiento exponencial.

Liu [17] demostró los decaimientos exponencial y polinomial para el problema (1) – (6) sin términos de viscosidad. Liu y Yu [19], establecieron la existencia local y global, y el decaimiento exponencial. Park y Park [20] con los términos de viscosidad de la forma $\gamma_1 h_1(u')$ y $\gamma_2 h_2(v')$, los cuales cumplen ciertas condiciones de acotación, probaron el decaimiento general por el método de la perturbación de la energía.

Motivados por los trabajos antes mencionados, estudiamos el problema (1) – (6). Primero mostramos la existencia de la solución local mediante el método de Faedo-Galerkin. Segundo probamos la propiedad de explosión de soluciones en tiempo finito, mediante el método indirecto con energía inicial acotada por cierta constante positiva. En la discusión del problema (1) – (6), empleamos las estrategias y técnicas inspiradas en los trabajos de Liu y Yu [19], y Liu [16].

El trabajo esta organizado de la siguiente manera. En la Sección 2, se establecen algunas notaciones, se mencionan resultados sin demostración y se imponen las hipótesis del trabajo. En la sección 3, damos el teorema de existencia local y su demostración. Finalmente en la sección 4, enunciamos el teorema de no existencia global y su demostración.

2. Preliminares

En esta sección presentamos algunos conceptos (mayor información, ver [15]), notaciones, hipótesis y resultados sin demostración, los cuales serán usados en el desarrollo del presente trabajo.

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera regular $\partial\Omega$. Denotamos el producto interno en $L^2(\Omega)$ por

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx.$$

Denotamos por $|\,.\,|_p$ la norma usual en el espacio $L^p(\Omega)$, para $1\le p\le\infty$. Consideramos el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, provisto con el producto interno y norma dados por

$$((u,v))=\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx \quad \text{y} \quad \|u\|=\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

respectivamente.

Sea X un espacio de Banach, T y p números reales tales que $0<T\le\infty$ y $1\le p\le\infty$. Representamos con $L^p(0,T;X)$ al espacio de Banach de las funciones vectoriales $u:\,]0,T[\longrightarrow X$ medibles con $\|u(t)\|_X\in L^p(0,T)$, provisto de la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}=\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\le p<\infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)}=\sup_{0<t<T}\text{ess}\,\|u(t)\|_X\ ,\ p=\infty.$$

Similarmente, cuando $0<T<\infty$, representamos con $C([0,T];X)$ al espacio de Banach de las funciones continuas $u:[0,T]\longrightarrow X$, provisto de la norma

$$\|u\|_{C([0,T];X)}=\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_X\ .$$

Denotamos las derivadas parciales con respecto al tiempo: $w'=\dfrac{\partial w}{\partial t}$ y $w''=\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, y escribimos $w(t)(x)=w(x,t)$.

Hipótesis. Imponemos sobre el número ρ y las funciones reales g_1, g_2, f_1 y f_2 las siguientes condiciones:

(H_1) ρ es un número real tal que

$$0<\rho\le\frac{2}{n-2} \text{ si } n\ge 3 \ \text{ y } \ \rho>0 \text{ si } n=1,2.$$

(H_2) $g_1, g_2 : [0, \infty[\to [0, \infty[$ son funciones no crecientes, acotadas y de clase C^1 tales que

$$g_1(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g_1(s)ds = l_1 > 0,$$

$$g_2(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g_2(s)ds = l_2 > 0.$$

(H_3) $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y existe una constante $d > 0$ tal que

$$|f_1(u,v)| \leq d\left(|u+v|^{r-1} + |u|^{\frac{r}{2}-1}|v|^{\frac{r}{2}}\right), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$|f_2(u,v)| \leq d\left(|u+v|^{r-1} + |u|^{\frac{r}{2}}|v|^{\frac{r}{2}-1}\right), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

donde

$$r > 2 \text{ si } n = 1,2 \ \text{ y } 2 < r \leq \frac{2(n-1)}{n-2} \text{ si } n \geq 3. \tag{12}$$

(H_4) Existe una función $F : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[$ diferenciable tal que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f_1(u,v) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f_2(u,v), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2;$$

existen constantes $c_0, c_1 > 0$ tales que;

$$c_0[|u|^r + |v|^r] \leq uf_1(u,v) + vf_2(u,v) = rF(u,v) \leq c_1[|u|^r + |v|^r], \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2;$$

y para cada $\lambda \geq 0$ se tiene

$$F(\lambda u, \lambda v) = \lambda^r F(u,v), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

donde r verifica (12).

Observación 2.1. *La función que satisface (H_4), puede ser tomado como por ejemplo (ver [1])*

$$F(u,v) = \frac{1}{r}\left[a|u+v|^r + 2b|uv|^{\frac{r}{2}}\right],$$

donde $a, b > 0$ son constantes reales, así

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= a|u+v|^{r-2}(u+v) + b|u|^{\frac{r}{2}-2}|v|^{\frac{r}{2}}u, \\ f_2(u,v) &= a|u+v|^{r-2}(u+v) + b|v|^{\frac{r}{2}-2}|u|^{\frac{r}{2}}v. \end{aligned}$$

Lema 2.2 (**Desigualdad de Sobolev-Poincaré**). *Sea Ω un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$. Si $2 \leq q \leq \dfrac{2n}{n-2}$ para $n \geq 3$ y $2 \leq q < \infty$ para $n \leq 2$, entonces existe una constante $C_* > 0$ tal que*

$$|u|_q \leq C_* \|u\|, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración. Ver [5].

Lema 2.3 (Desigualdad generalizada de Gronwall). *Sea $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ continua, $g :]0, \infty[\to]0, \infty[$ continua y no decreciente y sea C una constante positiva. Si*

$$f(t) \leq C + \int_0^t g(f(s))\, ds,\ 0 \leq t < \infty,$$

entonces

$$f(t) \leq G^{-1}(T_*) < \infty,\ 0 \leq t \leq T_*,$$

para cualquier número fijo $T_* < G(\infty)$, donde

$$G(\tau) = \int_C^\tau \frac{1}{g(s)} ds,\ \text{para } \tau \geq C.$$

Además, si $G(\infty) = \infty$, entonces

$$f(t) \leq G^{-1}(t),\ \text{para todo } t \geq 0.$$

Demostración. Ver [13].

Diferenciando el término $g\Box w$ y haciendo algunos cálculos, se obtiene el siguiente lema

Lema 2.4. *Si $g \in C^1([0, \infty[)$ y $w \in C^1\left([0, T]; L^2(\Omega)\right)$, entonces*

$$\begin{aligned} \int_0^t g(t-s)\left(w(s), w'(t)\right) ds &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g\Box w)(t) - \left(\int_0^t g(s)ds\right)|w(t)|_2^2\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}g(t)\,|w(t)|_2^2 + \frac{1}{2}\left(g'\Box w\right)(t), \end{aligned}$$

donde

$$(h\Box w)(t) := \int_0^t h(t-s)\,|w(t) - w(s)|_2^2\, ds.$$

3. Existencia Local

En esta sección, discutiremos la existencia local de la solución débil del problema $(1) - (6)$, usando el método de Faedo-Galerkin. Debemos notar que el siguiente teorema es similar al Teorema 1 de Liu y Yu [19], pero las estrategias empleadas en las demostraciones de ambos teoremas son distintas en cierta manera, a pesar que se utilizan el mismo método de Faedo-Galerkin.

Teorema 3.1 (Existencia local). *Supongamos que $(H_1) - (H_3)$ se verifican y (u_0, v_0), $(u_1, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Entonces el problema $(1) - (6)$ tiene al menos una **solución débil** (u, v) en la clase*

$$\begin{aligned} u, v &\in L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right), \\ u', v' &\in L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right), \\ u'', v'' &\in L^2\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right), \end{aligned}$$

para algún número $T_0 > 0$.

Demostración. Abordaremos la demostración en cinco etapas, como sigue:

Soluciones aproximadas. Sea $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de $H_0^1(\Omega)$ que es ortonormal en $L^2(\Omega)$ y sea V_m el subespacio de $H_0^1(\Omega)$, generado por los primeros m vectores $w_1, w_2, ..., w_m$ de $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Consideremos

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} r_{jm}(t)\, w_j, \quad v_m(t) = \sum_{j=1}^{m} s_{jm}(t)\, w_j$$

la solución aproximada en V_m del problema $(1)-(6)$, donde las funciones $r_{jm}(t)$, $s_{jm}(t)$, $j = 1, 2, ..., m$, son determinadas a partir del siguiente problema en ecuaciones diferenciales ordinarias, para $w \in V_m$

$$\begin{cases} (|u_m'|^\rho\, u_m'', w) + ((u_m, w)) + ((u_m'', w)) - \displaystyle\int_0^t g_1(t-s)\,((u_m(s), w))\, ds \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + ((u_m', w)) = (f_1(u_m, v_m), w), \\ (|v_m'|^\rho\, v_m'', w) + ((v_m, w)) + ((v_m'', w)) - \displaystyle\int_0^t g_2(t-s)\,((v_m(s), w))\, ds \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + ((v_m', w)) = (f_2(u_m, v_m), w), \\ u_m(0) = u_{0m}, \;\; u_m'(0) = u_{1m}, \\ v_m(0) = v_{0m}, \;\; v_m'(0) = v_{1m}, \end{cases} \tag{13}$$

donde

$$\begin{array}{lll} u_{0m} = \sum\limits_{j=1}^{m} r_{0jm} w_j, & u_{0m} \to u_0 & \text{fuerte en } \; H_0^1(\Omega), \\ u_{1m} = \sum\limits_{j=1}^{m} r_{1jm} w_j, & u_{1m} \to u_1 & \text{fuerte en } \; H_0^1(\Omega), \\ v_{0m} = \sum\limits_{j=1}^{m} s_{0jm} w_j, & v_{0m} \to v_0 & \text{fuerte en } \; H_0^1(\Omega), \\ v_{1m} = \sum\limits_{j=1}^{m} s_{1jm} w_j, & v_{1m} \to v_1 & \text{fuerte en } \; H_0^1(\Omega). \end{array} \tag{14}$$

Desde que se verifica (H_1) y (H_3), por la inmersión de Sobolev-Poincaré, los términos no lineales

$$\int_\Omega |u_m'|^\rho\, u_m'' w dx, \quad \int_\Omega |v_m'|^\rho\, v_m'' w dx, \quad \int_\Omega f_1(u_m, v_m) w dx \;\; \text{y} \;\; \int_\Omega f_2(u_m, v_m) w dx$$

en (13) tienen sentido. Por la teoría estándar del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (por ejemplo, el teorema de Carathéodory [4]), aseguramos la existencia de una solución local (u_m, v_m) del problema aproximada (13) en algún intervalo $[0, T_m[$. Por lo cual $u_m'(t)$, $v_m'(t)$, $u_m''(t)$ y $v_m''(t)$ pertenecen al subespacio V_m. Las siguientes estimativas a priori permitirán extender la solución (u_m, v_m) a un intervalo $[0, T_0]$ independiente de m.

Primera estimativa. Tomando $w = u_m'(t)$ en $(13)_1$ y $w = v_m'(t)$ en $(13)_2$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho+2}\left|u_m'(t)\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2}\left\|u_m(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|u_m'(t)\right\|^2\right] + \left\|u_m'(t)\right\|^2$$
$$- \int_0^t g_1(t-s)\left(\left(u_m(s), u_m'(t)\right)\right) ds = \left(f_1(u_m, v_m), u_m'(t)\right), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho+2}\left|v_m'(t)\right|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{1}{2}\left\|v_m(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|v_m'(t)\right\|^2\right]+\left\|v_m'(t)\right\|^2\\&\qquad-\int_0^t g_2(t-s)\left(\left(v_m(s),v_m'(t)\right)\right)ds=\left(f_2(u_m,v_m),v_m'(t)\right).\end{aligned}\tag{16}$$

Del Lema 2.4, resulta

$$\begin{aligned}-\int_0^t g(t-s)\left(\nabla w(s),\nabla w'(t)\right)ds &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g\Box\nabla w)(t)-\left(\int_0^t g(s)ds\right)\left|\nabla w(t)\right|_2^2\right]\\&\quad+\frac{1}{2}g(t)\left|\nabla w(t)\right|_2^2-\frac{1}{2}\left(g'\Box\nabla w\right)(t)\end{aligned}\tag{17}$$

Sumando (15) y (16), y luego usando (17), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_m(t) &= \left(f_1(u_m,v_m),u_m'(t)\right)+\left(f_2(u_m,v_m),v_m'(t)\right)-\frac{1}{2}g_1(t)\left|\nabla u_m(t)\right|_2^2\\&\quad-\frac{1}{2}g_2(t)\left|\nabla v_m(t)\right|_2^2+\frac{1}{2}\left(g_1'\Box\nabla u_m\right)(t)+\frac{1}{2}\left(g_2'\Box\nabla v_m\right)(t),\end{aligned}\tag{18}$$

donde

$$\begin{aligned}E_m(t) &= \frac{1}{\rho+2}\left|u_m'(t)\right|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{1}{\rho+2}\left|v_m'(t)\right|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{1}{2}\left\|u_m'(t)\right\|^2\\&\quad+\frac{1}{2}\left\|v_m'(t)\right\|^2+\frac{1}{2}G_1(t)\left\|u_m(t)\right\|^2+\frac{1}{2}G_2(t)\left\|v_m(t)\right\|^2\\&\quad+\int_0^t\left\|u_m'(s)\right\|^2ds+\int_0^t\left\|v_m'(s)\right\|^2ds+\frac{1}{2}(g_1\Box\nabla u_m)(t)+\frac{1}{2}(g_2\Box\nabla v_m)(t),\end{aligned}\tag{19}$$

y

$$G_i(t)=1-\int_0^t g_i(\tau)d\tau,\ i=1,2.$$

Observar que $G_i(t)\geq l_i$ $(i=1,2)$, donde l_i es dado en (H_2). Ahora, usando la hipótesis (H_3), la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{2n}+\frac{n-1}{2n}+\frac{1}{2}=1$, la desigualdad $ab\leq a^2+b^2$ y la desigualdad de Sobolev-Poincaré con $2(r-1)$, $n(r-2)$, $\frac{nr}{n-1}\leq\frac{2n}{n-2}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\left(f_1(u_m,v_m),u_m'(t)\right) &\leq d\int_\Omega\left(\left|u_m+v_m\right|^{r-1}\left|u_m'\right|+\left|u_m\right|^{\frac{r}{2}-1}\left|v_m\right|^{\frac{r}{2}}\left|u_m'\right|\right)dx\\&\leq C_1\left[\left(\left|u_m\right|_{2(r-1)}^{r-1}+\left|v_m\right|_{2(r-1)}^{r-1}\right)\left|u_m'\right|_2+\left|u_m\right|_{n(r-2)}^{\frac{r}{2}-1}\left|v_m\right|_{\frac{nr}{n-1}}^{\frac{r}{2}}\left|u_m'\right|_2\right]\\&\leq C_2\left[\left|u_m\right|_{2(r-1)}^{2(r-1)}+\left|v_m\right|_{2(r-1)}^{2(r-1)}+\left|u_m'\right|_2^2+\left|u_m\right|_{n(r-2)}^{r-2}\left|v_m\right|_{\frac{nr}{n-1}}^{r}\right]\\&\leq C_3\left[\left\|u_m\right\|^{2(r-1)}+\left\|v_m\right\|^{2(r-1)}+\left\|u_m'\right\|^2+\left\|u_m\right\|^{r-2}\left\|v_m\right\|^{r}\right].\end{aligned}\tag{20}$$

Similarmente, se obtiene

$$\left(f_2(u_m,v_m),v_m'(t)\right)\leq C_3\left[\left\|u_m\right\|^{2(r-1)}+\left\|v_m\right\|^{2(r-1)}+\left\|v_m'\right\|^2+\left\|v_m\right\|^{r-2}\left\|u_m\right\|^{r}\right].\tag{21}$$

Sustituyendo (20) y (21) en (18) y utilizando (14), se obtiene

$$\varphi_m(t)\leq C+C\int_0^t\left[\varphi_m^{r-1}(s)+\varphi_m(s)\right]ds,\tag{22}$$

donde

$$\varphi_m(t) = \left|u_m'(t)\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left|v_m'(t)\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left\|u_m'(t)\right\|^2 + \left\|v_m'(t)\right\|^2 + \|u_m(t)\|^2 + \|v_m(t)\|^2$$

y C es una constante positiva independiente de m y t.

Por hipótesis (H_3), se sabe que $r > 2$, y definamos la función

$$G(\tau) = \int_C^\tau \frac{ds}{s^{r-1}+s}, \text{ para } \tau \geq C.$$

Entonces

$$G(\infty) \leq \frac{1}{(r-2)\,C^{r-2}}.$$

Por esta relación y utilizando la desigualdad generalizada de Gronwall, de (22), existe un número $T_0 \in \langle 0, G(\infty)\rangle$ y una constante $K_1 > 0$, independiente de m, tal que

$$\left|u_m'(t)\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left|v_m'(t)\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left\|u_m'(t)\right\|^2 + \left\|v_m'(t)\right\|^2 + \|u_m(t)\|^2 + \|v_m(t)\|^2 \leq K_1, \tag{23}$$

para todo $t \in [0, T_0]$ y para todo $m \in \mathbb{N}$.

Aplicando la hipótesis (H_2), la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Sobolev-Poincaré y (23), deducimos que existe una constante $C_4 > 0$, independiente de m, tal que

$$|f_1(u_m(t), v_m(t))|_2^2 + |f_2(u_m(t), v_m(t))|_2^2 \leq C_4, \tag{24}$$

para todo $t \in [0, T_0]$ y para todo $m \in \mathbb{N}$.

Segunda estimativa. Tomando $w = u_m''(t)$ en $(13)_1$ y $w = v_m''(t)$ en $(13)_2$, resulta

$$\begin{aligned}(|u_m'|^\rho\, u_m'', u_m'') + \|u_m''(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m'(t)\right\|^2 &= -\left(\left(u_m, u_m''\right)\right) \\ &+ \int_0^t g_1(t-s)\left(\left(u_m(s), u_m''(t)\right)\right)ds + (f_1(u_m, v_m), u_m''),\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}(|v_m'|^\rho\, v_m'', v_m'') + \|v_m''(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_m'(t)\right\|^2 &= -\left(\left(v_m, v_m''\right)\right) \\ &+ \int_0^t g_2(t-s)\left(\left(v_m(s), v_m''(t)\right)\right)ds + (f_2(u_m, v_m), v_m'').\end{aligned} \tag{26}$$

Usando la hipótesis (H_3), la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{2n} + \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{2} = 1$, la desigualdad de Sobolev-Poincaré con $2(r-1)$, $n(r-2)$, $\frac{nr}{n-1} \leq \frac{2n}{n-2}$, (23) y la desigualdad $ab \leq \eta a^2 + \frac{1}{4\eta}b^2$ con $\eta > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}\left(f_1(u_m, v_m), u_m''(t)\right) &\leq d\int_\Omega \left(|u_m+v_m|^{r-1} + |u_m|^{\frac{r}{2}-1}|v_m|^{\frac{r}{2}}\right)\left|u_m''\right| dx \\ &\leq C_1\left(|u_m|_{2(r-1)}^{r-1} + |v_m|_{2(r-1)}^{r-1} + |u_m|_{n(r-2)}^{\frac{r}{2}-1}|v_m|_{\frac{nr}{n-1}}^{\frac{r}{2}}\right)\left|u_m''\right|_2 \\ &\leq C_2\left(\|u_m\|^{r-1} + \|v_m\|^{r-1} + \|u_m\|^{\frac{r}{2}-1}\|v_m\|^{\frac{r}{2}}\right)\left\|u_m''\right\| \\ &\leq C_3\left\|u_m''\right\| \\ &\leq \eta\left\|u_m''\right\|^2 + \frac{1}{4\eta}C_3^2.\end{aligned} \tag{27}$$

Similarmente, se obtiene

$$\left(f_2(u_m, v_m), v_m''(t)\right) \leq \eta \left\|v_m''\right\|^2 + \frac{1}{4\eta} C_3^2. \tag{28}$$

Sumando (25) y (26), usando la desigualdad de Hölder, la desigualdad $ab \leq \eta a^2 + \dfrac{1}{4\eta} b^2$ con $\eta > 0$, (27), (28) y (23), resulta

$$\begin{aligned}\left(\left|u_m'\right|^\rho u_m'', u_m''\right) + \left(\left|v_m'\right|^\rho v_m'', v_m''\right) + \left\|u_m''(t)\right\|^2 + \left\|v_m''(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|u_m'(t)\right\|^2 + \left\|v_m'(t)\right\|^2\right] \\ \leq 3\eta \left[\left\|u_m''(t)\right\|^2 + \left\|v_m''(t)\right\|^2\right] + \frac{1}{4\eta}\left[\left\|u_m(t)\right\|^2 + \left\|v_m(t)\right\|^2\right] \\ + \frac{1}{4\eta}\left[(1-l_1)^2 + (1-l_2)^2\right] K_1 + \frac{1}{2\eta} C_3^2 \\ \leq 3\eta \left[\left\|u_m''(t)\right\|^2 + \left\|v_m''(t)\right\|^2\right] + C_5. \end{aligned} \tag{29}$$

Integrando (29) de 0 hasta t, y usando (14), se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^t \left[\left(\left|u_m'\right|^\rho u_m'', u_m''\right) + \left(\left|v_m'\right|^\rho v_m'', v_m''\right)\right] ds + (1-3\eta)\int_0^t \left[\left\|u_m''(s)\right\|^2 + \left\|v_m''(s)\right\|^2\right] ds \\ + \frac{1}{2}\left[\left\|u_m'(t)\right\|^2 + \left\|v_m'(t)\right\|^2\right] \leq C_6 T_0. \end{aligned} \tag{30}$$

Escogiendo $\eta \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$ en (30), existe una constante $K_2 > 0$, independiente de m, tal que

$$\int_0^t \left[\left\|u_m''(s)\right\|^2 + \left\|v_m''(s)\right\|^2\right] ds \leq K_2, \tag{31}$$

para todo $t \in [0, T_0]$ y para todo $m \in \mathbb{N}$.

Pasaje al límite. De las estimativas (23) y (31), deducimos que existen subsucesiones $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ y $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, respectivamente, tales que

$$\begin{array}{lll} u_\nu \to u, \quad v_\nu \to v & \text{débil estrella en} & L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right), \\ u_\nu' \to u', \quad v_\nu' \to v' & \text{débil estrella en} & L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right), \\ u_\nu'' \to u'', \quad v_\nu'' \to v'' & \text{débil en} & L^2\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right). \end{array} \tag{32}$$

Análisis de los términos no lineales. Desde que se verifica la inmersión compacta $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, por el lema de compacidad de Lions-Aubin, se deduce de (32) que existen subsucesiones de $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ y $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, que seguiremos denotando por $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ y $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, respectivamente, tales que

$$\begin{array}{lll} u_\nu \to u, \ \ v_\nu \to v & \text{fuerte en} & L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right), \\ u_\nu' \to u', \ \ v_\nu' \to v' & \text{fuerte en} & L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right). \end{array}$$

Por la continuidad de los términos no lineales, resulta

$$\begin{array}{lll} \left|u_\nu'\right|^\rho u_\nu' \to \left|u'\right|^\rho u' & \text{fuerte en} & L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right), \\ \left|v_\nu'\right|^\rho v_\nu' \to \left|v'\right|^\rho v' & \text{fuerte en} & L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{lll} f_1(u_\nu, v_\nu) \to f_1(u, v) & \text{fuerte en} & L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right), \\ f_2(u_\nu, v_\nu) \to f_2(u, v) & \text{fuerte en} & L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right). \end{array}$$

Por consiguiente, se obtiene

$$\begin{array}{ll} |u'_\nu|^\rho\, u'_\nu \to |u'|^\rho\, u' \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en } \Omega \times]0, T_0[\,, \\ |v'_\nu|^\rho\, v'_\nu \to |v'|^\rho\, v' \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en } \Omega \times]0, T_0[\end{array} \tag{33}$$

y

$$\begin{array}{ll} f_1\,(u_\nu, v_\nu) \to f_1\,(u, v) \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en } \Omega \times]0, T_0[\,, \\ f_2\,(u_\nu, v_\nu) \to f_2\,(u, v) \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en } \Omega \times]0, T_0[\,. \end{array} \tag{34}$$

Por otra parte, usando (23) y la desigualdad de Sobolev-Poincaré con (H_1), se deduce

$$\begin{array}{l} ||u'_\nu|^\rho\, u'_\nu|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \leq C_* K_1^{\rho+1} T_0, \\ ||v'_\nu|^\rho\, v'_\nu|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \leq C_* K_1^{\rho+1} T_0. \end{array} \tag{35}$$

También por (24), se obtiene

$$\begin{array}{l} |f_1\,(u_\nu, v_\nu)|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \leq C_4 T_0, \\ |f_2\,(u_\nu, v_\nu)|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \leq C_4 T_0. \end{array} \tag{36}$$

Por consiguiente, usando $(33)-(36)$ y el lema de Lions [15], se tiene

$$\begin{array}{ll} |u'_\nu|^\rho\, u'_\nu \to |u'|^\rho\, u' \quad \text{débil en} \quad L^2\left(0, T_0; L^2\,(\Omega)\right), \\ |v'_\nu|^\rho\, v'_\nu \to |v'|^\rho\, v' \quad \text{débil en} \quad L^2\left(0, T_0; L^2\,(\Omega)\right) \end{array} \tag{37}$$

y

$$\begin{array}{ll} f_1\,(u_\nu, v_\nu) \to f_1\,(u, v) \quad \text{débil en} \quad L^2\left(0, T_0; L^2\,(\Omega)\right), \\ f_2\,(u_\nu, v_\nu) \to f_2\,(u, v) \quad \text{débil en} \quad L^2\left(0, T_0; L^2\,(\Omega)\right). \end{array} \tag{38}$$

Multiplicando $(13)_1$ y $(13)_2$ por $\theta \in \mathcal{D}\,(0, T_0)$ (aquí $\mathcal{D}\,(0, T_0)$ denota el espacio de las funciones C^∞ con soporte compacto en $(0, T_0)$) e integrando el resultado obtenido sobre $(0, T_0)$, se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho+1}\int_0^{T_0} \left(\left|u'_m\right|^\rho u'_m, w\right)\theta'\,(t)\,dt + \int_0^{T_0} ((u_m, w))\,\theta\,(t)\,dt + \int_0^{T_0} \left(\left(u''_m, w\right)\right)\theta\,(t)\,dt \\ - \int_0^{T_0}\int_0^t g_1(t-s)\,((u_m(s), w))\,\theta\,(t)\,dsdt + \int_0^{T_0} \left(\left(u'_m, w\right)\right)\theta\,(t)\,dt \\ = \int_0^{T_0} (f_1(u_m, v_m), w)\theta\,(t)\,dt, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho+1}\int_0^{T_0} \left(\left|v'_m\right|^\rho v''_m, w\right)\theta'\,(t)\,dt + \int_0^{T_0} ((v_m, w))\,\theta\,(t)\,dt + \int_0^{T_0} \left(\left(v''_m, w\right)\right)\theta\,(t)\,dt \\ - \int_0^{T_0}\int_0^t g_2(t-s)\,((v_m(s), w))\,\theta\,(t)\,dsdt + \int_0^{T_0} \left(\left(v'_m, w\right)\right)\theta\,(t)\,dt \\ = \int_0^{T_0} (f_2(u_m, v_m), w)\theta\,(t)\,dt, \end{aligned} \tag{40}$$

para cada $w \in V_m$. De las convergencias (32), (37) y (38) por pasaje al límite en (39) y (40), resulta

$$\left|u'\right|^\rho u'' - \Delta u - \Delta u'' + \int_0^t g_1\,(t-s)\,\Delta u\,(s)\,ds - \Delta u' = f_1\,(u, v) \quad \text{en} \quad L^2\left(0, T_0; H^{-1}\,(\Omega)\right),$$

$$\left|v'\right|^{\rho} v'' - \Delta v - \Delta v'' + \int_0^t g_2\left(t-s\right)\Delta v\left(s\right)ds - \Delta v' = f_2\left(u,v\right) \quad \text{en} \quad L^2\left(0,T_0;H^{-1}\left(\Omega\right)\right),$$

Con esto se tiene la existencia local de la solución débil del problema $(1)-(6)$. Los datos iniciales se verifican de modo estándar, ver por ejemplo [15]. Esto concluye la demostración del Teorema 3.1. $\square$

4. No Existencia Global

En esta sección, se demuestra la propiedad de explosión de soluciones en tiempo finito del problema $(1)-(6)$. En la discusión emplearemos el método indirecto como Liu [16].

La energía del problema $(1)-(6)$ se define por

$$\begin{aligned} E\left(t\right) &= \frac{1}{\rho+2}\left(\left|u'\left(t\right)\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left|v'\left(t\right)\right|_{\rho+2}^{\rho+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\left\|u'\left(t\right)\right\|^2 + \left\|v'\left(t\right)\right\|^2\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(G_1\left(t\right)\left\|u\left(t\right)\right\|^2 + G_2\left(t\right)\left\|v\left(t\right)\right\|^2\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(\left(g_1\square\nabla u\right)\left(t\right) + \left(g_2\square\nabla v\right)\left(t\right)\right) - \int_\Omega F\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right)dx, \end{aligned} \tag{41}$$

para $t \geq 0$, donde

$$G_i\left(t\right) = 1 - \int_0^t g_i(\tau)d\tau,\; i = 1,2.$$

Lema 4.1. *Supongamos que $(H_1)-(H_4)$ se verifican y $\left(u_0,v_0\right),\left(u_1,v_1\right) \in H_0^1\left(\Omega\right)\times H_0^1\left(\Omega\right)$. Si (u,v) es una solución del problema $(1)-(6)$, entonces la energía $E\left(t\right)$ es una función no creciente para $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} E'\left(t\right) &= -\left(\left\|u'\left(t\right)\right\|^2 + \left\|v'\left(t\right)\right\|^2\right) \\ &-\frac{1}{2}\left(g_1(t)\left|\nabla u\left(t\right)\right|_2^2 + g_2(t)\left|\nabla v\left(t\right)\right|_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(\left(g_1'\square\nabla u\right) + \left(g_2'\square\nabla u\right)\right) \leq 0 \end{aligned} \tag{42}$$

y

$$E\left(t\right) + \int_0^t \left(\left\|u'\left(s\right)\right\|^2 + \left\|v'\left(s\right)\right\|^2\right)ds \leq E\left(0\right), \tag{43}$$

donde

$$E\left(0\right) = \frac{1}{\rho+2}\left(\left|u_1\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left|v_1\right|_{\rho+2}^{\rho+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\left\|u_1\right\|^2 + \left\|v_1\right\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\left\|u_0\right\|^2 + \left\|v_0\right\|^2\right) - \int_\Omega F\left(u_0\left(x\right),v_0\left(x\right)\right)dx.$$

Demostración. Multiplicando (1) por u' y (2) por v', integrando sobre Ω y utilizando $(3)-(6)$ con el teorema de la divergencia, se obtiene (42). La desigualdad (43) es una consecuencia directa de (42). $\square$

Lema 4.2. *Supongamos que (H_4) se verifica. Entonces existe $\eta_1 > 0$ tal que para cada $(u,v) \in H_0^1\left(\Omega\right)\times H_0^1\left(\Omega\right)$ se tiene*

$$\int_\Omega F\left(u,v\right)dx \leq \eta_1\left(l_1\left\|u\left(t\right)\right\|^2 + l_2\left\|v\left(t\right)\right\|^2\right)^{\frac{r}{2}}, \tag{44}$$

donde l_1 y l_2 son las constantes dadas en (H_2).

Demostración. Usando la desigualdad de Sobolev-Poincaré, tenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u,v)\,dx &\leq \frac{c_1}{r}\left(|u|_r^r + |v|_r^r\right)\\ &\leq \frac{c_1}{r}C_*^r\left(\|u\|^r + \|v\|^r\right)\\ &\leq \frac{c_1}{r}C_*^r\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)^{\frac{r}{2}}\\ &\leq \frac{c_1}{r}C_*^r\left(\max\left\{\frac{1}{l_1},\frac{1}{l_2}\right\}\right)^{\frac{r}{2}}\left(l_1\|u\|^2 + l_2\|v\|^2\right)^{\frac{r}{2}}.\end{aligned}$$

Tomando $\eta_1 = \frac{c_1}{r}C_*^r\left(\max\left\{\frac{1}{l_1},\frac{1}{l_2}\right\}\right)^{\frac{r}{2}}$, completa la prueba. □

Definamos los siguientes funcionales

$$\Gamma(t) = \Gamma(u(t),v(t)) = G_1(t)\|u(t)\|^2 + G_2(t)\|v(t)\|^2 + (g_1\Box\nabla u)(t) + (g_2\Box\nabla v)(t),$$

$$I(t) = I(u(t),v(t)) = \Gamma(t) - r\int_\Omega F(u(t),v(t))\,dx,$$

$$J(t) = J(u(t),v(t)) = \frac{1}{2}\Gamma(u(t),v(t)) - \int_\Omega F(u(t),v(t))\,dx.$$

Entonces

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2}\left(|u'(t)|_{\rho+2}^{\rho+2} + |v'(t)|_{\rho+2}^{\rho+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\|u'(t)\|^2 + \|v'(t)\|^2\right) + J(u(t),v(t)).$$

Para $t \geq 0$, definamos

$$d_1(t) = \inf_{\substack{(u,v)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\\ (u,v)\neq(0,0)}} d_2(u,v),$$

donde

$$d_2(u,v) = \sup_{\lambda\geq 0} J(\lambda u,\lambda v).$$

Lema 4.3. *Supongamos que (H_4) se verifica. Entonces para $t \geq 0$ se tiene*

$$0 < d \leq d_1(t) \leq d_2(u,v),$$

y

$$d_2(u,v) = \frac{r-2}{2r}\left[\frac{(\Gamma(t))^{\frac{r}{r-2}}}{\left(r\int_\Omega F(u,v)\,dx\right)^{\frac{2}{r-2}}}\right],$$

donde

$$d = \frac{r-2}{2r}\left(\frac{1}{r\eta_1}\right)^{\frac{2}{r-2}} \tag{45}$$

y η_1 es la constante del Lema 4.2.

Demostración. Para $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ fijo, $(u,v) \neq (0,0)$, definamos la función

$$\varphi(\lambda) = J(\lambda u, \lambda v) = \frac{\lambda^2}{2}\Gamma(u,v) - \lambda^r \int_\Omega F(u,v)\,dx.$$

Entonces

$$\varphi'(\lambda_0) = 0, \text{ para } \lambda_0 = \left(\frac{\Gamma(t)}{r\int_\Omega F(u,v)\,dx}\right)^{\frac{1}{r-2}},$$

donde $\int_\Omega F(u,v)\,dx > 0$ para $(u,v) \neq (0,0)$, por (H_4). Por consiguiente

$$\sup_{\lambda \geq 0} \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_0) = d_2(u,v). \tag{46}$$

Entonces de (46) el resultado se obtiene usando (44) y desde que $G_i > l_i$, $i = 1,2$. □

Lema 4.4. *Supongamos que $(H_1) - (H_4)$ se verifican. Si para cada número fijo $\delta < 1$, asumamos que $(u_0,v_0), (u_1,v_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ y satisface*

$$E(0) < \delta d \quad y \quad I(0) < 0, \tag{47}$$

donde d está dado por (45). Entonces

$$I(t) < 0, \text{ para cada } t > 0 \tag{48}$$

y

$$d < \frac{r-2}{2r}\Gamma(t) < \frac{r-2}{2}\int_\Omega F(u,v)\,dx, \text{ para cada } t > 0. \tag{49}$$

Demostración. Por (43) y (47), resulta

$$E(t) \leq \delta d, \text{ para cada } t > 0.$$

Ahora veamos que se cumple $I(t) < 0$, para cada $t > 0$. Razonando por el absurdo, supongamos que existe un número $t_1 > 0$ tal que $I(t_1) \geq 0$. Desde que $u(t)$ y $v(t)$ son continuas, se tiene que $I(t)$ es continua. Por lo cual, existe $t_* \in]0, t_1]$ tal que $I(t_*) = 0$ y $I(t) < 0$, para $0 \leq t < t_*$. Por consiguiente

$$\Gamma(t) < r\int_\Omega F(u(t), v(t))\,dx, \text{ para } 0 \leq t < t_*.$$

Entonces, usando el Lema 4.3, se obtiene

$$d < \frac{r-2}{2r}\Gamma(t), \text{ para } 0 \leq t < t_*.$$

Del cual

$$d < \frac{r-2}{2}\int_\Omega F(u(t), v(t))\,dx, \text{ para } 0 \leq t < t_*.$$

Desde que $t \longmapsto \int_\Omega F(u(t), v(t))\,dx$ es continua, tenemos $\int_\Omega F(u(t_*), v(t_*))\,dx \neq 0$. En vista del Lema 4.3 y $I(t_*) = 0$, resulta

$$d \leq \frac{r-2}{2}\int_\Omega F(u(t_*), v(t_*))\,dx = \frac{r-2}{2r}\Gamma(t_*) = J(u(t_*), v(t_*)),$$

el cual es imposible, desde que $J(u(t_*), v(t_*)) \leq E(t_*) \leq \delta d < d$. Por consiguiente se verifica (48). La desigualdad (49) se obtiene usando (48) y Lema 4.3. Por tanto se completa la demostración. □

Lema 4.5. *Supongamos que (12) se verifica. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|w|_r^q \le C\left[\|w\|^2 + |w|_r^r\right], \tag{50}$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$ y $2 \le q \le r$.

Demostración. Si $|w|_r \le 1$, y usando la desigualdad de Sobolev-Poincaré, resulta

$$|w|_r^q \le |w|_r^2 \le C_* \|w\|^2 \le C_*\left[\|w\|^2 + |w|_r^r\right].$$

Si $|w|_r > 1$, entonces

$$|w|_r^q \le |w|_r^r \le |w|_r^r + \|w\|^2.$$

Así se tiene (50). $\square$

Consideremos

$$H(t) = \hat{\delta} d - E(t), \tag{51}$$

donde $\hat{\delta} = \max\{0, \delta\}$. Bajo las condiciones del Lema 4.4, se obtienen

$$H(t) \le \hat{\delta} d + \int_\Omega F(u,v)\,dx \le \left(\hat{\delta}\frac{r-2}{2} + 1\right)\int_\Omega F(u,v)\,dx, \text{ para cada } t > 0 \tag{52}$$

y

$$H(t) \ge H(0) = \hat{\delta} d - E(0) > 0, \; H'(t) = -E'(t) \ge 0, \text{ para cada } t > 0. \tag{53}$$

Lema 4.6. *Supongamos que $(H_1) - (H_4)$ y (47) se verifican. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} |u|_r^q + |v|_r^q \;\le\; & C\Big[-H(t) - |u'|_{\rho+2}^{\rho+2} - |v'|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|u'\|^2 + \|v'\|^2 \\ & - \|u\|^2 - \|v\|^2 - (g_1\Box\nabla u) - (g_2\Box\nabla v) + |u|_r^r + |v|_r^r\Big], \end{aligned} \tag{54}$$

para $t \ge 0$ y para todo $2 \le q \le r$.

Demostración. Usando (H_2), (41), (51) y (H_4), resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}l_1\|u\|^2 + \frac{1}{2}l_2\|v\|^2 \;\le\; & E(t) - \frac{1}{\rho+2}\left(|u'|_{\rho+2}^{\rho+2} + |v'|_{\rho+2}^{\rho+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\|u'\|^2 + \|v'\|^2\right) \\ & -\frac{1}{2}\left((g_1\Box\nabla u) + (g_2\Box\nabla v)\right) + \int_\Omega F(u,v)\,dx \\ \le\; & \hat{\delta} d - H(t) - \frac{1}{\rho+2}\left(|u'|_{\rho+2}^{\rho+2} + |v'|_{\rho+2}^{\rho+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\|u'\|^2 + \|v'\|^2\right) \\ & -\frac{1}{2}\left((g_1\Box\nabla u) + (g_2\Box\nabla v)\right) + \frac{c_1}{r}\left(|u|_r^r + |v|_r^r\right). \end{aligned} \tag{55}$$

Por (49), implica

$$\begin{aligned} m\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) \;\le\; & C_2\Big[-H(t) - \left(|u'|_{\rho+2}^{\rho+2} + |v'|_{\rho+2}^{\rho+2}\right) - \left(\|u'\|^2 + \|v'\|^2\right) \\ & - \left((g_1\Box\nabla u) + (g_2\Box\nabla v)\right) + \left(|u|_r^r + |v|_r^r\right)\Big], \end{aligned} \tag{56}$$

donde $m = \min\left\{\frac{1}{2}l_1, \frac{1}{2}l_2\right\}$ y C_2 es una constante positiva que depende de ρ y c_1. Utilizando (50) y (56), se obtiene (54). $\square$

Teorema 4.7 (**Explosión de soluciones**). *Supongamos que* $(H_1)-(H_4)$ *se verifican. Si para cada número fijo* $\delta<1$, *consideremos que* $(u_0,v_0),(u_1,v_1)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ *y satisface*

$$E(0)<\delta d \ \ y \ \ I(0)<0,$$

donde d *está dado por (45). Además supongamos que* $\rho<r-2$ *y se verifica*

$$\max\left\{\int_0^\infty g_1(s)ds,\int_0^\infty g_2(s)ds\right\}<\frac{r-2}{r-2+\frac{1}{\left(1-\hat{\delta}\right)^2(r-2)+2\hat{\delta}\left(1-\hat{\delta}\right)}},\tag{57}$$

donde $\hat{\delta}=\max\{0,\delta\}$. *Entonces la solución* (u,v) *del problema (1) − (6) explota en tiempo finito, es decir, existe un número positivo finito* T_* *tal que*

$$\lim_{t\to T_*^-}\left[\left|u'\right|_{\rho+2}^{\rho+2}+\left|v'\right|_{\rho+2}^{\rho+2}+\left\|u'\right\|^2+\left\|v'\right\|^2+\|u\|^2+\|v\|^2+|u|_r^r+|v|_r^r\right]=\infty.$$

Demostración. Por contradicción, supongamos que la solución del problema (1) − (6) es global, entonces existe una constante $C>0$ tal que

$$\left|u'\right|_{\rho+2}^{\rho+2}+\left|v'\right|_{\rho+2}^{\rho+2}+\left\|u'\right\|^2+\left\|v'\right\|^2+\|u\|^2+\|v\|^2+|u|_r^r+|v|_r^r\le C,\ \forall t\ge 0.\tag{58}$$

Definamos la función

$$\begin{aligned}\psi(t) &= H^{1-\sigma}(t)+\frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega\left(\left|u'\right|^\rho u'u+\left|v'\right|^\rho v'v\right)dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)dx\\ &\quad+\varepsilon\int_\Omega\left(\nabla u\cdot\nabla u'+\nabla v\cdot\nabla v'\right)dx,\end{aligned}\tag{59}$$

donde $0<\varepsilon\ll 1$ que será especificado mas adelante y $0<\sigma<\dfrac{1}{\rho+2}-\dfrac{1}{r}$.

Derivando (59), usando (1) − (2) y (H_4), obtenemos

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t)+\frac{\varepsilon}{\rho+1}\left(\left|u'\right|_{\rho+2}^{\rho+2}+\left|v'\right|_{\rho+2}^{\rho+2}\right)\\ &\quad+\varepsilon\int_\Omega\left(\left|u'\right|^\rho u''u+\left|v'\right|^\rho v''v\right)dx+\varepsilon\int_\Omega\left(\nabla u\cdot\nabla u'+\nabla v\cdot\nabla v'\right)dx+\\ &\quad\varepsilon\left(\left\|u'\right\|^2+\left\|v'\right\|^2\right)+\varepsilon\int_\Omega\left(\nabla u\cdot\nabla u''+\nabla v\cdot\nabla v''\right)dx\\ &= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t)+\frac{\varepsilon}{\rho+1}\left(\left|u'\right|_{\rho+2}^{\rho+2}+\left|v'\right|_{\rho+2}^{\rho+2}\right)+\varepsilon\left(\left\|u'\right\|^2+\left\|v'\right\|^2\right)\\ &\quad+\varepsilon r\int_\Omega F(u,v)\,dx-\varepsilon\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\\ &\quad+\varepsilon\left(\int_0^t g_1(t-s)\left(\nabla u(s),\nabla u(t)\right)ds+\int_0^t g_2(t-s)\left(\nabla v(s),\nabla v(t)\right)ds\right).\end{aligned}\tag{60}$$

Desde que $(\nabla w_1, \nabla w_2) \geq -\left(\eta \left\| w_1 \right\|^2 + \frac{1}{4\eta} \left\| w_2 \right\|^2\right)$, para $\eta > 0$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\int_0^t g(t-s) \left(\nabla w(s), \nabla w(t) \right) ds &= \int_0^t g(t-s) \left(\nabla w(s) - \nabla w(t), \nabla w(t) \right) ds \\
&\quad + \left(\int_0^t g(s) ds \right) \left\| w(t) \right\|^2 \\
&\geq -\left(\eta \left(g \Box \nabla w \right)(t) + \frac{1}{4\eta} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \left\| w(t) \right\|^2 \right) \\
&\quad + \left(\int_0^t g(s) ds \right) \left\| w(t) \right\|^2 \\
&= \left(1 - \frac{1}{4\eta} \right) \left(\int_0^t g(s) ds \right) \left\| w(t) \right\|^2 - \eta \left(g \Box \nabla w \right)(t).
\end{aligned}
$$

Este resultado en (60), implica

$$
\begin{aligned}
\psi'(t) \geq\ & \frac{\varepsilon}{\rho+1} \left(\left| u' \right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left| v' \right|_{\rho+2}^{\rho+2} \right) + \varepsilon \left(\left\| u' \right\|^2 + \left\| v' \right\|^2 \right) + \varepsilon r \int_\Omega F(u,v)\, dx \\
& -\varepsilon \left(G_1(t) \left\| u(t) \right\|^2 + G_2(t) \left\| v(t) \right\|^2 \right) \\
& -\frac{\varepsilon}{4\eta} \left[\left(\int_0^t g_1(s) ds \right) \left\| u(t) \right\|^2 + \left(\int_0^t g_2(s) ds \right) \left\| v(t) \right\|^2 \right] \\
& -\varepsilon \eta \left[\left(g_1 \Box \nabla u \right) + \left(g_2 \Box \nabla v \right) \right],
\end{aligned} \tag{61}
$$

para algún número $\eta > 0$ a ser determinado más tarde. Por (51) y (41), resulta

$$
\int_\Omega F(u,v)\, dx = H(t) - \hat{\delta} d + \frac{1}{\rho+2} \left(\left| u' \right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left| v' \right|_{\rho+2}^{\rho+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\left\| u' \right\|^2 + \left\| v' \right\|^2 \right) + \frac{1}{2} \Gamma(t)
$$

y este en (61), se obtiene

$$
\begin{aligned}
\psi'(t) \geq\ & \varepsilon \left(\frac{1}{\rho+1} + \frac{r}{\rho+2} \right) \left(\left| u' \right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left| v' \right|_{\rho+2}^{\rho+2} \right) + \varepsilon \left(1 + \frac{r}{2} \right) \left(\left\| u' \right\|^2 + \left\| v' \right\|^2 \right) \\
& +\varepsilon \left(\mathcal{G}_1(t) \left\| u(t) \right\|^2 + \mathcal{G}_2(t) \left\| v(t) \right\|^2 \right) \\
& +\varepsilon \left(\frac{r}{2} - \eta \right) \left[\left(g_1 \Box \nabla u \right) + \left(g_2 \Box \nabla v \right) \right] + \varepsilon r H(t) - \varepsilon r \hat{\delta} d,
\end{aligned} \tag{62}
$$

donde $\mathcal{G}_i(t) = \frac{r-2}{2} - \left(\frac{r-2}{2} + \frac{1}{4\eta} \right) \int_0^t g_i(s) ds$, $i = 1, 2$. Utilizando la desigualdad (49) en la estimativa (62), se obtiene

$$
\begin{aligned}
\psi'(t) \geq\ & \varepsilon \left(\frac{1}{\rho+1} + \frac{r}{\rho+2} \right) \left(\left| u' \right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left| v' \right|_{\rho+2}^{\rho+2} \right) + \varepsilon \left(1 + \frac{r}{2} \right) \left(\left\| u' \right\|^2 + \left\| v' \right\|^2 \right) \\
& +\varepsilon \left(\mathcal{H}_1(t) \left\| u(t) \right\|^2 + \mathcal{H}_2(t) \left\| v(t) \right\|^2 \right) \\
& +\varepsilon \left(\frac{r-2}{2} \left(1 - \hat{\delta} \right) + (1 - \eta) \right) \left[\left(g_1 \Box \nabla u \right) + \left(g_2 \Box \nabla v \right) \right] + \varepsilon r H(t),
\end{aligned} \tag{63}
$$

donde $\mathcal{H}_i(t) = \dfrac{r-2}{2}\left(1-\hat{\delta}\right) - \left(\dfrac{r-2}{2}\left(1-\hat{\delta}\right) + \dfrac{1}{4\eta}\right)\displaystyle\int_0^t g_i(s)ds$, $i = 1, 2$.

Como se verifica $H(t) \geq -E(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} H(t) &\geq \int_\Omega F(u(t), v(t))\,dx - \frac{1}{\rho+2}\left(\left|u'(t)\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left|v'(t)\right|_{\rho+2}^{\rho+2}\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\left\|u'(t)\right\|^2 + \left\|v'(t)\right\|^2\right) - \frac{1}{2}\Gamma(u(t), v(t)). \end{aligned} \tag{64}$$

Tomando cualquier número $0 < \gamma < 1$ y desde que $0 < (r-2)\left(1-\hat{\delta}\right) < r$, entonces $0 < \gamma(r-2)\left(1-\hat{\delta}\right) < r$. Por este resultado y utilizando (64) en la estimativa (63), se deduce

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\geq \varepsilon\left[\frac{1}{\rho+1} + \frac{1}{\rho+2}\left[r - \gamma(r-2)\left(1-\hat{\delta}\right)\right]\right]\left(\left|u'\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left|v'\right|_{\rho+2}^{\rho+2}\right) \\ &\quad +\varepsilon\left[1 + \frac{1}{2}\left[r - \gamma(r-2)\left(1-\hat{\delta}\right)\right]\right]\left(\left\|u'\right\|^2 + \left\|v'\right\|^2\right) \\ &\quad +\varepsilon\left(\mathcal{F}_1(t)\left\|u(t)\right\|^2 + \mathcal{F}_2(t)\left\|v(t)\right\|^2\right) \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{r-2}{2}(1-\gamma)\left(1-\hat{\delta}\right) + (1-\eta)\right)\left[(g_1\Box\nabla u) + (g_2\Box\nabla v)\right] \\ &\quad +\varepsilon\left[r - \gamma(r-2)\left(1-\hat{\delta}\right)\right]H(t) \\ &\quad +\varepsilon\gamma(r-2)\left(1-\hat{\delta}\right)\int_\Omega F(u(t), v(t))\,dx, \end{aligned} \tag{65}$$

donde $\mathcal{F}_i(t) = \dfrac{r-2}{2}(1-\gamma)\left(1-\hat{\delta}\right) - \left(\dfrac{r-2}{2}(1-\gamma)\left(1-\hat{\delta}\right) + \dfrac{1}{4\eta}\right)\displaystyle\int_0^t g_i(s)ds$, $i = 1, 2$.

Se debe observar que, para obtener (65), se ha empleado la propiedad: Si $H \geq A$ y $0 \leq \mu \leq r$, entonces $rH \geq \mu A + (r-\mu)H$.

Si $\delta < 0$, entonces $E(0) < 0$ y $\hat{\delta} = 0$; podemos escoger $\eta = \frac{r-2}{2}(1-\gamma) + 1$ y $\gamma \in \left]0, 1\right[$ tal que, $\dfrac{r-2}{2(1-\gamma)} = \dfrac{r-2}{2}(1-\gamma) + 1$ en (65). Si $0 \leq \delta < 1$, entonces $E(0) > 0$ y $\hat{\delta} = \delta$; podemos escoger $\eta = \dfrac{(r-2)(1-\delta)^2 + 2\delta(1-\delta)}{2(1-\gamma)}$ y $\gamma \in \langle 0, 1\rangle$ tal que $\dfrac{r-2}{2}(1-\gamma)\left(1-\hat{\delta}\right) + 1 > \dfrac{(r-2)(1-\delta)^2 + 2\delta(1-\delta)}{2(1-\gamma)}$ en (65).

Teniendo en cuenta que $1 - l_i = \displaystyle\int_0^\infty g_i(s)ds \geq \int_0^t g_i(s)ds$, $i = 1, 2$, (57) y (H_4), resulta

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\geq \varepsilon\zeta\left[\left|u'\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left|v'\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + H(t) + \left\|u'\right\|^2 + \left\|v'\right\|^2\right. \\ &\quad \left. + \left\|u\right\|^2 + \left\|v\right\|^2 + (g_1\Box\nabla u) + (g_2\Box\nabla v) + |u|_r^r + |v|_r^r\right], \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} \psi(0) &= H^{1-\sigma}(0) + \frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega \left(|u_1|^\rho u_1 u_0 + |v_1|^\rho v_1 v_0\right)dx \\ &\quad +\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2\right)dx + \varepsilon\int_\Omega\left(\nabla u_0\cdot\nabla u_1 + \nabla v_0\cdot\nabla v_1\right)dx > 0, \end{aligned}$$

donde ζ es una constante positiva que representa al mínimo de todas las constantes positivas de los coeficientes de los términos de la estimativa (65) y $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño. En consecuencia,

$$\psi(t) \geq \psi(0) > 0, \, \forall t \geq 0.$$

Desde que, $\dfrac{\rho+1}{\rho+2} + \dfrac{1}{\rho+2} = 1$ y $\rho + 2 < r$, resulta

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \left(|u'|^\rho u'u + |v'|^\rho v'v \right) dx \right| &\leq |u'|_{\rho+2}^{\rho+1} |u|_{\rho+2} + |v'|_{\rho+2}^{\rho+1} |v|_{\rho+2} \\ &\leq C_1 \left[|u'|_{\rho+2}^{\rho+1} |u|_r + |v'|_{\rho+2}^{\rho+1} |v|_r \right]. \end{aligned}$$

De donde se tiene,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \left(|u'|^\rho u'u + |v'|^\rho v'v \right) dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq C_2 \left[|u'|_{\rho+2}^{\frac{\rho+1}{1-\sigma}} |u|_r^{\frac{1}{1-\sigma}} + |v'|_{\rho+2}^{\frac{\rho+1}{1-\sigma}} |v|_r^{\frac{1}{1-\sigma}} \right] \\ &\leq C_3 \left[|u'|_{\rho+2}^{\frac{\rho+1}{1-\sigma}\mu} + |u|_r^{\frac{\theta}{1-\sigma}} + |v'|_{\rho+2}^{\frac{\rho+1}{1-\sigma}\mu} + |v|_r^{\frac{\theta}{1-\sigma}} \right], \end{aligned}$$

donde $\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\theta} = 1$. Escogiendo $\mu = \dfrac{(1-\sigma)(\rho+2)}{\rho+1}$, implica

$$\frac{\theta}{1-\sigma} = \frac{\rho+2}{(1-\sigma)(\rho+2) - (\rho+1)} < r.$$

Utilizando (54), obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \left(|u'|^\rho u'u + |v'|^\rho v'v \right) dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq \; & C_4 \Big[|u'|_{\rho+2}^{\rho+2} + |v'|_{\rho+2}^{\rho+2} - H(t) \\ & + \|u'\|^2 + \|v'\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \\ & - (g_1 \Box \nabla u) - (g_2 \Box \nabla v) + |u|_r^r + |v|_r^r \; \Big]. \end{aligned} \tag{67}$$

También, se tiene la estimativa

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla u' + \nabla v \cdot \nabla v' \right) dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq C_5 \left[\|u\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u'\|^{\frac{1}{1-\sigma}} + \|v\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \|v'\|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right] \\ &\leq C_6 \left[\|u\|^{\frac{s}{1-\sigma}} + \|u'\|^{\frac{\tau}{1-\sigma}} + \|v\|^{\frac{s}{1-\sigma}} + \|v'\|^{\frac{\tau}{1-\sigma}} \right], \end{aligned}$$

donde $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{\tau} = 1$. Escogiendo $\tau = 2(1-\sigma)$, implica $\dfrac{s}{1-\sigma} = \dfrac{2}{1-2\sigma}$ y

$$\left| \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla u' + \nabla v \cdot \nabla v' \right) dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C_6 \left[\|u\|^{\frac{2}{1-2\sigma}} + \|v\|^{\frac{2}{1-2\sigma}} + \|u'\|^2 + \|v'\|^2 \right]. \tag{68}$$

Por consiguiente de (67) y(68), obtenemos

$$\begin{aligned} \psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &= \left[H^{1-\sigma}(t) + \frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega \left(\left|u'\right|^\rho u'u + \left|v'\right|^\rho v'v\right)dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)dx + \varepsilon\int_\Omega \left(\nabla u\cdot\nabla u' + \nabla v\cdot\nabla v'\right)dx\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leq C_7\left[H(t) + \left|u'\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left|v'\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|u\|^2 + \|v\|^2 + \left\|u'\right\|^2 + \left\|v'\right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|u\|^{\frac{2}{1-\sigma}} + \|v\|^{\frac{2}{1-\sigma}} + \|u\|^{\frac{2}{1-2\sigma}} + \|v\|^{\frac{2}{1-2\sigma}} + |u|_r^r + |v|_r^r\right]. \end{aligned} \tag{69}$$

Por (53) y(58), tenemos

$$\|u\|^{\frac{2}{1-2\sigma}}, \|v\|^{\frac{2}{1-2\sigma}} \leq C^{\frac{2}{1-2\sigma}}\frac{H(t)}{H(0)} \quad \text{y} \quad \|u\|^{\frac{2}{1-\sigma}}, \|v\|^{\frac{2}{1-\sigma}} \leq C^{\frac{2}{1-\sigma}}\frac{H(t)}{H(0)}. \tag{70}$$

Se deduce de (69), (70), (52) y (H_4) que

$$\psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq K\left[\left|u'\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left|v'\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left\|u'\right\|^2 + \left\|v'\right\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2 + |u|_r^r + |v|_r^r\right], \tag{71}$$

para todo $t \geq 0$. Combinando (66) y (71), conseguimos

$$\psi'(t) \geq \frac{\varepsilon\zeta}{K}\psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t), \forall t \geq 0. \tag{72}$$

Por integración de (72) desde 0 hasta t, resulta

$$\psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{\psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\varepsilon\zeta\sigma t}{K(1-\sigma)}}.$$

Esto muestra que $\psi(t)$ explota en tiempo finito

$$T_* \leq \frac{K(1-\sigma)}{\varepsilon\zeta\sigma\psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

y además de (71), se obtiene

$$\lim_{t\to T_*^-}\left[\left|u'\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left|v'\right|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left\|u'\right\|^2 + \left\|v'\right\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2 + |u|_r^r + |v|_r^r\right] = \infty.$$

Esto es una contradicción con (58). Por tanto, la solución del problema (1) – (6) explota en tiempo finito. □

5. Conclusión

En el presente estudio se ha obtenido: Existencia de la solución local mediante el método de Faedo-Galerkin, y no existencia de la solución global utilizando el método indirecto con energía inicial acotada por cierta constante positiva. El resultado de la no existencia global, agrega y generaliza a los obtenidos por Liu y Yu [19], y Liu [16, 17, 18].

Agradecimiento

Al Consejo Superior de Investigación del Vicerrectorado de Investigación de la UNMSM, por el apoyo financiero otorgado para la ejecución del Proyecto de Estudio de Investigación 2015 con código: 151401091, cuyo resultado es la presente publicación.

Referencias bibliográficas

[1] Alves, C. O., Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., Rammaha, M. A., and Toundykov, D. (2009). On existence, uniform decay rates and blow up for solutions of systems of nonlinear wave equations with damping and source terms. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S*, 2(3), 583-608.

[2] Andrade, D., and Mognon, A. (2003). Global Solutions for a System of Klein-Gordon Equations with Memory. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, (3s.) v. 21 1/2 (2003): 127–138.

[3] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., and Ferreira, J. (2001). Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping. *Mathematical methods in the applied sciences*, 24(14), 1043-1053.

[4] Coddington, E., and Levinson, N. (1955). Theory of ordinary differential equations. New Delhi: Tata McGraw-Hill Education.

[5] Evans, L. (2010). Partial differential equations (Vol. 19). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

[6] Fabrizio, M., and Morro, A. (1992). Mathematical problems in linear viscoelasticity. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

[7] Han, X., and Wang, M. (2009). Global existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with damping. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 70(9), 3090-3098.

[8] Medeiros, L. A., and Miranda, M. M. (1986). Weak solutions for a system of nonlinear Klein-Gordon equations. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 146(1), 173-183.

[9] Miranda, M. M., and Medeiros, L. A. (1987). On the existence of global solutions of a coupled nonlinear Klein-Gordon equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 30, 147-161.

[10] Messaoudi, S. A., and Tatar, N. E. (2008). Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 68(4), 785-793.

[11] Messaoudi, S. A., and Tatar, N. E. (2003). Global existence and asymptotic behavior for nonlinear viscoelastic problem. *Mathematical Sciences Research Journal*, 7, 136-149.

[12] Messaoudi, S. A., and Tatar, N. E. (2007). Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem. *Mathematical methods in the applied sciences*, 30(6), 665-680.

[13] Nishihara, K., and Kojima, J. (1984). On a global solution of some quasilinear hyperbolic equation. *Tokyo journal of mathematics*, 7(2), 437-459.

[14] Liang, F., and Gao, H. (2011). Exponential energy decay and blow-up of solutions for a system of nonlinear viscoelastic wave equations with strong damping. *Boundary Value Problems*, 2011(1), 22.

[15] Lions, J. L. (1969). Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires (Vol. 31). Paris: Dunod.

[16] Liu, W. (2010). General decay and blow-up of solution for a quasilinear viscoelastic problem with nonlinear source. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 73(6), 1890-1904.

[17] Liu, W. (2009). Uniform decay of solutions for a quasilinear system of viscoelastic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(5), 2257-2267.

[18] Liu, W. (2010). Global existence and uniform decay of solutions for a system of wave equations with dispersive and dissipative terms. *Frontiers of Mathematics in China*, 5(3), 555-574.

[19] Liu, W., and Yu, J. (2011). Global existence and uniform decay of solutions for a coupled system of nonlinear viscoelastic wave equations with not necessarily differentiable relaxation functions. *Studies in Applied Mathematics*, 127(4), 315-344.

[20] Park, J. Y., and Park, S. H. (2012). General decay for a quasilinear system of viscoelastic equations with nonlinear damping. *Acta Mathematica Scientia*, 32(4), 1321-1332.

[21] Renardy, M., Hrusa, W. J., and Nohel, J. A. (1987). Mathematical problems in viscoelasticity, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 35. New York: Longman Scientific and Technical, Essex, and John Wiley and Sons.

[22] Segal, I. (1965). Nonlinear partial differential equations in quantum field theory. In Proceedings of Symposia in Applied Mathematics - AMS (Vol. 17, No. 965, pp. 210-226). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

[23] Sun, F., and Wang, M. (2006). Global and blow-up solutions for a system of nonlinear hyperbolic equations with dissipative terms. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 64(4), 739-761.

[24] Wu, S. T. (2012). General decay of energy for a viscoelastic equation with damping and source terms. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 16(1), 113-128.