PESQUIMAT 22(1): 1–8 (2019)
http://doi.org/10.15381/pes.v22i1.15758

ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Singularidad de la polar de una curva plana irreducible en $K(2p, 2q, 2q + d)$

Mauro Fernando Hernández Iglesias [1]**,**

Resumen: Veremos que existe un abierto de Zariski en el conjunto de curvas planas irreducibles con exponentes característicos $2p, 2q$ y $2q+d$, dado por $K(2p, 2q, 2q+d)$ con $\text{mcd}\{p, q\} = 1$ y d impar, donde la polar es no degenerada, su topología es constante y determinada apenas por p y q.

Palabras clave: No degenerada; Singularidad; Polígono de Newton.

Singularity the polar of a plane branch in $K(2p, 2q, 2q + d)$.

Abstract: We show that there is a Zariski open, in the set of plane branches with characteristic exponents $2p, 2q$ and $2q+d$, wich is denoted by $K(2p, 2q, 2q+d)$, with $\text{mcd}\{p, q\} = 1$ and d odd, where the polar is no degenerate, its topology is constant and determined only for p and q.

Keywords: No degenerate; Singularity; Newton Polygon.

Recibido: 23/01/2019. *Aceptado*: 02/04/2019. *Publicado online*: 13/05/2019.

[1]PUCP, Facultad de Ciencias e-mail: mhernandezi@pucp.pe

1. Introducción

El objetivo del presente trabajo es mostrar que para una curva irreducible $f = 0$ con exponentes característicos $2p, 2q$ y $2q + d$, donde $\text{mcd}\{p, q\} = 1$ y d impar, su polar $P(f) = 0$ es no degenerada si es que $f = 0$ es genérica en el sentido de Zariski en dicha clase equisingular, por tanto se muestra que la topología de la polar es un inviarinte topológico de la curva, si esta es genérica en el conjunto $K(2p, 2q, 2q + d)$.

El tipo topológico de la polar en general no es un invariante topológico de una curva, es un invariante analítico.

La información de la polar que se obtiene sólo de la topología de la curva es dada en el conocido Teorema de Merle, que mide el contacto de la curva irreducible $f = 0$, con las componentes irreducibles de su polar $P(f) = 0$. En este artículo hacemos el estudio de la topología de una curva plana reducida, usando la caracterización de equisingularidad debido a Zariski, es decir usando sus exponentes característicos y multiplicidades de intersección.

La clase equisingular $K(2p, 2q, 2q + d)$ fue estudiada por Luengo y Pfister en [4], donde describen el modulí de esta clase equisingular, muestran entre otras cosas que $K(2p, 2q, 2q + d)$ es muy particular, por ejemplo el número de Tjurina, que en general es un invariante analítico en este caso es sólo invariante topológico.

Haremos un estudio de la polar a partir de la fórmula pre normal dada por Luengo y Pfister para este tipo topológico de curvas planas. Abramo Hefez, Marcelo Escudeiro y Hernández Iglesias en [2] dan una descripción completa de la topología de la polar para curvas genéricas en $K(2p, 2q, 2q + d)$.

2. Preliminaries

2.1. Curvas analíticas planas

Denotaremos por $\mathbb{C}\{x, y\}$ el conjunto funciones analíticas en el origen. Una curva analítica plana C_f es el conjunto $U \cap f^{-1}(0)$, para U abierto en $(\mathbb{C}^2, 0)$, por comodidad en adelante identificaremos $f = 0$ con f.

Es conocido que si $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es irreducible, no tangente al eje y, con multiplicidad n entonces existe una parametrización (Puiseüx) $x = t^n$, $y = \sum_{i \geq n} a_i t^i$ de f, a partir de esto definimos los siguientes valores numéricos:

$n = \beta_0 = e_0$, $\beta_1 = \min\{i; a_i \neq 0, \text{ y } i \notin \langle e_0 \rangle\}$, $e_1 = \text{mcd}\{\beta_0, \beta_1\}$, $\beta_2 = \min\{i; a_i \neq 0 \text{ y } i \notin \langle e_1 \rangle\}$, $e_2 = \text{mcd}\{n, \beta_1, \beta_2\}$, donde $\langle n \rangle = \{nk; k \in \mathbb{N}\}$, de este modo tenemos que existe g tal que $e_g = 1$, el conjunto $\{\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_g\}$ es llamado el conjunto de los exponentes característicos de f, y g el género de f.

Definición 1 *Diremos que las curvas $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ son tologicamente equivalentes o equisingulares si y sólo si existen abiertos $U, V \subset \mathbb{C}^2$ y un homeomorfismo $h : U \longrightarrow V$ con $h\big(f^{-1}(0) \cap U\big) = g^{-1}(0) \cap V$. Usaremos la notación $f \equiv g$ para decir que f y g son equisingulares, en el caso que h sea un isomorfismo analítico diremos que f y g son analíticamente equivalentes.*

Definición 2 *Sean $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ la multiplicidad de intersección de f y g es dada por:*

$$I(f, g) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f, g \rangle},$$

dimensión como $\mathbb{C}$ espacio vectorial.

Teorema 1 (Zariski) *Sean f, g dos curvas irreducibles no tanjentes al eje y, entonces son equisingulares si y sólo si tienen los mismos exponentes característicos.*

Si $f = f_1 \cdots f_n$ y $g = g_1 \cdots g_n$ son curvas reducidades, con componentes irreducibles f_i, g_i respectivamente, f y g son equisingulares si para algun reordenamiento, f_i y g_i tienen los mismos exponentes característicos y además $I(f_i, f_j) = I(g_i, g_j)$ para todo $i, j \in \{1, ...n\}$, para $i \neq j$.

En adelante denotaremos por $K(\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_g)$ el conjunto de curvas planas irreducibles con exponentes característicos $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_g$ y parametrización de la forma

$$x = t^{\beta_0},\ y = \sum_{i \geq \beta_1} a_i t^i.$$

El conjunto $K(\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_g)$ contiene un representante analítico de cualquier curva irreducible con exponentes característicos $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_g$.

Definición 3 *Sea f un germen de curva plana, definimos la polar de f en la dirección $p = (a : b) \in \mathbb{P}^1$ como $P_{a,b}(f) = af_x + bf_y$.*
En el caso de que $p \in U$ abierto de $\mathbb{P}^1$, diremos que es la polar genérica de f y será denotada por $P(f)$.

Para nosotros polar será polar genérica, pues sólo consideraremos curvas por lo menos reducidas.

2.2. Polígono de Newton de una curva plana

Sea $f = \sum_{(i,j)} a_{i,j} x^i y^j$ una curva plana. El soporte de f denotado por $S(f)$ se define como el conjunto:

$$\{(i, j); a_{i,j} \neq 0\}$$

La región de Newton de f denotada por $N(f)$ se define como la envolvente convexa del conjunto:

$$\bigcup_{(i,j) \in S(f)} (i, j) + \mathbb{R}_+^2$$

El polígono de Newton de f denotado por $PN(f)$ se define como la unión de los lados compactos del borde de la región $N(f)$.

2.3. Curvas Planas no Degeneradas

Consideremos $f = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ un germen de curva plana, $PN(f)$ su polígono de Newton, y l un lado de $PN(f)$,denotaremos por f_l el polinomio asociado al lado l.

$$f_l = \sum_{(i,j) \in l} a_{i,j} x^i y^j.$$

Definición 4 *Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una curva reducida, diremos de que f es no degenerada o Newton no degenerada con respecto al sistema de coordenadas (x, y), si para cada lado l de $PN(f)$ el polinomio asociado f_l no tiene raices múltiples.*

La propiedad de ser no degenerada es invariante por multiplicación por unidades, por lo tanto tambien podemos decir que el germen que define f, es no degenerado.

Lema 1 *[OKA] Sea $C = f$ una curva plana y (x, y) un sistema coordenado, tal que el cono tangente de f no contiene a la recta $x = 0$. Entonces existe una descomposición $C^{(i)}$, $i = 1, \cdots, s$ de la curva $C = f$, tal que denotando por $m_i = I(C^{(i)}, y)$, $n_i = I(C^{(i)}, x) = o(C^{(i)})$, se tiene que:*

- *$PN(C^{(i)})$ tiene inclinación $\frac{m_i}{n_i}$.*
- *Si $d_i = \frac{m_i}{n_i}$, entonces $1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_s \leq \infty$ y $d_s = \infty$ si $C^{(s)} = (y)$.*
- *Además, si C es no degenerada con respecto a (x, y) tenemos de que $C^{(i)}$ tiene $r_i = mcd\{n_i, m_i\}$ componentes irreducibles $C_j^{(i)}$, con parametrizaciones:*

$$y^{\frac{n_i}{r_i}} - a_{i,j}x^{\frac{m_i}{n_i}} + \cdots, 1 \leq j \leq r_i$$

donde $a_{i,j} \neq a_{i,j'}$ para $j \neq j'$.

Observación 1 *El Lema anterior nos dice que si $f = 0$ es una curva no degenerada, entonces su topología puede ser determinada a partir de su polígono de Newton.*

3. Polar de una curva en $K(2p, 2q, 2q + d)$

Empezaremos mostrando que, para cualquier $f \in K(2p, 2q, 2q + d)$, el polígono de Newton de su polar siempre tiene un lado con vértices $(p - 1, q)$ y $(0, 2p - 1)$ por tanto una rama con exponentes p y, q, luego determinamos un conjunto A, del cual se construye el polígono de Newton de la polar, para una curva genérica en la clase equisingular $K(2p, 2q, 2q + d)$, veremos que dicha polar es no degenarada por tanto el tipo topológico de la polar es genéricamente constante.

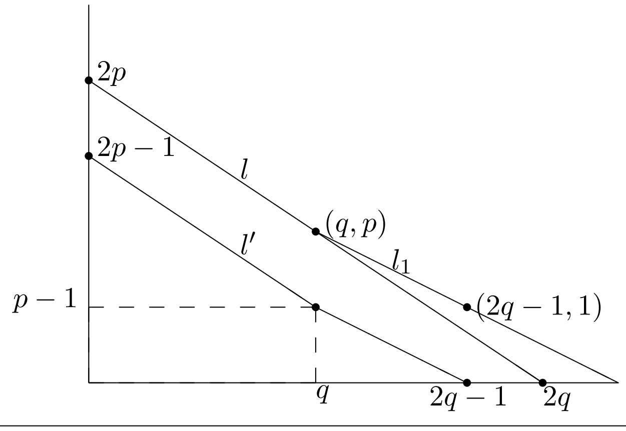
Una curva en $K(2p, 2q, 2q + d)$ tiene ecuación implicita (ver [4], Lema 1)

$$f = (y^p + x^q + \sum_{ip+jq>pq} h_{i,j}x^iy^j)^2 + \sum_{ip+jq\geq 2pq+d} a_{i,j}x^iy^j = (f_1)^2 + f_2. \tag{1}$$

Consideremos los siguientes conjuntos

$$B_0 = \{(i, j); b_{i,j}x^iy^j, \text{ es un término de } (f_1)^2\}\ , \quad B_1 = \{(i, j); ip + jq \geq 2pq + d\},$$

Sea l' el segmento formado por los pontos $(0, 2p - 1)$ y $(q, p - 1)$, y l la recta que pasa por los puntos $(0, 2p)$ y $(2q, 0)$.



Como l y l' son paralelas, con distancia en la vertical de una unidad, y con inclinación menor que uno, los puntos que representan los monomios de $af_x + bf_y$, obtenidos a partir de los conjuntos B_0 y B_1, estarán siempre arriba del segmento l'. Por lo tanto, el segmento $l^{'}$ será siempre un lado del polígono de Newton de la polar.

Por otro lado un simples cálculo muestra que el ponto $(2q - 1, 1)$ está arriba de la reta l en la figura anterior. Consideremos ahora la recta $l_1 : (p-1)x + (q-1)y = 2pq - q - p$, y un punto $P = (i, j) \in B_1$, con $0 \leq i \leq q$, el punto P está arriba del segmento determinado por los puntos $(0, 2p)$ y (q, p).

Supongamos ahora que $d \geq q$, así tendremos que, cuando $q < i \leq 2q - 1$, el ponto P estará arriba de la recta l_1, por lo tanto un ponto $P \in B_1$ estará arriba del polígono determinado por los pontos $(0, 2p), (q, p)$ y $(2q-1, 1)$. Por tanto, cuando $d \geq q$, el polígono de Newton de la polar es determinado solamente por el conjunto B_0, así hemos probado.

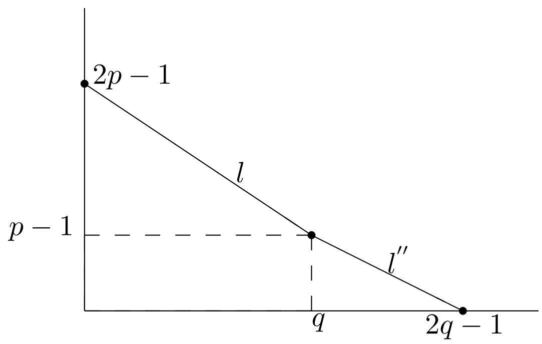
Proposición 1 *La polar de un elemento cualquiera $f \in K(2p, 2q, 2q + d)$ tendrá siempre una rama con exponentes característicos p y q, además para $d \geq q$ el polígono de Newton de $P(f)$ es determinado sólo por el conjunto B_0.*

Determinemos ahora un conjunto A a partir del cual se obtiene el polígono de Newton de la polar para una curva genérica en $K(2p, 2q, 2q + d)$.

Lema 2 *El polígono de Newton de la polar $P(f)$ para un elemento genérico f en $K(2p, 2q, 2q+d)$ es la unión de los lados compactos de la cápsula convexa determinada por el conjunto*

$$A = \{(2q - [\frac{q}{p}], 0), (2q - [\frac{2q}{p}], 1), \ldots, (2q - [\frac{(p-1)q}{p}], p - 2), (2q - 1, 0), (q, p - 1), (0, 2p - 1)\}.$$

Prueba. Caso $B_0 = \{(0, 2p), (p, q), (2q, 0)\}$ el polígono de Newton de la polar es



Caso $B_0 \neq \{(0, 2p), (p, q), (2q, 0)\}$.

Supongamos primero que $d \geq q$, entonces de la proposición anterior tendremos que el polígono de Newton de la polar se obtiene a partir de la ecuación

$$y^{2p} + 2x^q y^p + x^{2q} + \sum h_{i,j}^2 x^{2i} y^{2j} + 2\sum h_{i,j} x^{i+q} y^j + 2\sum h_{i,j} x^i y^{j+p} + 2\sum h_{i,j} h_{u,v} x^{i+u} y^{j+v} \quad (2)$$

para cada valor de j_k exponente de y fijo, i_k es el menor exponente de x en un monomio de la polar.

Empezamos determinando el conjunto de puntos con esta propriedad obtenidos a partir del quinto término de la ecuación (2). Sea $(i, 1) \in B_0$, entonces $ip + q > pq$, luego $i > q - \frac{q}{p}$, por lo tanto el menor valor entero para i será $q - \left[\frac{q}{p}\right]$, consecuentemente, al considerar el quinto término de la ecuación (2) obtenemos el punto $(2q - \left[\frac{q}{p}\right], 0) = (i_1, j_1)$.

Del mismo modo se muestra que para $(i,2) \in B_0$, el menor valor entero de i es $q - \left[\frac{2q}{p}\right]$, por tanto $(2q - \left[\frac{2q}{p}\right], 1) = (i_2, j_2)$, siguiendo el mismo razonamiento llegamos al punto $\big(2q - \left[\frac{(p-1)q}{p}\right], p-2\big) = (i_{p-1}, j_{p-1})$, además consideramos los puntos $(q, p-1), (0, 2p-1), (2q-1, 0)$ correspondiendo claramente a términos de la polar $P(f)$, obtenemos así el conjunto:

$$A = \Big\{\big(2q - [\frac{q}{p}], 0\big), \big(2q - [\frac{2q}{p}], 1\big), \ldots, \big(2q - [\frac{(p-1)q}{p}], p-2\big), (q, p-1), (0, 2p-1)\Big\}.$$

Veremos ahora que el conjunto A contiene todos los puntos (i,j) para $0 \leq j \leq p-1$, a partir de los cuales obtenemos el polígono de Newton de la polar genérica.

En efecto, una simple inspección indica que sólo es necesario comparar los puntos anteriores con los que son obtenidos del cuarto término de la equación (2), que son de la forma $\big(2\big(q - \left[\frac{kq}{p}\right]\big), 2k\big)$, y con los del séptimo término de (2), que son de la forma $\big(2q - \left[\frac{k_1 q}{p}\right] - \left[\frac{k_2 q}{p}\right], k_1 + k_2\big)$.

Así, tenemos las siguientes posibilidades:

1. Los términos cuyos exponentes corresponden los puntos $\big(2\big(q - \left[\frac{kq}{p}\right]\big), 2k\big)$, los cuales al considerar la polar quedarán con exponentes correspondiendo a puntos de la forma $\big(2\big(q - \left[\frac{kq}{p}\right]\big), 2k-1\big)$, o bien $\big(2\big(q - \left[\frac{kq}{p}\right]\big) - 1, 2k\big)$.

   Luego, comparando estos puntos con los obtenidos en A, tenemos que:

$$2q - 2[\tfrac{kq}{p}] \geq 2q - [\tfrac{2kq}{p}], \quad \text{pues } 2[\tfrac{kq}{p}] \leq [\tfrac{2kq}{p}],$$

$$2q - 2\big[\tfrac{kq}{p}\big] - 1 \geq 2q - \big[\tfrac{(2k+1)q}{p}\big], \quad \text{pues } 2[\tfrac{kq}{p}] + 1 \leq [\tfrac{(2k+1)q}{p}].$$

2. Los términos correspondiendo a los puntos $(2q - [\frac{k_1 q}{p}] - [\frac{k_2 q}{p}], k_1 + k_2)$, que al considerar la polar serán de la forma $(2q - [\frac{k_1 q}{p}] - [\frac{k_2 q}{p}], k_1 + k_2 - 1)$ o bien $(2q - [\frac{k_1 q}{p}] - [\frac{k_2 q}{p}] - 1, k_1 + k_2)$.

   Luego comparando estos puntos con los del conjunto A, tendremos, respectivamente:

$$2q - [\tfrac{k_1 q}{p}] - [\tfrac{k_2 q}{p}] \geq 2q - [\tfrac{(k_1+k_2)q)}{p}], \quad \text{pues } [\tfrac{k_1 q}{p}] + [\tfrac{k_2 q}{p}] \leq [\tfrac{(k_1+k_2)q}{p}],$$

$$2q - [\tfrac{k_1 q}{p}] - [\tfrac{k_2 q}{p}] - 1 \geq 2q - [\tfrac{(k_1+k_2+1)q}{p}], \quad \text{pues } [\tfrac{k_1 q}{p}] + [\tfrac{k_2 q}{p}] + 1 \leq [\tfrac{(k_1+k_2+1)q}{p}].$$

Por lo tanto, el conjunto A está realmente formado por los puntos (i_k, j_k) donde, para cada j_k fijo, i_k representa el menor exponente de x obtenido tomando las derivadas de los monomios cuyos puntos correspondientes están en B_0.

Finalmente en el caso $q > d$.

Sólo necesitamos considerar los pontos con a propriedade deseada obtenidos a partir del conjunto B_1 y compararlos con los puntos del conjunto A.

Sea $(i', 1) \in B_1$. Entonces, $i'p + q \geq 2pq + d$, luego $i' \geq 2q - \frac{(q-d)}{p}$, por lo tanto, el menor valor entero que i' puede asumir es $2q - \left[\frac{q-d}{p}\right]$.

En general, para j'_k, tenemos que los puntos $(i'_k, j'_k) \in B_1$ con la propriedad de i'_k ser mínimo será de la forma $\left(2q - \left[\frac{qk-d}{p}\right], k\right)$. Luego al considerar la polar de f, obtenemos los puntos $(i'_k - 1, k)$ o bien $(i'_k, k-1)$.

Tenemos así las siguientes desigualdades:

- $2q - \left[\frac{qk-d}{p}\right] - 1 \geq 2q - \left[\frac{(k+1)q}{p}\right]$, pues $\left[\frac{kq-d}{p}\right] + 1 \leq \left[\frac{kq}{p}\right] + \left[\frac{q}{p}\right]$,
- $2q - \left[\frac{qk-d}{p}\right] \geq 2q - \left[\frac{kq}{p}\right]$, pues $\left[\frac{qk-d}{p}\right] \leq \left[\frac{kq}{p}\right]$.

Entonces, el polígono de Newton de la polar $P(f)$, de un elemento genérico $f \in K(2p, 2q, 2q+d)$ es determinado por la unión de los lados compactos de la cápsula convexa que determina el conjunto A. □

Teorema 2 *Existe un abierto de Zariski en el conjunto $K(2p, 2q, 2q+d)$ donde la polar es no degenerada, y además su topología es determinada sólo por p y q.*

Prueba. Considerando la proposición (1) y el lema (2), tenemos que el punto $P_k = (i_k, j_k) = \left(2q - \left[\frac{kq}{p}\right], k-1\right) \in A$ correspondiente al monomio $b_{i_k, j_k+1} x^{i_k} y^{j_k+1}$ está en f pues es obtenido del conjunto B_0, además para cada ponto P_k corresponde un único monomio de la forma anterior, luego el coeficiente del monomio de la polar que es obtenido a partir de P_k puede ser considerado como uma función linear en b_{i_k, j_k+1}. Así, los polinomios asociados a cada lado del polígono de Newton de la polar están bien determinados, por tanto considerando los discriminantes de sus polinomios asociados a cada lado del polígono de Newton, tendremos que para valores generales en los coeficientes de f, su polar es Newton no degenerada, luego del Lema de Oka tendremos que es determinada apenas por p y q. □

De lo anterior tenemos el siguiente

Corolario 1 La topología de la polar $P(f)$ de una curva genérica f en la clase de equisingularidad $K(2p, 2q, 2q+d)$ es constante y depende sólo del tipo topológico de f.

Prueba. Es consecuencia inmediata del Teorema anterior y del Lema de Oka.

4. Conclusiones

1. El tipo topológico de la polar es genericamente constante en el conjunto $K(2p, 2q, 2q+d)$.
2. El tipo topológico de la polar de una curva irreducible, cuya singularidad es caracterizada por los exponentes característicos $2p, 2q$ y $2q+d$, es completamente determinado a partir de su polígono de Newton, si la curva f es genérica en el sentido de Zariski en el conjunto $K(2p, 2q, 2q+d)$.
3. El polígono de Newton de la polar, es la unión de los lados compactos de la cápsula convexa de un conjunto finito de puntos determinados apenas por p y q, conforme el Lema 2.
4. La polar $P(f)$ de una curva irreducible f en $K(2p, 2q, 2q+d)$ tiene siempre una componente irreducible con exponentes característicos p, q.

5. Recomendaciones

Una posterior lectura de este artículo serían el trabajo de Luengo y Pfister en [4], donde se describe el moduli de $K(2p, 2q, 2q+d)$, como también el trabajo de Hefez, Escudeiro y Hernández en [2], donde se da la descripción completa de la topología de la polar, para una curva genérica en este tipo topológico.

Referencias bibliográficas

[1] Hefez, A. and Hernandes, M. E. (2011). The analytic classification of plane branches. *Bulletin of the London Mathematical Society, 43*, 2, 289-298 .

[2] Hefez, A.; Hernandes, M. E. and Iglesias, M. F. H. (2018). Plane Branches with Newton non-degenerate Polars. *International Journal of Mathematics, 29*(1), 1850001.

[3] Iglesias, M. F. H. (2013). Singularidad de la polar de un germen de curva irreducible de género uno. *Pro Mathematica, 27*(53-54), 25-40.

[4] Luengo, I. and Pfister, G.(1990). Normal forms and moduli spaces of curve singularities with semigroup $\langle 2p, 2q, 2pq + d\rangle$. *Compositio Mathematica, 76*(1-2), 247-264 .

[5] Oka, M. (1997). *Non-degenerate complete intersection singularity.* Paris, Francia: Hermann.

[6] Zariski, O. (1966). Characterization of Plane Algebroid Curves whose Module of Differentials has Maximum Torsion. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 56*(3), 781-786 .

[7] Zariski, O.(1986) *Le Problème des Modules pour les Branches Planes.* Cours donné au Centre de Mathématiques de L'École Polytechnique. Nouvelle éd. revue par l'auteur. Rédigé par François Kimety et Michel Merle. Avec un appendice de Bernard Teissier. Paris, Francia: Hermann.