PESQUIMAT 22(1): 9–29 (2019)
http://doi.org/10.15381/pes.v22i1.16123/
ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

El problema de valor inicial para las ecuaciones de Navier-Stokes en $L^m(\mathbb{R}^m)$

Magdalena Huacasi Machaca [1]

Resumen: En este artículo se aborda el problema de valor inicial para las ecuaciones de Navier-Stokes en $\mathbb{R}^m$ $(m = 2, 3, \ldots)$ con condición inicial en el subespacio $PL^p(\mathbb{R}^m)$ de $L^p(\mathbb{R}^m)$, caracterizado por la condición de divergencia nula. Se estudia el problema considerando su formulación integral, en donde se usa un argumento de aproximaciones sucesivas. La existencia y unicidad de la solución local es probada dependiendo de una condición de pequeñez en el tiempo de existencia. Por otro lado el resultado global es probado con una pequeñez del dato inicial.

Palabras clave: Ecuaciones de Navier-Stokes; Proyector de Leray; Espacios de Lebesgue; Espacios de divergencia nula; Existencia y Unicidad.

The initial value problem for the Navier-Stokes equations in $L^m(\mathbb{R}^m)$

Abstract: In this paper addresses the initial value problem for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ $(m = 2, 3, \ldots)$ with initial condition in the subspace $PL^p(\mathbb{R}^m)$ of $L^p(\mathbb{R}^m)$, characterized by the null divergence condition. The problem is studied considering its integral formulation, where an argument of successive approximations is used. The existence and uniqueness of the local solution is proven depending on a condition of smallness in the time of existence. On the other hand, the overall result is tested with a small amount of the initial data.

Keywords: Navier-Stokes Equations; Leray Projector; Lebesgue Spaces; Null divergence spaces; Existence and Uniqueness.

Recibido: 18/01/2019. *Aceptado*: 30/04/2019. *Publicado online*: 13/05/2019.

©Los autores. Este artículo es publicado por la Revista PESQUIMAT de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Este es un artículo de acceso abierto, distribuido bajo los términos de la licencia Creative Commons Atribucion-No Comercia-Compartir Igual 4.0 Internacional.(http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) que permite el uso no comercial, distribución y reproducción en cualquier medio, siempre que la obra original sea debidamente citada. Para información, por favor póngase en contacto con revistapesquimat.matematica@unmsm.edu.pe

[1]UNSA, Facultad de Ciencias Naturales y Formales. e-mail: mhuacasim@unsa.edu.pe

1. Introducción

Las ecuaciones de Navier-Stokes conforman el pilar de modelos básicos que son utilizados en diversas ciencias aplicadas como la aeronáutica, la oceanografía, la meteorología y la hidráulica, ya que dichas ecuaciones permiten comprender, por ejemplo, los flujos de aire turbulento, los remolinos que se forman cuando el agua escurre por una tubería o el flujo sanguíneo en las grandes arterias.

Podemos decir que la teoría matemática de la mecánica de fluidos comienza con el trabajo de Isaac Newton en el siglo XVII, pues fue el primero en aplicar sus leyes de la mécanica al movimiento de los fluidos.

Posteriormente Leonhard Euler escribió por primera vez en 1755 las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido en ausencia de viscosidad, es decir, un fluido ideal y progresivamente estas ecuaciones se fueron completando hasta que finalmente el ingeniero francés Claude-Louis Navier en su trabajo*"Mémoire sur les lois du mouvement des fluides"*, dedujo las ecuaciones para un fluido viscoso en una época en que no se comprendía muy bien cual era la física de la situación que se estaba matematizando. De hecho lo único que hizo fue modificar las ecuaciones obtenidas por Euler y considerar las fuerzas de interación entre las moléculas del fluido. Aproximadamente 23 años después en 1845 el matemático irlandés George Gabriel Stokes en su famoso artículo *"On the theories of internal friction of fluids in motion"* justificó las ecuaciones de Navier deduciéndolas adecuadamente. Actualmente a estas ecuaciones se les conoce como las ecuaciones de Navier-Stokes.

Estas ecuaciones gobiernan el movimiento de fluidos viscosos y que no se comprimen (incompresibles). Con la formulación de estas ecuaciones surge el problema de obtener sus soluciones, partiendo de ciertas condiciones iniciales. Este problema es más conocido como " Problema de Cauchy para las ecuaciones de Navier-Stokes".

Este problema fue formulado hace más de 250 años y continúa siendo una situación en abierto, pues son necesarias muchas hipótesis sobre sus datos iniciales para la obtención de resultados como existencia, unicidad, regularidad y solución explicita. A pesar de que han habido muchos descubrimientos, la naturaleza de las soluciones en el caso tridimensional sigue siendo un gran misterio y corresponde al sexto problema del milenio propuesto por el *Clay Mathematics Institute* [22].

En principio, para cualquier problema de movimiento de fluido, una vez fijadas las condiciones iniciales correspondientes al caso considerado, la solución de este sistema nos proporcionaría el campo de velocidades y la presión (y en general cualquier otra variable que se exprese en función de estos).

Entre los avances publicados referentes al problema se tiene que, entre 1933 y 1934, Jean Leray hizo una contribución fundamental al problema de Cauchy para las ecuaciones de Navier-Stokes, pues obtuvo existencia de solución clásica para datos regulares durante un intervalo de tiempo pequeño $(0, T)$, pero no le era posible controlar a priori el crecimiento de la velocidad y sus derivadas al pasar el tiempo. Es así que introdujo el concepto de solución débil para las ecuaciones de Navier-Stokes. Leray fue capaz de construir dichas soluciones pero no fue posible mostrar su regularidad y unicidad [15].

Usando algunas de estas herramientas E. Hopf, en su trabajo *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen* publicado en 1950, probó la existencia de una solución debil global para el problema en un dominio abierto arbitrario Ω. Esas soluciones fueron llamadas soluciones de Leray-Hopf [8]. Desde entonces muchos investigadores como Lions, Ladyzhenskaya y Serrin, se dedicaron a estudiar la unicidad y regularidad de esas soluciones y obtuvieron que para el caso bidimensional la solución obtenida por Leray y Hopf es única y regular [14]. De esta manera el problema de Cauchy para las ecuaciones de Navier-Stokes queda resuelto para dos dimensiones.

Dentro de la literatura en espacios de Lebegue tenemos que, en 1972 Fabes, Jones y Riviere [5] estudian el problema de valor inicial para las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma integral en el espacio $S_T := \mathbb{R}^n \times [0, T)$, prueban unicidad para todos los valores de T y existencia para valores pequeños. Fujita y Kato en [7] y [12] utilizan la teoría de espacios de Hilbert para probar existencia de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes en su formulación integral en tres dimensiones. Posteriormente, en 1980 Tetsuro Miyakawa [18] estudia el problema para dominios acotados y con frontera suficientemente suave, ese mismo año Fred Weissler [21] da una teoría de soluciones locales en $\mathbb{R}^m_+ = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m); x_i > 0 \ \ \forall i = 1, \dots, m\}$.

En esta línea de resultados, cuando no existen restricciones sobre la condición inicial se prueba existencia y unicidad de soluciones para intervalos de tiempo pequeños, es decir, soluciones locales, y cuando la condición inicial es pequeña se prueba la existencia y unicidad de soluciones para todo tiempo, es decir, soluciones globales, como lo hizo Tosio Kato [11] y Giga [9].

2. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de evolución que describen matemáticamente el movimiento de los fluidos viscosos, incompresibles y homogéneos a través del campo de velocidades y la presión. Estas ecuaciones se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} + \rho(u\cdot\nabla)u - \rho f + \nabla p - \mu\Delta u &=& 0, \ \text{ en } \ [0,\infty)\times\mathbb{R}^m \\ \nabla\cdot u &=& 0 \\ u(x,0) &=& a_0(x). \end{array} \tag{1}$$

En estas ecuaciones $x = (x_1, \cdots, x_m)$ es un punto de $\mathbb{R}^m$, t es el tiempo, ρ es la densidad constante del fluido, $f = f(x,t)$ es la fuerza externa que actúa sobre el fluido, $p = p(x,t)$ y $u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots u_m(x,t))$ son la presión y el campo de velocidades respectivamente, ambas magnitudes desconocidas. Finalmente μ representa la viscosidad cinemática del fluido. Las ecuaciones de Navier-Stokes son obtenidas al aplicar las leyes de conservación de la mecánica clásica a los fluidos, mas información al respecto, ver [1, 4, 17, 13, 20].

Veamos una descripción de cada termino de las ecuaciones (1)

1. La derivada temporal de la velocidad

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t}u_1, \frac{\partial}{\partial t}u_2, \cdots, \frac{\partial}{\partial t}u_m\right)$$

describe la evolución del flujo del fluido al transcurrir el tiempo, partiendo del instante $t = 0$ en donde la velocidad es $a_0(x)$.

2. El término de transporte
$$(u\cdot\nabla)u=\left(\sum_{i=1}^{m}u_i\frac{\partial}{\partial x_i}u_1,\sum_{i=1}^{m}u_i\frac{\partial}{\partial x_i}u_2,\cdots,\sum_{i=1}^{m}u_i\frac{\partial}{\partial x_i}u_m\right),$$
modela el movimiento del fluido e indica que la forma en que se mueve depende de la velocidad del mismo y es de carácter no lineal.

3. El término de difusión
$$\mu\Delta u=\mu\left(\Delta u_1,\Delta u_2,\cdots,\Delta u_m\right),$$
modela la propagación del fluido cuando este se derrama y la viscosidad cinemática es un parámetro que mide la intensidad del derramamiento.

4. El gradiente de presión
$$\nabla p=\left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\frac{\partial p}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial p}{\partial x_m}\right),$$
que describe las fuerzas internas de repulsión entre las moléculas del fluido.

5. La fuerza externa que actúa sobre el fluido,
$$f=(f_1,f_2,\cdots,f_m),$$
es un dato conocido, por ejemplo la gravedad.

6. La incompresibilidad del fluido descrita por la condición de divergencia nula de la velocidad del fluido
$$\nabla\cdot u=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0.$$
El agua es un típico ejemplo de fluido incompresible.

3. Existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes

En esta sección se abordará el problema de valor inicial para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles y homogéneas. Estudiamos las soluciones del problema en cuestión, estas soluciones son llamadas soluciones fuertes, se trataran los principales teoremas relativos a la existencia y unicidad de este tipo de soluciones.

3.1. Problema de valor inicial para las ecuaciones de Navier-Stokes

Vamos a considerar las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles y homogéneas con fuerza externa $f=0$ y con condición inicial igual a $a_0(x)$, en todo el espacio $\mathbb{R}^m$, es decir,

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u\right)-\mu\Delta u+\nabla p &= 0, &(2)\\ \nabla\cdot u &= 0, &(3)\\ u(x,0) &= a_0(x). &(4)\end{aligned}$$

Debemos aclarar que los resultados obtenidos pueden adaptarse cuando $f \neq 0$, con condiciones apropiadas sobre f. Un simple cambio de variable en u y en p nos permiten asumir sin pérdida de generalidad que $\rho = \mu = 1$, lo que no permite reescribir las ecuaciones de Navier-Stokes como,

$$\begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla p &= 0, \\ \nabla \cdot u &= 0, \\ u(x,0) &= a_0(x). \end{aligned} \tag{5}$$

3.2. Proyección de Helmholtz-Leray

El sistema de ecuaciones (5) es acoplado, en donde encontramos dos incógnitas, la presión p y el campo de velocidades u. Para desacoplar este sistema introducimos una nueva herramienta, el operador proyección de Helmholtz-Leray. Este operador permite eliminar la variable presión p, originando un sistema de ecuaciones con apenas "una" incógnita, el campo de velocidades.

Definición 3.1 (Proyector de Leray) *Si $u : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un campo vectorial suficientemente regular, definimos el proyector de Leray a través de la expresión:*

$$\mathbb{P}(u) = u + \nabla(-\Delta)^{-1}(-\nabla \cdot u), \tag{6}$$

donde

$$(-\Delta)^{-1} f(x) = (\phi * f)(x),$$

Aquí ϕ es la solución fundamental de la ecuación de Laplace $\Delta u(x) = 0$.

El operador $\mathbb{P}$, está bien definido y es acotado sobre el espacio $L^p(\mathbb{R}^m)$ (mayor información, ver Stein [19]), y algunas de sus propiedades son:

Proposición 3.2 *Sea $u, v \in L^p(\mathbb{R}^m)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple que*

(i) El operador $\mathbb{P}$ es lineal:

$$\mathbb{P}(\alpha u + v) = \alpha \mathbb{P}(u) + \mathbb{P}(v) \tag{7}$$

(ii) Sea $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla g \in L^p(\mathbb{R}^m)$. Entonces,

$$\mathbb{P}(\nabla g) = 0, \qquad y \qquad \nabla \cdot (\mathbb{P}(u)) = 0, \tag{8}$$

además, $\nabla \cdot u = 0$ si y solo si

$$\mathbb{P}(u) = u. \tag{9}$$

(iii) El operador proyección $\mathbb{P}$ conmuta con la derivada temporal y con el operador Laplaciano, es decir,

$$\mathbb{P}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P} \quad y \quad \mathbb{P}\Delta = \Delta\mathbb{P} \tag{10}$$

Aplicando el operador $\mathbb{P}$ a las ecuaciones (5) y usando las propiedades del operador $\mathbb{P}$ se tiene el siguiente sistema equivalente

$$\begin{aligned} u_t + \mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u] - \Delta u &= 0, \\ u(x,0) &= a_0(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Definición 3.3 *Denotaremos por $PL^p(\mathbb{R}^m)$ a la imagen de $L^p(\mathbb{R}^m)$ por $\mathbb{P}$, es decir,*

$$PL^p(\mathbb{R}^m) = \mathbb{P}(L^p(\mathbb{R}^m)) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^m); \nabla \cdot u = 0\}. \tag{12}$$

3.3. Formulación Integral

En esta sección se deriva la formulación integral asociada al sistema (11). Debemos enfatizar que dicha formulación integral es la que será resuelta en el contexto de espacios L^p. Uno de los motivos es que una solución suave de la formulación integral es también una solución de la versión diferencial. Otro motivo importante es que la formulación integral posee menos derivadas, las cuales constituyen un obstáculo, y se acomoda mejor a los espacios carentes de regularidad.

Sea $u(x,t)$ una solución clásica de (11) y definamos

$$\psi(x,s) = \Phi(x,t-s) * u(x,s) = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x-y,t-s)u(x,s)dy, \tag{13}$$

donde $\Phi(x,t)$ es la solución fundamental de la ecuación del calor. La igualdad (13) puede ser escrita de una manera más corta como $\psi = e^{(t-s)\Delta}u$, donde el operador $e^{t\Delta}$ es el semigrupo del calor con las siguiente propiedades

Proposición 3.4 *Sea $\Phi(x,t)$ la solución fundamental del calor y $e^{t\Delta}$ el semigrupo del calor y , entonces se cumple que*

(i) Para cada $t > 0$, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x,t)dx = 1, \tag{14}$$

(ii) Para cada $t, s > 0$

$$e^{(t+s)\Delta} = e^{t\Delta}e^{s\Delta}. \tag{15}$$

Derivando formalmente (13) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x-y,t-s)u(y,s)dy\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{\partial}{\partial s}\Phi(x-y,t-s)u(y,s) + \Phi(x-y,t-s)\frac{\partial}{\partial s}u(y,s)\right)dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^m}\left(-\Delta(\Phi(x-y,t-s))u(y,s) + \Phi(x-y,t-s)\frac{\partial}{\partial s}u(y,s)\right)dy\\
&= \Phi(x,t-s) * \frac{\partial}{\partial s}u(x,s) - \Delta(\Phi(x,t-s)) * u(x,s)\\
&= \Phi(x,t-s) * (\Delta u(x,s) - \mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u(x,s)]) - \Delta(\Phi(x,t-s)) * u(x,s)\\
&= -\Phi(x,t-s) * \mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u(x,s)].
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \Phi(x,0) * u(x,t) = u(x,t), &(16)\\
\psi(x,0) &= \Phi(x,t) * u(x,0) = e^{t\Delta}a_0(x), &(17)
\end{aligned}$$

obtenemos

$$u(x,t) = e^{t\Delta}a_0(x) - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u(x,s)]ds. \tag{18}$$

Por lo tanto se concluye que toda solución clásica del sistema (11) satisface la ecuación integral (18) y viceversa.

Si denotamos por

$$F(u(x,s),v(x,s)) = \mathbb{P}[(u\cdot\nabla)v(x,s)], \tag{19}$$

la ecuación integral (18) queda

$$u(x,t) = e^{t\Delta}a_0(x) - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}F(u(x,s),v(x,s))ds. \tag{20}$$

Ahora se está en condiciones de definir la noción de solución que será utilizada en este artículo.

Definición 3.5 *Diremos que una función* $u:\mathbb{R}^m\times[0,T)\longrightarrow\mathbb{R}^m$ *es una solución fuerte de las ecuaciones de Navier-Stokes* (11) *si*

(i) $u(\cdot,t)\in PL^p(\mathbb{R}^m)$*, para algún* $p\geq 1$ *y* $\forall t>0$.

(ii) La ecuación (20) *se cumple* $x-$*c.t.p. y todo* $t>0$.

Con el objetivo de simplificar esta ecuación, la parte no lineal será denotada por

$$G(u,v)(x,t) = -\int_0^t e^{(t-s)\Delta}F(u(x,s),v(x,s))ds, \tag{21}$$

por lo tanto

$$u(x,t) = e^{t\Delta}a_0(x) + G(u,u(x,t)). \tag{22}$$

De ahora en adelante, serán estudiados resultados de existencia y unicidad de esta ultima ecuación.

3.4. Desigualdades en los espacios $L^p(\mathbb{R}^m)$

En los teoremas de existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones de Navier-Stokes, vamos a estimar varias veces la norma del semigrupo del calor $e^{\Delta t}$ en $\mathbb{R}^m$, el cual es caracterizado por una convolución. De este modo, es necesario un resultado que estime la norma de la convolución en $L^p(\mathbb{R}^m)$.

Lema 3.6 *Sea* $u\in L^p(\mathbb{R}^m)^m$ *y* $\nabla v\in L^p(\mathbb{R}^m)^m$*, con* $1<p\leq q\leq\infty$*, entonces*

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta}u\|_q &\leq ct^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{p}-\frac{m}{q}\right)}\|u\|_p & (23)\\ \|\nabla e^{t\Delta}u\|_q &\leq ct^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{p}-\frac{m}{q}\right)}\|u\|_p & (24)\\ \|F(u,v)\|_p &\leq c\|u\|_r\|\nabla v\|_s, \quad \frac{1}{p}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}, & (25)\end{aligned}$$

donde c *denota varias constantes independientes de* u *y* v.

Demostración. Por la desigualdad de Young, se obtiene

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta}u\|_q &= \|\Phi(x,t)*u(x,t)\|_q \\ &\leq \|\Phi(x,t)\|_r\|u(x,t)\|_p, \quad \frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}-1. & (26)\end{aligned}$$

Mostremos que

$$\|\Phi(x,t)\|_r \leq ct^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{p}-\frac{m}{q}\right)}, \quad \text{con } \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - 1. \tag{27}$$

De hecho,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x,t)\|_r &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} e^{\frac{-r|x|^2}{4t}} dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{4t}{r}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-|y|^2} dy \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{(4\pi)^{\frac{m}{2r}}}{(4\pi)^{\frac{m}{2}} r^{\frac{m}{2r}}} t^{\frac{m}{2r}-\frac{m}{2}} \\
&= ct^{-\frac{m}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)} = ct^{-\frac{m}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo (27) en (26) se obtiene (23).

De manera similar se procede para demostrar (24) y obtener

$$\begin{aligned}
\|\nabla e^{t\Delta} u\|_q &= \|\nabla\Phi(x,t) * u(x,t)\|_q \\
&\leq \|\nabla\Phi(x,t)\|_r \|u(x,t)\|_p, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - 1.
\end{aligned} \tag{28}$$

Ahora mostremos que:

$$\|\nabla\Phi(x,t)\|_r \leq ct^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{p}-\frac{m}{q}\right)}, \quad \text{con } \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - 1. \tag{29}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Phi(x,t)\|_r &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} \frac{1}{2t} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \left| x e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \right|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} \frac{1}{2t} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |x|^r e^{\frac{-r|x|^2}{4t}} dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} \frac{1}{2t} \left(\frac{4t}{r}\right)^{\frac{m}{2r}} \left(\frac{4t}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |y|^r \, e^{-|y|^2} dy \right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Veamos que la integral de la última desigualdad converge. De hecho, haciendo nuevamente un cambio de variables $\rho = |y|$, y notando que la función $f(y) = |y|^r \, e^{-|y|^2}$ es radial, la integral se puede escribir como

$$\int_{\mathbb{R}^m} |y|^r \, e^{-|y|^2} dy = \omega_m \int_0^\infty \rho^{r+m-1} \, e^{-\rho^2} d\rho,$$

donde ω_m es el volumen de la esfera m dimensional. Ahora, escribiremos la integral en términos de la función Gamma (Mayor información, ver Gonzales y Bohorquez [10]), para ello realizamos el cambio de variable $s = \rho^2$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \rho^{r+m-1} e^{-\rho^2} d\rho &= \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{\frac{r+m}{2}-1} e^{-s} ds \\
&= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{r+m}{2}\right) < \infty,
\end{aligned}$$

en este caso la función Gamma está bien definida ya que $r+m>0$. Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^m} |y|^r \; e^{-|y|^2} dy < \infty,$$

así

$$\|\nabla\Phi(x,t)\|_r \;\; \leq \;\; ct^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)} = ct^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Sustituyendo (29) en (28) obtenemos (24).

Finalmente para demostrar (25), se usa la desigualdad de Hölder y el hecho de que el proyector $\mathbb{P}$ es acotado.

$$\|F(u,v)\|_p = \|\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)v]\|_p \leq \|(u\cdot\nabla)v\|_p \leq c\|u\|_r\|\nabla v\|_s, \quad \frac{1}{p}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}.$$

□

Gracias al resultado anterior se puede controlar el comportamiento del semigrupo del calor $e^{t\Delta}$ así como de su derivada $\nabla e^{t\Delta}$. Esas estimaciones son esenciales en la demostración de los teoremas centrales de este trabajo, los cuales son presentados en la siguiente sección.

3.5. Existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes

Esta sección esta motivada por los resultados presentados por Kato [11], Giga [9] y Kato y Fujita [12]. Se presenta los resultados principales relativos a la existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, cuando el dato inicial a_0 está en $PL(\mathbb{R}^m)$.

Definición 3.7 *Definimos el espacio $BC([0,T);PL^q(\mathbb{R}^m))$ como el espacio de todas las funciones continuas y acotadas definidas sobre $[0,T)$ y que toman valores en $PL^q(\mathbb{R}^m)$.*

El espacio $BC([0,T);PL^q(\mathbb{R}^m))$ posee una norma natural dada por

$$\|u\|_\infty := \sup_{0\leq t<T} \|u(\cdot,t)\|_{L^p}. \tag{30}$$

Además $(BC([0,T);PL^q(\mathbb{R}^m)), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach [2]

El siguiente resultado establece la continuidad de $e^{t\Delta}a_0+G(u,u)(x,t)$, una demostración de este resultado puede encontrarse en [16].

Proposición 3.8 *Sea $1\leq p<\infty$ y $u:[0,T)\longrightarrow PL^p(\mathbb{R}^m)$, y defina la función*

$$v(x,t) \;\; = \;\; e^{t\Delta}a_0 + G(u,u)(x,t),$$

donde $a_0\in PL^p(\mathbb{R}^m)$ y $G(u,u)$ es como en (21). Entonces $v,\nabla v\in C([0,T),PL^p(\mathbb{R}^m))$, con $m\leq p$.

Lema 3.9 (Lema de las sucesiones acopladas) *Sea $C>0$ y K_n, K_n', $n\geq 0$, sucesiones numéricas tales que*

$$K_{n+1} \;\; \leq \;\; K_0 + CK_nK_n', \tag{31}$$

$$K_{n+1}' \;\; \leq \;\; K_0' + CK_nK_n'. \tag{32}$$

Si $K_0, K_0' < \frac{1}{4C}$, *entonces*

$$K_{n+1} \leq K, \quad y \quad K'_{n+1} \leq K. \tag{33}$$

para alguna constante $K < \frac{1}{2C}$.

Demostración. Cuando $K_0, K_0' < \frac{1}{4C}$, mostremos que

$$K_n, K_n' \leq K := \frac{1-\sqrt{1-4CK_0}}{2C} < \frac{1}{2C}. \tag{34}$$

En efecto, supongamos que $K_n, K_n' \leq K$ para todo $n \geq 0$, y hallemos el valor de K, de hecho

$$K_{n+1} \leq K_0 + CK^2 \leq K,$$

implica que $CK^2 - K + K_0 \leq 0$, lo que equivale a

$$\left(K - \frac{1+\sqrt{1-4K_0C}}{2C}\right)\left(K - \frac{1-\sqrt{1-4K_0C}}{2C}\right) \leq 0.$$

Luego tomamos el menor valor de K para el cual K_n es acotado, es decir, tomamos

$$K := \frac{1-\sqrt{1-4CK_0}}{2C},$$

luego, si $K_0 < \frac{1}{4C}$, entonces $K < \frac{1}{2C}$.

De manera similar se procede con K_n'. Por lo tanto K_n y K_n' son acotadas. □

Definición 3.10 (Aproximaciones sucesivas) *Definimos la siguiente sucesión*

$$u_0(x,t) = e^{t\Delta}a_0 \tag{35}$$

$$u_{n+1}(x,t) = u_0(t) + G(u_n, u_n)(x,t), \quad t > 0, n \geq 0, \tag{36}$$

donde $G(u_n, u_n)(x,t)$ *es como en* (21).

Lema 3.11 *Para* $T > 0$ *fijo, la sucesión* $(u_n)_{n\geq 0}$ *dada en la definición anterior satisface las siguientes propiedades:*

(*i*) *Para* $\delta \in (0,1)$, *las sucesiones dadas por*

$$K_n := \sup_{0\leq t<T} t^{\frac{1-\delta}{2}} \|u_n(x,t)\|_{\frac{m}{\delta}} \tag{37}$$

$$K_n' := \sup_{0\leq t<T} t^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_n(x,t)\|_m, \tag{38}$$

son acotadas.

(*ii*) *Para* $t_0 \in [0,T)$ *y* $m \leq q < \infty$ *se cumple que*

$$\lim_{t\longrightarrow t_0} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)} u_n(x,t) = t_0^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)} u_n(x,t_0), \tag{39}$$

$$\lim_{t\longrightarrow t_0} t^{1-\frac{m}{2q}} \nabla u_n(x,t) = t_0^{1-\frac{m}{2q}} \nabla u_n(x,t_0). \tag{40}$$

En la norma de $L^q(\mathbb{R}^m)$.

(*iii*) *La sucesión* $(u_n)_{n\geq 0}$ *satisface:*

$$\nabla \cdot \left(t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)} u_n \right) \;=\; 0, \quad \forall n \geq 0, \tag{41}$$

$$\nabla \cdot \left(t^{1-\frac{m}{2q}} \nabla(u_n) \right) \;=\; 0, \quad \forall n \geq 0. \tag{42}$$

En particular

$$t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)} u_n \in BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m)) \quad para \quad n \geq 0, \tag{43}$$

$$t^{1-\frac{m}{2q}} \nabla u_n \in BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m)) \quad para \quad n \geq 0. \tag{44}$$

Demostración.

(i) Mostremos que K_n y K_n' satisfacen las condiciones (31) y (32) del resultado anterior. En efecto, estimemos primero los términos $\|G(u_n,u_n)\|_{\frac{m}{\delta}}$ y $\|\nabla G(u_n,u_n)\|_m$, para ello usaremos las desigualdades obtenidas en el lema (3.6).

$$\begin{aligned} \|G(u_n,u_n)\|_{\frac{m}{\delta}} &\leq c\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|F(u_n(x,s),u_n(x,s))\|_{\frac{m}{\delta+1}} ds \\ &\leq c\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u_n\|_{\frac{m}{\delta}} \|\nabla u_n\|_m ds. \end{aligned}$$

Ahora usamos las definiciones de K_n y K_n' para obtener

$$\begin{aligned} \|G(u_n,u_n)\|_{\frac{m}{\delta}} &\leq cK_nK_n' t^{-\frac{1}{2}} t^{-1+\frac{\delta}{2}} t \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-1+\frac{\delta}{2}} dt \\ &\leq cK_nK_n' t^{-\frac{1-\delta}{2}} \beta\left(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

donde β es la función Beta (Mayor información, ver Gonzales [10]). Por lo tanto,

$$t^{\frac{1-\delta}{2}} \|G(u_n,u_n)\|_{\frac{m}{\delta}} \leq cK_nK_n' \beta\left(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}\right). \tag{45}$$

De modo similar podemos obtener

$$t^{\frac{1}{2}} \|\nabla G(u_n,u_n)\|_m \leq cK_nK_n' \beta\left(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}\right). \tag{46}$$

Denotemos por

$$C = \text{máx}\left\{ c\beta\left(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}\right), c\beta\left(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}\right) \right\}, \tag{47}$$

usando esta constante en las desigualdades (45) y (46), obtenemos

$$t^{\frac{1-\delta}{2}} \|G(u_n,u_n)\|_{\frac{m}{\delta}} \;\leq\; CK_nK_n' \tag{48}$$

$$t^{\frac{1}{2}} \|\nabla G(u_n,u_n)\|_m \;\leq\; CK_nK_n'. \tag{49}$$

Reemplazando estas nuevas desigualdades en las definiciones de K_{n+1} y K_{n+1}'((37) y (38) respectivamente) resulta

$$\begin{aligned} K_{n+1} &\leq \sup_{0\leq t<T} t^{\frac{1-\delta}{2}} \|u_0\|_{\frac{m}{\delta}} + \sup_{0\leq t<T} t^{\frac{1-\delta}{2}} \|G(u_n,u_n)\|_{\frac{m}{\delta}} \\ &\leq K_0 + CK_nK_n', \end{aligned}$$

y

$$K'_{n+1} \leq K'_0 + CK_nK'_n.$$

Es decir, K_n y K'_n satisfacen las primeras condiciones del lema de sucesiones acopladas. Por lo tanto, concluimos que K_n, K'_n son acotadas por una constante $K < \frac{1}{2C}$ si $K_0, K'_0 < \frac{1}{4C}$, lo que concluye la prueba de (i).

(ii) Como $t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}$ y $t^{1-\frac{m}{2q}}$ son continuas para todo $t \in [0,T)$ ya que $1 - \frac{m}{q} \geq 0$ y $1 - \frac{m}{2q} > 0$. De la Proposición 3.8 resulta que u_n y ∇u_n son continuas en $L^q(\mathbb{R}^m)$, en $(0,T)$, para todo $n \geq 0$. Además en $t = 0$ tenemos que $t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_n = 0$ y $t^{1-\frac{m}{2q}}\nabla u_n = 0$. De aquí que $t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_n$ y $t^{1-\frac{m}{2q}}\nabla u_n$ son continuas en $L^q(\mathbb{R}^m)$, en $[0,T)$.

(iii) Mostremos (41) y cuando $n = 0$. En efecto, usando el hecho de que el operador $\mathbb{P}$ conmuta con las derivadas y con el semigrupo del calor, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_0) &= t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}\mathbb{P}(e^{t\Delta}a_0(x)) \\
&= t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}e^{t\Delta}(\mathbb{P}a_0(x)) \\
&= t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}e^{t\Delta}a_0(x) \\
&= t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_0.
\end{aligned}$$

usando (9) se tiene que $\nabla \cdot \left(t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_0\right) = 0.$

Veamos el caso general. De hecho, de la definición de u_{n+1} y de las propiedades de operador $\mathbb{P}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_{n+1}) &= \mathbb{P}(t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_0) + \mathbb{P}(t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}G(u_n,u_n)) \\
&= t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_0 - t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}\mathbb{P}\left(\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}((u_n\cdot\nabla)u_n)ds\right) \\
&= t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}\left(u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}((u_n\cdot\nabla)u_n)ds\right),
\end{aligned}$$

haciendo uso de (9) obtenemos $\nabla \cdot \left(t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_{n+1}\right) = 0.$

Por lo tanto, (41) se cumplen para todo $n \geq 0$,de manera similar hacemos con (42). Lo que concluye la prueba de (iii).

□

Denotemos por

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &:= u_{n+1} - u_n = G(u_n,u_n) - G(u_{n-1},u_{n-1}), \quad \forall n \geq 0, \\
w_0 &:= u_0.
\end{aligned}$$

Lema 3.12 *Para w_{n+1} definido anteriormente y $m \le q$, se cumple que*

$$\|w_{n+1}\|_q \le cK\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\delta-\frac{m}{q})}\left(s^{-\frac{1}{2}}\|w_n\|_{\frac{m}{\delta}} + s^{-\frac{1-\delta}{2}}\|\nabla(w_n)\|_m\right) ds, \tag{50}$$

$$\|\nabla(w_{n+1})\|_q \le cK\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(2+\delta-\frac{m}{q})}\left(s^{-\frac{1}{2}}\|w_n\|_{\frac{m}{\delta}} + s^{-\frac{1-\delta}{2}}\|\nabla(w_n)\|_m\right) ds, \tag{51}$$

donde K es la constante obtenida en el Lema 3.9.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|w_{n+1}\|_q &= \|G(u_n,u_n) - G(u_{n-1},u_{n-1})\|_q \\
&= \|G(u_n - u_{n-1},u_n) + G(u_{n-1},u_n - u_{n-1})\|_q \\
&\le \|G(u_n - u_{n-1},u_n)\|_q + \|G(u_{n-1},u_n - u_{n-1})\|_q \\
&\le c\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\delta-\frac{m}{q})}\Big(\|u_n - u_{n-1}\|_{\frac{m}{\delta}}\|\nabla u_n\|_m + \\
&\qquad\qquad \|u_{n-1}\|_{\frac{m}{\delta}}\|\nabla(u_n - u_{n-1})\|_m\Big) ds \\
&\le c\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\delta-\frac{m}{q})}\Big(s^{-\frac{1}{2}}K_n'\|u_n - u_{n-1}\|_{\frac{m}{\delta}} + \\
&\qquad\qquad s^{-\frac{1-\delta}{2}}K_{n-1}\|\nabla(u_n - u_{n-1})\|_m\Big) ds \\
&\le cK\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\delta-\frac{m}{q})}\left(s^{-\frac{1}{2}}\|w_n\|_{\frac{m}{\delta}} + s^{-\frac{1-\delta}{2}}\|\nabla(w_n)\|_m\right) ds,
\end{aligned}$$

donde en la tercera línea usamos la desigualdad triangular, en la cuarta se usó las estimaciones obtenidas en el lema 3.6, en la quinta linea hemos usado las definiciones de K_n y K_n' ((37) y (38) respectivamente).

Por un cálculo similar se obtiene (51). □

Debido a que en las expresiones (50) y (51) aparecen los términos $\|w_n\|_{\frac{m}{\delta}}$ y $\|\nabla(w_n)\|_m$, es necesario acotar estos términos por constantes que no dependen de u_n.

Lema 3.13 *Para w_n definido anteriormente y $0 < \delta < 1$, se cumple que*

$$\|w_n\|_{\frac{m}{\delta}} \le (2CK)^n c t^{-\frac{(1-\delta)}{2}}\|a_0\|_m, \tag{52}$$

$$\|\nabla w_n\|_m \le (2CK)^n c t^{-\frac{1}{2}}\|a_0\|_m. \tag{53}$$

donde K y C son las constantes $C = \max\left\{c\beta(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}), c\beta(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2})\right\}$ y $K < \frac{1}{2C}$ respectivamente.

Demostración. Mostraremos (52) por inducción. En efecto, verifiquemos esta desigualdad para $n = 0$

$$\|w_0\|_{\frac{m}{\delta}} = \|u_0\|_{\frac{m}{\delta}} = \|e^{t\Delta}a_0\|_{\frac{m}{\delta}} \le ct^{-\frac{1-\delta}{2}}\|a_0\|_m$$

Supongamos que (52) es valida para n y mostremos que se cumplen para $n+1$. De hecho, tomando $q = \frac{m}{\delta}$ en (50), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|w_{n+1}\|_{\frac{m}{\delta}} &\leq cK \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \left(s^{-\frac{1}{2}} \|w_n\|_{\frac{m}{\delta}} + s^{-\frac{1-\delta}{2}} \|\nabla w_n\|_m \right) ds \\
&\leq cK \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \left(s^{-\frac{1}{2}} (2CK)^n c s^{-\frac{(1-\delta)}{2}} \|a_0\|_m + s^{-\frac{1-\delta}{2}} (2CK)^n c t^{-\frac{1}{2}} \|a_0\|_m \right) ds \\
&= 2c^2 K (2CK)^n \|a_0\|_m \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-1+\frac{\delta}{2}} ds \\
&\leq 2c^2 K (2CK)^n \|a_0\|_m t^{-\frac{(1-\delta)}{2}} \int_0^1 (1-z)^{-\frac{1}{2}} z^{-1+\frac{\delta}{2}} dz, \\
&= 2c^2 K (2CK)^n \|a_0\|_m t^{-\frac{(1-\delta)}{2}} \beta\left(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} \right) \\
&\leq c (2CK)^{n+1} \|a_0\|_m t^{-\frac{(1-\delta)}{2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto (52) se cumple para todo $n \geq 0$. De modo similar se demuestra (53). □

Podemos combinar los dos resultados anteriores para obtener cotas para $\|w_{n+1}\|_q$ y $\|\nabla w_{n+1}\|_q$ con $m \leq q$.

Lema 3.14 *Para w_n definido anteriormente y $m \leq q$, se cumple que*

$$\|w_{n+1}\|_q \leq 2c^2 K (2CK)^n \|a_0\|_m \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\delta-\frac{m}{q})} s^{-1+\frac{\delta}{2}} ds, \tag{54}$$

$$\|\nabla w_{n+1}\|_q \leq 2c^2 K (2CK)^n \|a_0\|_m \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(2+\delta-\frac{m}{q})} s^{-1+\frac{\delta}{2}} ds. \tag{55}$$

Demostración. Reemplazando (52) y (53) en (51) y (50), resulta

$$\begin{aligned}
\|w_{n+1}\|_q &\leq cK \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\delta-\frac{m}{q})} \Big(s^{-\frac{1}{2}} (2CK)^n c s^{-\frac{(1-\delta)}{2}} \|a_0\|_m + \\
&\qquad s^{-\frac{1-\delta}{2}} (2CK)^n c s^{-\frac{1}{2}} \|a_0\|_m \Big) ds \\
&\leq 2c^2 K (2CK)^n \|a_0\|_m \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\delta-\frac{m}{q})} s^{-1+\frac{\delta}{2}} ds,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|\nabla w_{n+1}\|_q &\leq cK \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(2+\delta-\frac{m}{q})} \Big(s^{-\frac{1}{2}} (2CK)^n c s^{-\frac{(1-\delta)}{2}} \|a_0\|_m + \\
&\qquad s^{-\frac{1-\delta}{2}} (2CK)^n c s^{-\frac{1}{2}} \|a_0\|_m \Big) ds \\
&\leq 2c^2 K (2CK)^n \|a_0\|_m \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(2+\delta-\frac{m}{q})} s^{-1+\frac{\delta}{2}} ds.
\end{aligned}$$

Como se quería demostrar.

□

3.6. Existencia local de soluciones fuertes

El resultado estudiado en esta sección es uno de los más importantes. A lo largo de la demostración usamos los lemas 3.9, 3.11, 3.12, 3.13 y 3.14. El teorema que se presenta es el de existencia local en el tiempo para cualquier dato inicial que fue estudiado por Kato [11]. Se prueba existencia de solución local para cualquier $a_0 \in PL^m(\mathbb{R}^m)$ independientemente del valor de su norma.

Teorema 3.15 (*Existencia Local*) *Sea $a_0 \in PL^m(\mathbb{R}^m)$. Entonces existe $T > 0$ y una solución única u de las ecuaciones de Navier-Stokes en el sentido de la Definición 3.5, tal que*

$$t^{(1-m/q)/2}u \in BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m)) \quad \textit{para} \ m \leq q < \infty, \tag{56}$$

$$t^{1-m/2q}\nabla u \in BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m)) \quad \textit{para} \ m \leq q < \infty, \tag{57}$$

ambos con valores cero en $t = 0$, excepto para $q = m$ en (56) en el cual $u(0) = a_0$.

Demostración. Gracias al Lema 3.11 afirmamos que

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_n &\in BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m)) \quad \text{para} \quad n \geq 0, \\ t^{1-\frac{m}{2q}}\nabla u_n &\in BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m)) \quad \text{para} \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Mostremos ahora la convergencia de las sucesiones en los respectivos espacios. Podemos distinguir dos casos: $m < q < \infty$ y $m = q$.

Veamos que $t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_n$ converge cuando $m < q$. De la desigualdad (52), obtenemos que la serie

$$t^{\frac{1-\delta}{2}}\sum_{n\geq 0} w_n$$

es convergente en $BC([0,T); PL^{\frac{m}{\delta}}(\mathbb{R}^m))$ si $2CK < 1$ con C dado en (47), es decir K debe ser pequeño. De (34) deducimos que para que K sea pequeño

$$K_0 = \sup_{0\leq t<T} t^{\frac{1-\delta}{2}}\|u_0\|_{\frac{m}{\delta}}$$

debe ser pequeño. Por otro lado, acotemos K_0 para ello tomamos $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m) \subset L^m(\mathbb{R}^m)$ que aproxime a a_0, es decir, $\|a_0 - g\|_m < \varepsilon$, luego

$$\begin{aligned} t^{\frac{1-\delta}{2}}\|e^{t\Delta}a_0\|_{\frac{m}{\delta}} &\leq t^{\frac{1-\delta}{2}}\|e^{t\Delta}(a_0-g)\|_{\frac{m}{\delta}} + t^{\frac{1-\delta}{2}}\|e^{t\Delta}g\|_{\frac{m}{\delta}} \\ &\leq ct^{\frac{1-\delta}{2}}t^{\frac{-(1-\delta)}{2}}\|(a_0-g)\|_m + ct^{\frac{1-\delta}{2}}\|g\|_{\frac{m}{\delta}} \\ &\leq c\|(a_0-g)\|_m + ct^{\frac{1-\delta}{2}}\|g\|_{\frac{m}{\delta}} \\ &\leq c\varepsilon + ct^{\frac{1-\delta}{2}}\|g\|_{\frac{m}{\delta}}. \end{aligned}$$

Cuando $t \longrightarrow 0$ y $\varepsilon \longrightarrow 0$, entonces $t^{\frac{1-\delta}{2}}\|e^{t\Delta}a_0\|_{\frac{m}{\delta}} \longrightarrow 0$, es decir, $K_0 \longrightarrow 0$. Lo que es equivalente a que T sea pequeño. Por lo tanto, podemos tomar T de tal manera que

$$K_0 \leq \frac{1}{4C},$$

es decir, tomamos T, tal que

$$\sup_{0\leq t<T} t^{\frac{1-\delta}{2}}\|u_0\|_{\frac{m}{\delta}} \leq \frac{1}{4C}.$$

De aquí que la serie $t^{\frac{1-\delta}{2}} \sum_{n\geq 0} w_n$ es convergente en $BC([0,T); PL^{\frac{m}{\delta}}(\mathbb{R}^m))$, lo que es equivalente a que $t^{\frac{1-\delta}{2}} u_n$ converja en $BC([0,T); PL^{\frac{m}{\delta}}(\mathbb{R}^m))$.

Luego, existe $t^{\frac{1-\delta}{2}} u \in BC([0,T); PL^{\frac{m}{\delta}}(\mathbb{R}^m))$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} t^{\frac{1-\delta}{2}} u_n = t^{\frac{1-\delta}{2}} u,$$

que es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u, \text{ si } t \neq 0.$$

Como $m < q$, entonces $\frac{m}{q} < 1$; luego podemos tomar $\delta = \frac{m}{q}$ en el análisis anterior para obtener que

$$t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)} u \in BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m)) \text{ para } \ m < q < \infty.$$

Si $q = m$, entonces en (54) se tiene

$$\begin{aligned} \|w_{n+1}\|_q &\leq 2c^2 K (2CK)^n \|a_0\|_m \int_0^t (t-s)^{-\frac{\delta}{2}} s^{-1+\frac{\delta}{2}} ds \\ &\leq 2c^2 K (2CK)^n \|a_0\|_m \beta\left(\frac{\delta}{2}, 1-\frac{\delta}{2}\right) \\ &\leq \widetilde{K}(2CK)^n \|a_0\|_m, \end{aligned}$$

donde $\widetilde{K} = 2c^2 K$. Recordando que $2CK < 1$, resulta que la serie $\sum_{n\geq 0} w_n$ es convergente en $BC([0,T); PL^m(\mathbb{R}^m))$, lo que es equivalente a que u_n converja en $BC([0,T); PL^m(\mathbb{R}^m))$. Luego, existe $u \in BC([0,T); PL^m(\mathbb{R}^m))$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u,$$

es decir, se ha encontrado

$$u \in BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m)) \text{ para } \ q = m.$$

Por lo tanto,

$$t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)} u \in BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m)) \text{ para } \ m \leq q < \infty. \tag{58}$$

Demostrando así (56).

Para mostrar la convergencia de $\left(t^{1-\frac{m}{2q}} \nabla(u_n)\right)_{n\geq 0}$, distinguimos también los casos: $m = q$ y $m < q < \infty$.

En el caso $q = m$, como $2CK < 1$, de la desigualdad (53) obtenemos que la serie

$$t^{\frac{1}{2}} \sum_{n\geq 0} \nabla(w_n)$$

es convergente en $BC([0,T); PL^m(\mathbb{R}^m))$, lo que es equivalente a que $t^{\frac{1}{2}} \nabla(u_n)$ converja en $BC([0,T); PL^m(\mathbb{R}^m))$. Luego, existe $t^{\frac{1}{2}} v \in BC([0,T); PL^m(\mathbb{R}^m))$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} t^{\frac{1}{2}} \nabla(u_n) = t^{\frac{1}{2}} v,$$

que es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} \nabla(u_n) = v, \text{ si } t \neq 0.$$

Para el caso $m < q < \infty$, en primer lugar vamos a realizar el cambio de variable $s = tz$, para simplificar la integral de la desigualdad (55) y obtener

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(2+\delta-\frac{m}{q})} s^{-1+\frac{\delta}{2}} ds \quad = \quad t^{-\frac{1}{2}\left(2-\frac{m}{q}\right)} \beta\left(-\frac{1}{2}\left(\delta-\frac{m}{q}\right), \frac{\delta}{2}\right).$$

Para que la función Beta esté bien definida, exigimos que $-\frac{1}{2}\left(\delta - \frac{m}{q}\right) > 0$, es decir, $\delta - \frac{m}{q} > 0$. Lo que es equivalente a que

$$q < \frac{m}{\delta},$$

así, cuando $\delta \longrightarrow 0$, entonces $q < \infty$. Reemplazando (59) en (55), se obtiene

$$\|\nabla w_{n+1}\|_q \leq 2c^2 K(2CK)^n \|a_0\|_m t^{-\frac{1}{2}\left(2-\frac{m}{q}\right)} \beta\left(-\frac{1}{2}\left(\delta-\frac{m}{q}\right), \frac{\delta}{2}\right),$$

y como $2CK < 1$, entonces la serie

$$t^{-\frac{1}{2}\left(2-\frac{m}{q}\right)} \sum_{n\geq 0} \nabla(w_n)$$

es convergente en $BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m))$, lo que implica que $t^{-\frac{1}{2}\left(2-\frac{m}{q}\right)} \nabla(u_n)$ converja en $BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m))$, con $m < q < \infty$ y $q < \frac{m}{\delta}$.

Luego, existe $t^{-\frac{1}{2}\left(2-\frac{m}{q}\right)} v \in BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m))$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} t^{-\frac{1}{2}\left(2-\frac{m}{q}\right)} \nabla(u_n) = t^{-\frac{1}{2}\left(2-\frac{m}{q}\right)} v,$$

que es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} \nabla(u_n) = v, \text{ si } t \neq 0.$$

Mostremos ahora que $\nabla u = v$, en efecto, sabemos que $\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = u$, esto implica que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \nabla(u_n) = \nabla u,$$

además, como

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \nabla(u_n) = v,$$

por la unicidad del límite, resulta que

$$\nabla u = v.$$

Así, hemos demostrado que

$$t^{-\frac{1}{2}\left(2-\frac{m}{q}\right)} \nabla u \in BC([0,T); PL^q(\mathbb{R}^m)) \quad \forall m \leq q < \infty. \tag{59}$$

Es decir, se ha demostrado (57).

Probemos ahora que u obtenido como límite de la sucesión $(u_n)_{n\geq 0}$ satisface (22). En efecto, tomando límite en

$$u_{n+1} = u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u_n \cdot \nabla) u_n ds,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} u_{n+1} &= u_0 - \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u_n\cdot\nabla)u_n ds\\ u &= u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)ds.\end{aligned}$$

donde se usó el hecho de que $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$ y $\nabla u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \nabla u$. Por lo tanto u satisface (22).

Finalmente mostremos la unicidad de u. Para ello supongamos que existen dos soluciones u, v con el mismo valor inicial, es decir, $u(0) = v(0) = a_0$, y calculemos

$$\begin{aligned}\|u-v\|_q &= \|G(u,u)-G(v,v)\|_q\\ &= \|G(u-v,u)+G(v,u-v)\|_q.\end{aligned}$$

Como $t^{1-\frac{m}{2q}}\nabla u$ y $t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}v$ pertenecen a $BC([0,T), PL^q(\mathbb{R}^m))$, para $m\le q$. Entonces existe $K>0$ tal que

$$t^{1-\frac{m}{2q}}\|\nabla u\|_m \le K, \quad \text{y} \quad t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}\|v\|_{\frac{m}{\delta}} \le K.$$

Luego, usando el mismo procedimiento, que se empleó para obtener (50) y (51), resulta que

$$\|u-v\|_q \le cK\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\delta-\frac{m}{q})}\left(s^{-\frac{1}{2}}\|u-v\|_{\frac{m}{\delta}} + s^{-\frac{1-\delta}{2}}\|\nabla(u-v)\|_m\right)ds, \tag{60}$$

$$\|\nabla(u-v)\|_q \le cK\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(2+\delta-\frac{m}{q})}\left(s^{-\frac{1}{2}}\|u-v\|_{\frac{m}{\delta}} + s^{-\frac{1-\delta}{2}}\|\nabla(u-v)\|_m\right)ds. \tag{61}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|u-v\|_q &\le cK\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\delta-\frac{m}{q})}s^{-1+\frac{\delta}{2}}\left(\sup_{0\le t<T} t^{\frac{(1-\delta)}{2}}\|u-v\|_{\frac{m}{\delta}} + \sup_{0\le t<T} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla(u-v)\|_m\right)ds\\ &\le cKt^{-\frac{1}{2}(1-\frac{m}{q})}\int_0^1 (1-z)^{-\frac{1}{2}(1+\delta-\frac{m}{q})}z^{-1+\frac{\delta}{2}}dz\left(\sup_{0\le t<T} t^{\frac{(1-\delta)}{2}}\|u-v\|_{\frac{m}{\delta}} + \right.\\ &\qquad \left.\sup_{0\le t<T} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla(u-v)\|_m\right).\end{aligned} \tag{62}$$

Con cálculos similares, obtenemos

$$\begin{aligned}\|\nabla(u-v)\|_q &\le cKt^{-1+\frac{m}{2q}}\int_0^1 (1-z)^{-\frac{1}{2}(2+\delta-\frac{m}{q})}z^{-1+\frac{\delta}{2}}dz\left(\sup_{0\le t<T} t^{\frac{(1-\delta)}{2}}\|u-v\|_{\frac{m}{\delta}} + \right.\\ &\qquad \left.\sup_{0\le t<T} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla(u-v)\|_m\right).\end{aligned} \tag{63}$$

Tomando $q=\frac{m}{\delta}$ en (62) y $q=m$ en (63) tenemos

$$\|u-v\|_{\frac{m}{\delta}} \le cKt^{-\frac{1}{2}}\beta\left(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}\right)\left(\sup_{0\le t<T} t^{\frac{(1-\delta)}{2}}\|u-v\|_{\frac{m}{\delta}} + \sup_{0\le t<T} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla(u-v)\|_m\right)$$

y

$$\|\nabla(u-v)\|_m \leq cKt^{-\frac{1}{2}}\beta\left(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\left(\sup_{0\leq t<T} t^{\frac{(1-\delta)}{2}}\|u-v\|_{\frac{m}{\delta}} + \sup_{0\leq t<T} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla(u-v)\|_m\right).$$

Poniendo

$$A = \sup_{0\leq t<T} t^{\frac{(1-\delta)}{2}}\|u-v\|_{\frac{m}{\delta}} \quad \text{y} \quad A' = \sup_{0\leq t<T} t^{\frac{1}{2}}\|\nabla(u-v)\|_m,$$

las desigualdades anteriores quedan

$$\begin{aligned} A &\leq cK\beta\left(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}\right)(A+A') \leq KC(A+A'), \\ A' &\leq cK\beta\left(\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}\right)(A+A') \leq KC(A+A'), \end{aligned}$$

donde C es como en (47). Sumando ambas desigualdades

$$A + A' \leq 2KC(A+A').$$

Como $2KC < 1$, entonces $A + A' = 0$. De donde $A = 0$ y $A' = 0$, reemplazando esto en (62) resulta que $u = v$, lo que demuestra la unicidad. Concluyendo así la demostración del teorema. □

En el teorema anterior demostramos la existencia y unicidad de soluciones débiles locales para las ecuaciones de Navier-Sokes cuando los datos iniciales son cualesquiera. Mas concretamente en ese teorema se mostró que existe solución débil local para cualquier $a_0 \in PL^m(\mathbb{R}^m)$.

3.7. Existencia global de soluciones fuertes

Esta sección será dedicada al estudio de las soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes cuando la condición inicial es pequeña.

Teorema 3.16 *Existe $\lambda > 0$ tal que si $\|a_0\|_m \leq \lambda$, entonces la solución obtenida en el Teorema 3.15 es global, es decir, podemos tomar $T = \infty$.*

Demostración. Al igual que en el Teorema 3.15 mostremos que $\left(t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_n(t)\right)_{n\geq 0}$ y $\left(t^{1-\frac{m}{2q}}\nabla u_n(t)\right)_{n\geq 0}$ convergen en $BC([0,T);PL^q(\mathbb{R}^m))$ y $BC([0,T);PL^q(\mathbb{R}^m))$ respectivamente.

Se distinguen también los casos: $m < q < \infty$ y $q = m$. De la desigualdad (52), obtenemos que la serie

$$t^{\frac{1-\delta}{2}}\sum_{n\geq 0} w_n$$

es convergente siempre y cuando $2CK < 1$. Como en el Teorema 3.15 esto implicaba que $K_0 < \frac{1}{4C}$, relacionemos ahora K_0 con λ. Recordando que

$$K_0 = \sup_{0\leq t\leq T} t^{\frac{1-\delta}{2}}\|e^{t\Delta}a_0\|_{\frac{m}{\delta}},$$

y usando las desigualdades obtenidas en el lema 3.6 obtenemos

$$\|e^{t\Delta}a_0\|_{\frac{m}{\delta}} \leq ct^{-\frac{(1-\delta)}{2}}\|a_0\|_m,$$

lo que equivale a

$$t^{\frac{1-\delta}{2}}\|e^{t\Delta}a_0\|_{\frac{m}{\delta}} \leq c\|a_0\|_m.$$

Tomando supremo sobre t resulta

$$\sup_{0\leq t\leq T} t^{\frac{1-\delta}{2}}\|e^{t\Delta}a_0\|_{\frac{m}{\delta}} \leq c\|a_0\|_m \leq c\lambda,$$

luego $c\lambda = \frac{1}{4C}$, entonces $\lambda = \frac{1}{4cC}$. Por lo tanto, podemos tomar $T = \infty$ si $\lambda = \frac{1}{4cC}$. Para λ de esa forma se cumple la convergencia de $\left(t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{q}\right)}u_n(t)\right)_{n\geq 0}$ y $\left(t^{1-\frac{m}{2q}}\nabla u_n(t)\right)_{n\geq 0}$. El resto de la demostración es como el Teorema 3.15. $\square$

4. Conclusión

Si se aplica un argumento de aproximaciones sucesivas en el estudio del problema de valor inicial para las ecuaciones de Navier-Stokes, obtenemos soluciones únicas pero su tiempo de existencia es muy "pequeño" y está relacionado con el tamaño del dato inicial. Para datos iniciales grandes es muy difícil prolongar el tiempo de existencia de este tipo de soluciones, por el contrario para datos iniciales pequeños el tiempo de existencia es global.

Agradecimientos

Muestro mis mas sinceros agradecimientos al Dr. Julio Valencia Guevara, quien con su conocimiento y su guía fue una pieza clave para que pudiera desarrollar cada etapa de este trabajo.

Referencias bibliográficas

[1] Boyer, F. and Fabrie, P. (2012). *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models.* New York, United States of America: Springer Science & Business Media.

[2] Brezis, H. (2010). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* New York, United States of America: Springer Science & Business Media.

[3] Chamorro, D. (2010). *Espacios de Lebesgue y de Lorentz.* Quito, Ecuador: Facultad de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional

[4] Chorin, A. J. and Marsden, J. E. (1992). *A mathematical introduction to fluid mechanics.* New York, United States of America: Springer.

[5] Fabes, E. B.; Jones, B. F. and Riviere, N. M. (1972). The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^p. *Archive for Rational Mechanics and Analysis, 45*(3), 222-240.

[6] Folland, G. B. (1999). *Real analysis: modern techniques and their applications.* New York, United States of America: John Wiley & Sons.

[7] Fujita, H. and Kato, T. (1964). On the Navier-Stokes initial value problem I. *Archive for rational mechanics and analysis, 16*(4), 269-315.

[8] Giga, Y. (1983). Weak and strong solutions of the Navier-Stokes initial value problem. *Publicationsof the Research Institute for Mathematical Sciences, 19*(3), 887-910.

[9] Giga, Y. (1986). Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system. *Journal of differential equations, 62*(2), 186-212.

[10] Gonzales, M. y Bohorquez, M. (2017). La función Gamma: propiedades básicas y algunas aplicaciones. *Selecciones Matemáticas, 4*(2), 177-191.

[11] Kato, T. (1984). Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. *Mathematische Zeitschrift, 187*(4), 471-480.

[12] Kato, T. and Fujita, H. (1962). On the nonstationary Navier-Stokes system. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 32*, 243-260.

[13] Kreiss, Heinz-Otto and Lorenz, J. (1989). *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations.* United States of America: Academic Press, INC.

[14] Ladyzhenskaya, O. A. (1969). *The mathematical theory of viscous incompressible flow* (Vol. 2). New York, United States of America: Gordon and Breach.

[15] Leray, J. (1934). Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta mathematica, 63*(1), 193-248.

[16] Longen, L. G. (2016). Boa-colocação e soluções assintoticamente autossimilares para as equações de Navier-Stokes em espaços de Herz fracos (Tese de Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

[17] Melo, Severino Toscano; Neto, F. Moura. (1991). *Mecânica dos fluidos e equaçoes diferenciais.* Río de Janeiro, Brasil: IMPA.

[18] Miyakawa, T. (1981). On the initial value problem for the Navier-Stokes equations in L^p spaces. *Hiroshima Mathematical Journal, 11*(1), 9-20.

[19] Stein, E. M. (2016). *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions* (PMS-30). New Jersey, United States of America: Princeton university press.

[20] Teman, R. and Miranville, A. (2000)*Mathematical modeling in continuum mechanics.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

[21] Weissler, F. B. (1980) The Navier-Stokes initial value problem in L^p. *Archive for Rational-Mechanics and Analysis, 74*(3), 219-230.

[22] Clay Mathematics Institute. (2019) http://www.claymath.org/millennium-problems.