PESQUIMAT 22(1): 69–78 (2019) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
http://doi.org/10.15381/pes.v22i1.16128 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Hiperespacios de continuos: historia, avances y nuevos retos

William César Olano Diaz [1] ***y Javier Sánchez Martínez*** [2]

Resumen: En este trabajo se expone de manera general la historia del estudio de los hiperespacios de continuos, algunos resultados importantes obtenidos de manera reciente y se mencionan algunas preguntas abiertas.

Palabras clave: Continuo; hiperespacio; métrica de Hausdorff; Topología de Vietoris.

Hyperspace of continua: history, advances and challenges

Abstract: In this paper we present a brief history of the development of hyperspace of continua, some recent advances and open problems.

Keywords: Continuum; hyperspace; Hausdorff metric; Vietoris topology.

Recibido: 20/12/2018. *Aceptado*: 12/04/2019. *Publicado online*: 13/05/2019.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: wolanod@unmsm.edu.pe
[2]UNACH, Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas, e-mail: jsanchezm@unach.mx

1. Introducción

La motivación del presente trabajo así como su estructura general se basa en lo realizado por Sergio Maías en [17]. Es bien sabido que la topología, de manera muy general es la rama de las matemáticas dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas. Se suele fechar el origen de la topología con la resolución por parte de Euler del problema de los puentes de Konigsberg, en 1735. Ciertamente, la resolución de Euler del problema utiliza una forma de pensar totalmente topológica, y la solución del problema nos lleva a la característica de Euler, el primer invariante de la topología algebraica, pero sería muy arriesgado y arbitrario fechar en ese momento la aparición de la topología. Lo que es cierto, es que en los últimos 150 años, esta rama de las matemáticas se ha desarrollado de forma vertiginosa en un sin número de líneas de investigación, una de éstas está encaminada al estudio de la topología de familias de subespacios de un espacio topológico arbitrario X, familias a las que llamaremos hiperespacios. El presente escrito, está dedicado a presentar un panorama general del estudio histórico y sistemático de la teoría de hiperespacios de continuos, analizando algunos puntos clave de este desarrollo y dejando al lector la presentación de algunos problemas abiertos.

2. Hiperespacios de Continuos

En la Topología General, dado un espacio topológico X, existen muchas maneras de contruir un nuevo espacio $K(X)$, por ejemplo: el primer grupo fundamental de X, el espacio de funciones $\{f : X \to X : f \text{ es continua}\}$, cocientes del tipo X/A donde A es un subespacio de X o bien el conjunto potencia de X, este último denotado por $P(X)$. Consideremos un subconjunto particular de $P(X)$, el cual denotaremos de la siguiente manera

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y no vacío}\}.$$

La primera pregunta que surge es, si X es un espacio topológico, cuál es la mejor topología que se le puede dotar a 2^X, en el sentido de que las propiedades topológicas de X sean heredadas para 2^X y viceversa. Esta interrogante fue trabajada por L. Vietoris en [28], en donde construye una base para la topología conocica hoy como la Topología de Vietoris, de la siguiente manera: dada una familia de subconjuntos no vacíos de X, $U_1, \cdots, U_n$ denotaremos por $\langle U_1, \cdots, U_n\rangle$ al conjunto

$$\{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \cdots, n\}\},$$

la base para la Topología de Vietoris, está dada por la familia de conjuntos de la forma $\langle U_1, \cdots, U_n\rangle$, donde cada uno de los conjuntos U_i es abierto y no vacío y n es un número natural, a estos elementos básicos se les conoce como *vietóricos*. En el artículo antes mencionado [28], se muestra si 2^X se considera con la topología de Vietoris se cumple lo siguiente:

1. X es compacto si y sólo si 2^X es compacto,
2. si X es regular entonces 2^X es un espacio de Hausdorff,
3. si X es T_1 y 2^X es de Hausdorff entonces X es regular,
4. si X es numerable y discreto, entonces 2^X no es metrizable.

Existen multiples topologías que se le pueden dotar al conjunto 2^X, E. Michael en [18], expone un listado de varias de ellas, mostrando las relaciones entre la estructura del espacio topológico X y el espacio 2^X con cada una de estas topologías.

En 1927, F. Hausdorff publica un libro [11], en donde establece los primeros pasos para definir una distancia en el conjunto 2^X, en el caso de que el espacio topológico X es métrico y compacto. La construcción de esta distancia es como sigue:

Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Para cada $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, denotarmos por $B_\varepsilon(x)$ al conjunto

$$\{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Si ahora $A \in 2^X$, llamaremos *nube de radio ε alrededor de A*, y la denotarmos por $N(\varepsilon, A)$ al siguiente conjunto

$$\{y \in X : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Es claro que $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$.

Debido a que X es acotado al ser compacto, usando el axioma del supremo de los números reales, se cumple que si $A, B \in 2^X$ entonces existe el número real

$$\text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$$

al que denotaremos por $H(A, B)$.

De la definición, podemos notar que $H(A, B) \geq 0$ además de que $H(A, B) = H(B, A)$, para cualesquiera par de elementos A y B en 2^X. Además de estas dos propiedades evidentes, resulta que H defiene una métrica en 2^X (ver [11]), esta manera de medir distancias entre conjuntos fue uno de los primeros intentos en para definir métricas en subconjuntos del conjunto potencia y hoy es conocida como *métrica de Hausdorff*.

Si se extendiera esta manera de medir distancias entre conjuntos para cualesquiera subconjuntos de X, podemos observar la distancia entre un subconjunto A de X y su cerradura $\overline{A}$, $H(A, \overline{A})$, sería cero, así que H no es una métrica si no se restringe a 2^X. Esto último hace ver la importancia de restringirnos al estudio de subconjuntos del conjunto potencia formados por subconjuntos cerrados de X.

Así que, en el caso de que X es un espacio métrico compacto, al conjunto 2^X se le pueden dotar de dos topologías, a saber, la topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff, sin embargo F. Hausdorff en [11] muestra que ambas topologías coinciden, lo cual hace posible estudiar a 2^X y sus subespacios como espacios métricos o bien con una estructura topológica usando como base a los conjuntos vietóricos. De aquí en adelante supondremos que 2^X está dotado con la métrica de Hausdorff.

Definición 2.1 *Dado un espacio métrico compacto X, llamaremos hiperespacio de X a cualquier subconjunto no vacío de 2^X dotado con la topología de subespacio.*

De manera histórica el estudio de los hiperespacios se remonta a la década de 1920, en donde se desarrolla sistemáticamente el siguiente problema: dada una familia de espacios topológicos P, y $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de X, cuál es la relación entre las condiciones:

- $X \in P$
- $\mathcal{H}(X) \in P$

Entre los hiperespacios más estudiados, se encuentran los siguientes:

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

y si $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$
$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

De la definición de estos hiperespacios se puede ver que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_1(X) \subset F_n(X)$, $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$, $C(X) = C_1(X)$ y $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$.

Una de las primeras preguntas fue determinar la conexidad de estos hiperespacios, esto derivó en estudiar hiperespacios de espacios métricos, compactos y conexos. Así que de ahora en adelante nos restrigiremos a esta clase de espacios.

Definición 2.2 *Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto.*

Para un continuo X, a los elementos de $C(X)$ les llamaremos *subcontinuos* y al hiperespacio $F_n(X)$ el *n-ésimo producto simétrico de X.*

Hablando de productos simétricos, se sabe que $F_2(S^1)$ es homeomorfo a una banda de Moebius (véase pág. 877, [1]) y $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3 (véase [2]), donde S^n denota la esfera unitaria de dimensión n. Los productos simétricos fueron introducidos por K. Borsuk y S. Ulam en [1]. Ellos probaron que, para $I = [0, 1]$ y $n = 1, 2, 3$, $F_n(I)$ es homeomorfo a I^n y para $n \geq 4$, $F_n(I)$ no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^n$. En [19] R. Molski prueba que $F_2(I^2)$ es homeomorfo a la 4-celda y para $n \geq 3$, tanto $F_n(I^2)$ como $F_2(I^n)$ no son homeomorfos a algún subconjunto de $\mathbb{R}^{2n}$. Y en [4] E. Castañeda muestra que si X es un n-odo simple, $F_2(X)$ es el cono sobre un continuo Z definido como la unión de una gráfica completa K_n con n arcos ajenos por pares que intersectan a K_n en exactamente uno de sus vértices.

Para cada continuo X y cada número natural n, se puede considerar a la función $f_n : X^n \to F_n(X)$ dada por $f_n(x_1, \cdots, x_n) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. En [1], los autores muestran que f_n es una función continua y suprayectiva, con esto se puede deducir fácilmente el siguiente resultado (recordemos que la compacidad y conexidad son propiedades que se preservan bajo funciones continuas).

Teorema 2.3 *Si X es un continuo, entonces $F_n(X)$ es un continuo.*

Dado que $F_1(X) \subset F_2(X) \subset \cdots F_n(X) \subset F_{n+1}(X) \subset \cdots$, usando el resultado anterior, podemos afirmar que para cualquier continuo X, el conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X) = F(X),$$

es un conjunto conexo. Por otro lado, si $A \in 2^X$, entonces A es compacto y por tanto para cada $\varepsilon > 0$ existe una cantidad finita de puntos $\{a_1, \cdots, a_m\} \subset A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(a_i),$$

lo cual implica de la definición de métrica de Hausdorff que $H(A, \{a_1, \cdots, a_m\}) < \varepsilon$. Esto último muestra que $F(X)$ es un conjunto denso dentro de 2^X, y al ser conexo, implica que 2^X es un conjunto conexo. Por tanto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.4 *Si X es un continuo, entonces 2^X es un continuo.*

Existen varias maneras de mostrar que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son continuos, una de estas, es usando el resultado mostrado por J. L. Kelley en [16] en donde muestra que para cualquier continuo X, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son imágenes continuas del Abanico de Cantor, éste último continuo se construye considerando el espacio cociente $C \times [0,1]/C \times \{0\}$, donde C es el conjunto de Cantor en $[0,1]$. Por otra parte, la prueba de que $C_n(X)$ es un continuo usa otras técnicas como lo son los arcos ordenados.

Definición 2.5 *Sean $A, B \in 2^X$. Un arco ordenado entre A y B es una función continua $\alpha : [0,1] \to 2^X$ de tal manera que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y si $t < s$ entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.*

En [23, (1.8)-(1.11)], se muestra por ejemplo que si $A, B \in C(X)$ y $A \subsetneq B$, existe un arco ordenado entre A y B, α, de tal manera que $\alpha([0,1]) \subset C(X)$. De manera general, en [23, (1.8)] se muestra que si $C, D \in C(X)$, basta pedir que $C \subsetneq D$ y que C intersecte a cada componente de D, para que exista un arco ordenado entre A y B. De manera particular, para cada punto x en un continuo X, existe un arco ordenado $\alpha_x : [0,1] \to C(X)$ entre $\{x\}$ y X, razón por la cual se puede imaginar al hiperespacio $C(X)$ como el cono sobre $F_1(X)$ con vértice X, con esto en mente S. B. Nadler en [21], estudia aquellos continuos cuyo hiperespacio $C(X)$ es homeomorfo al cono sobre $F_1(X)$, encontrando que en la clase de los continuos hereditariamente descomponiles, existen únicamente ocho continuos con esta propiedad.

Definición 2.6 *Un continuo X es llamado descomponible si existen $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $X = A \cup B$. Será llamado indescomponible si no es descomponible. Se dice que X es hereditariamente descomponible (indescomponible) si cada elemento $A \in C(X) - F_1(X)$ es descomponible (indescomponible).*

El primer continuo indescomponible fue construido por L. E. Brouwer en 1910, con el fin de mostrar un contraejemplo a la conjetura de A. Shoenflies la cual aseguraba que la frontera de dos abiertos, conexos y disjuntos en $\mathbb{R}^2$ es la unión de dos subconjuntos cerrados y conexos. Z. Janiszewski en la década de 1920, describe mejor el ejemplo de Brouwer además de que estudia la propiedad de ser indescomponible usando el concepto de irreducibilidad en continuos. En 1917, K. Yoneyama describe los *Lagos de Wada* (en honor al profesor Takeo Wada, quien los describe primero según Yoneyama), este espacio está formado por la unión de tres abiertos conexos disjuntos en el plano con una frontera común entre los tres, dicha frontera resultó ser un continuo indescomponible. S. Mazurkiewicz es el primero en usar la palabra indescomponible en continuos. En 1920, B. Knaster construye al *pseudo-arco*, el primer ejemplo de un continuo hereditariamente indescomponible.

Una ventaja de los continuos hereditariamente indescomponibles es que para cada uno de sus puntos $x \in X$, existe un único arco ordenado $\alpha_x : [0,1] \to C(X)$ entre $\{x\}$ y X, en el sentido de que si $\alpha, \beta : [0,1] \to C(X)$ son dos arcos ordenados entre $\{x\}$ y X, entonces $\alpha([0,1]) = \beta([0,1])$. De manera más reciente, P. Pellicer muestra en [24], que un continuo X es hereditariamente indescomponible si y sólo si para cada $x \in X$, la familia $\{A \in C(X) : x \in A\}$ es homeomorfo a $[0,1]$.

Regresando al problema estudiado por S. B. Nadler en [21] en donde estudia la relación entre el hiperespacio $C(X)$ y el cono sobre $F_1(X)$, en 1972 Rogers define la siguiente clase de continuos.

Definición 2.7 *Un continuo X tiene la propiedad cono=hiperespacio si existe un homeomorfismo $f : C(X) \to cono(X)$ tal que $f(\{x\}) = (x, 0)$ y $f(X) = v$, donde $cono(X)$ es es cono sobre X con vértice v.*

Rogers muestra que si un continuo X tiene la propiedad cono=hiperespacio, entonces el continuo es homeomorfo a $[0, 1]$, S^1 o es indescomponible y sus subcontinuos propios y no degenerados son homeomorfos a $[0, 1]$, sin embargo no existe una caracterización completa de los continuos con la propiedad cono=hiperespacio.

Un los últimos años se ha debelitado la Definición 2.7, intercambiando la palabra homeomorfismo por encaje, los espacios que cumplen con esta nueva definición se les llama *cono encajables*. De nueva cuenta, no existe una caraterización completa de los continuos cono encajables, sin embargo se ha avanzado en algunas clases de continuos como lo muestran los artículos publicados por H. Villanueva [29], [30] y [31].

3. Modelos geométricos de hiperespacios

Visualizar la forma que tienen los hiperespacios de un continuo resulta útil pero en ocaciones es complicado hacerlo. Esto se puede precisar de la siguiente manera, un *modelo geométrico de un hiperespacio* $\mathcal{H}(X)$ es un espacio topológico Z homeomorfo a $\mathcal{H}(X)$, en donde los elementos de Z sean representados por puntos y no por subconjuntos como lo es en $\mathcal{H}(X)$. Solo por poner un ejemplo, observemos que $C([0, 1]) = \{[a, b] : a \leq b\}$, por tanto es posible definir de manera natural la función $f : C([0, 1]) \to \mathbb{R}^2$ dada por $f([a, b]) = (a, b)$, misma que restringida al conjunto $Z = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \leq b\}$ es una biyección, no precisaremos más, pero resulta que la función es continua y al ser $C([0, 1])$ un espacio compacto, f es un homeomorfismo, por tanto Z es un modelo geométrico de $C([0, 1])$, no es dificil ver que Z es la región delimitada por un triángulo en $\mathbb{R}^2$. En [15] A. Illanes muestra una lista de los modelos geométricos de todos los hiperespacio conocidos al momento, por ejemplo, se sabe que si X es un continuo localmente conexo entonces 2^X es homeomorfo al producto numerable de intervalos $[0, 1]$ (cubo de Hilbert), que $C(S^1)$ es una 2-celda, $C([0, 1]^2)$ es homeomorfo a un cubo de Hilbert. Encontrar modelos para hiperespacio es un trabajo por lo general complicado, por ejemplo Borsuk en 1949 afirmó en un artículo que $F_3(S^1)$ era homeomorfo a $S^1 \times S^2$, tiempo después R. Bott en [2] corrige a Borsuk y muestra que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3. De manera relativamente cerca, en 2010, se muestró en [6] que $F_3(S^1)$ es homeomorfo a S^3 usando la Conjetura de Poincaré, resultado que ya es teorema por los resultados de G. Perelman de 2006. Otro ejemplo de la dificultad de encontrar modelos geométricos de hiperespacios ocurrió cuando A. Illanes en [15] afirmó que tenía un modelo geométrico para $F_3(T)$, donde T es un continuo obtenido al pegar tres arcos por un único punto, este ejemplo fue corregido de manera muy reciente en 2018 en [5], mostrando que $F_3(T)$ tiene como modelo geométrico al cono sobre una botella de Klein unida con cuatro discos.

4. Nuevos hiperespacios

La tendencia al estudio de los hiperespacios ha variado un poco en los últimos diez años, ha surgido una nueva línea de investigación que es la del estudio de cocientes entre hiperespacios. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, con $m < n$, se puede considerar al espacio $SF^n_m(X)$ definido como el espacio cociente $F_n(X)/F_m(X)$ obtenido al identificar $F_m(X)$ a un punto en $F_n(X)$, con la correspondiente topología cociente. No es difícil mostrar que $SF^n_m(X)$ es un continuo, la razón de esto se sigue del resultado mostrado en [23, Teorema 3.10, p. 40]. A la par de este espacio cociente, pueden también estudiarse los cocientes $C(X)/F_1(X)$, $C_n(X)/F_n(X)$, $C_n(X)/C_m(X)$.

Aparte de los cocientes en hiperespacios, en 2016 R. Escobedo, V. Sánchez y J. Sánchez, inician con el estudio del hiperespacio $\{C(A) : A \in C(X)\}$ (véase [8]), dado que $C(A)$ es un subcontinuo de $C(X)$, a este hiperespacio se le puede dotar de la topología como subespacio de $C(C(X))$ y se le denota por $\mathfrak{C}(X)$. En el mismo sentido se puede considerar al hiperespacio de $C(2^X)$ formado por $\{2^A : A \in C(X)\}$, este hiperespacio no se ha estudiado nunca.

Se pueden definir estructuras de hiperespacios con más propiedades que la conexidad o compacidad, o cocientes de estos como en el párrafo anterior, por ejemplo en 2017 R. Escobedo, C. Estrada y J. Sánchez [9], estudian hiperespacios de continuos formados por conjuntos que no separan al espacio, es decir, de conjuntos de complemento conexo, obteniendo varias clasificaciones de continuos en términos de las propiedades topológicas de estos hiperespacios. Los hiperespacios descritos en [9], se encuentran dentro del hiperespacio de subespacios cerrados de interior vacío dentro de un continuo, llamados conjuntos *magros*, y cuyo hiperespacio también ha sido estudiado ampliamente. Otro hiperespacio que ha entrado en función en tiempos recientes es el de la sucesiones convergentes dentro de un continuo (se ha estudiado más ampliamente en espacios Hausdorff-compactos) así como el hiperespacio de arcos dentro de un continuo, en el cual se puede definir de manera natural una función punto medio y puntos extremos. Notará el lector que existen un sin número de formas de definir un hiperespacio dentro de un continuo, y que el trabajo dentro de esta área es extenso, prometedor por donde se mire.

Otra rama dentro del estudio de los hiperspacios es la iniciada por H. Hosokawa en 1989 [12] en donde analiza el siguiente problema: sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y sean $\mathcal{H}(X), \mathcal{H}(Y)$ dos hiperespacios para X y Y, respectivamente, tales que si $A \in \mathcal{H}(X)$ entonces $f(A) \in \mathcal{H}(Y)$, esto define una función *inducida* $\mathcal{H}(f) : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(Y)$ dada por $\mathcal{H}(f)(A) = f(A)$ para cada $A \in \mathcal{H}(X)$; ahora dada una clase de funciones continuas $\mathcal{M}$, la pregunta general es cúal es la relación entre las siguientes dos condiciones:

1. $f \in \mathcal{M}$
2. $\mathcal{H}(f) \in \mathcal{M}$

Entre las funciones inducidas más estudiadas están 2^f, $C(f)$, $C_n(f)$ y $F_n(f)$, para una lista muy larga de clases de funciones continuas: monótonas, abiertas, confluentes, débilmente confluentes, ligeras, de ligadura, mezcladoras, etc.

Finalmente, la tendencia al estudio de hiperespacios y sus funciones inducidas, ha llevado a la construcción de otros nuevos espacios, por ejemplo si $\mathcal{H}(X)$ es un hiperespacio y $p \in X$, se puede estudiar el hiperespacio $\mathcal{H}(p, X) = \{A \in \mathcal{H}(X) : p \in X\}$, así como las funciones inducidas de la forma $\mathcal{H}(p, f)$ como restricción de $\mathcal{H}(f)$ a $\mathcal{H}(p, X)$. Existe una gran cantidad de preguntas abiertas al respecto. Los artículos más recientes en esta dirección se encuentran en [24]-[27].

5. Aplicaciones de los hiperespacios

Dado un continuo X y un hiperespacio $\mathcal{H}(X)$ de él, una función $f : X \to \mathcal{H}(X)$ se llama *función conjunto-valuada*, bajo ciertas condiciones sobre la función f (continuidad y semicontinuidad), se definen los límites de sucesiones inversas como puntos en el producto númerable de X, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con la condición de que $x_n \in f(x_{n+1})$, con la topología producto. En este caso f se llama *función de ligadura*. Los límites inversos de sucesiones inversas con una única función de ligadura semicontinua superiormente (límites inversos generalizados) se introdujeron en

2004 por W. S. Mahavier como límites inversos con subconjuntos cerrados del cuadrado unitario y más tarde en 2006 en por Mahavier y W. T. Ingram. Desde entonces, se ha puesto gran éfasis en los límites inversos generalizados sobre intervalos cerrados con funciones de ligadura semicontinas superiormente (abreviado u.s.c.), porque incluso en ese caso simple, con una sola función u.s.c., hay mucho que no se ha entendido, y muchos tipos de nuevos espacios interesantes han surgido como estos límites inversos, dando a los investigadores mucho para investigar. Sorprendentemente, aunque muchos espacios nuevos e interesantes han surgido, también se ha demostrado que muchos tipos de espacios no pueden ocurrir. Esta nueva forma de límite inverso también se ha presentado en aplicaciones a la economía y en sistemas dinámicos. Por ejemplo, ciertos modelos en economía, sobre todo en modelos en economicos no recientes, usan como base dos asignaciones continuas respecto al tiempo y la flexibilidad para estudiar los efectos de usar cualquiera de las funciones en cada etapa del modelo son valiosas características de los límites inversos generalizados (véase por ejemplo [10]). En cierto sentido los límites inversos se vuelven un mecanismo que estima datos en el presente suponiendo que se conoce lo que sucederá en el futuro.

Las principales aplicaciones de la teoría de hiperespacios tienen que ver con la caracterización de estructuras topológicas a traves de estas familias de conjuntos. Existen como ejemplo una cantidad enorme de resultados sobre caracterizaciones del arco, curvas cerradas simples, gráficas finitas, dendritas, dendroides, etc. en términos de las propiedades topológicas de sus hiperespacios.

6. Conclusiones

Si bien la Teoría de Hiperespacios surge en la segúnda década del siglo pasado con los trabajos de L. Vietoris y F. Hausdorff y es la escuela polaca la responsable de su avance en sus inicios, esta área de la topología se ha desarrollado en varios paises destacando Polonia, República Checa, Estados Unidos, Japón y México. Podemos mencionar dos parteaguas en su desarrollo, el primer momento llega con el trabajo de tesis doctoral de J. L. Kelley en 1942, pues Kelley le dio una estructura sistemática a los resultados ya existentes hasta ese momento, además, introdujo una variedad de tópicos y nuevos resultados en esta teoría, ascómo herramientas para el desarrollo de esta área, fue el primer tratado con estas características, el segundo momento llega con el trabajo de S. B. Nadler Jr. con su libro [22] donde Nadler plasmó todo lo conocido hasta el momento, tiempo después se completa este libro con A. Illanes publicando el libro más completo sobre el tema en 1999, [13]. Hablando de uno de los autores de éste último libro, el Dr. Alejandro Illanes Mejía, debemos mencionar que es gracias a su escuela que la Teoría de Continuos y su Hiperespacios se ha desarrollado en México como hasta ahora, su visión de tener un fuerte grupo de investigación que pueda competir con los formados en otros paises ha llevado a la preparació de un sin número de profesionistas dedicados exclusivamente a la teoría de continuos.

Otros paises de América Latína donde se ha iniciado el estudio en ésta línea de investigación son Colombia y de manera muy reciente en Perú en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Sirva este escrito como una pequeña motivación para que futuras generaciones de estudiantes y profesores se interesen en este tópico. Como se puede observar existen muchas preguntas y problemas abiertos en el ámbito de la teoría de los continuos y de sus hiperespacios.

7. Agradecimientos

El segundo autor agradece a la SEP por el apoyo dado para la asistencia al Primer Congreso Internacional de Topología y Afines, mediante el proyecto Apoyo a la incorporación de Nuevos PTC SEP/23-005/196387. Agradece también a la comunidad de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UNMSM por su hospitalidad y en particular a los Profesores Adrian G. Aliaga y William César Olano por su amistad y consideraciones.

Los autores agradecen a los referees, sus comentarios ayudaron a mejorar considerablemente el escrito.

Referencias bibliográficas

[1] Borsuk, K. y Ulam, S. (1931). On symmetric products of topological spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society, 37*, 875-882.

[2] Bott, R. (1952). On the third symmetric product potency of S^1. *Fundamenta Mathematicae, 39*, 364-368.

[3] Castañeda, E. (2002). Embedding symmetric products in Euclidean spaces. In *Continuum Theory* (pp. 82-95). New York, United States of America: CRC Press.

[4] Castañeda, E. (2004). Symmetric products as cones and products. *Topology Proceedings, 28*, 55-67.

[5] Corona, F., Quiñones, R., Sánchez, J. y Villanueva, H. (2018). Embedding products into symmetric products of finite graphs. *Topology and its Applications, 241*, 162-171.

[6] Chinen, N. y Koyama, A. (2010). On the symmetric hyperspace of the circle. *Topology and its Applications, 157*(17), 2613-2621.

[7] Dugundji, J. (1966), *Topology.* Boston, United State of America: Allyn and Bacon, Inc.

[8] Escobedo, R., Sánchez, V. and Sánchez, J. (2016). On the hyperspace $\mathfrak{C}(X)$ of continua. *Tzukuba Journal of Mathematics, 40*(2), 187-201.

[9] Escobedo, R., Estrada, C. and Sánchez, J. (2017). On hyperspces of non cut sets of continua. *Topology and its Applications, 217*, 97-106.

[10] Erseg, G. (2016). Generalized inverse limits and topological entropy (Thesis Doctoral). University of Zagreb, Croacia .

[11] Haudorff, F. (1927). *Mengenlehre.* Berlin, Alemania: Springer.

[12] Hosokawa, H. (1989). Induced mappings between hyperspaces. *Bulletin Tokio Gakugei University, 41*, 1-6.

[13] Illanes, A. y Nadler, S. (1999). *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances.* New York, United State of America: CRC Press.

[14] Illanes, A. (2004). *Hiperespacios de Continuos.* Serie de Aportaciones Matemáticas No. 28. México D.F, México: Sociedad de Matemática Mexicana.

[15] Illanes, A. (2013). Models of hyperspaces.*Topology Proceedings*, *41*, 39-64.

[16] Kelley, J. L. (1942). Hyperspaces of a continuum. *Transactions of the American Mathematical Society, 52*, 12-21.

[17] Macías, S. (2005). Un breve panorama de los hiperespacios de continuos. *Revista integración, 30* (2), 1-13.

[18] Michael, E. (1951). Topologies on spaces of subsets.*Transactions of the American Mathematical Society*, *71*, 152-182.

[19] Molski, R. (1957). On symmetric products.*Fundamenta Mathematicae*, *44*, 165 - 170.

[20] Munkres, J. M. (2002), *Topología.* 2^a *edición.* Madrid, España: Prentice Hall.

[21] Nadler, Jr. S. B. (1977). Continua whose cone and hyperspace are homeomorphics. *Transactions of the American Mathematical Society*, *230*, 321-345.

[22] Nadler, S. B. (1978). *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics)*. New York, United State of America: Marcel Dekker.

[23] Nadler, Jr. S.B. (1992), *Continuum Theory, An Introduction.* New York, United State of America: Marcel Dekker.

[24] Pellicer, P. (2003). The hyperspaces C(p,X). *Topology Proceedings, 27*, 259-285.

[25] Pellicer, P. (2005). The hyperspaces $K(X)$, *Rocky Mountain Journal of Mathematics, 35*(2), 655-674.

[26] Pellicer, P. (2005). The hyperspaces $C(p, X)$ for atriodic continua. *Houston Journal of Mathematics, 31*(2), 403-426.

[27] Pellicer, P. (2007), Cells in hyperspaces, *Topology and its Applications, 154*, 1002-1007.

[28] Vietoris, L. (1923). Bereiche Zweiter Ordnung. *Monatshefte für Mathematik und Physik, 33*, 49-62.

[29] Villanueva, H. (2013). Embedding cones in hyperspaces. *Topology and Applications, 160*, 296-304.

[30] Villanueva, H. (2015). Compatifications whose cone can be embedded into their hyperspace of subcontinua. *Topology and its Applications, 187*, 97-155.

[31] Villanueva, H. (2016). Embedding cones over arc-smoothcontinua into their hyperspace of subcontinua. *Topology and its Applications, 197*, 28-49.