

Velocidad de convergencia de un algoritmo de punto proximal escalarizado inexacto para minimización multiobjetivo cuasi-convexa en espacios Euclidianos

*Erik Papa Quiroz*¹ y *Segundo Cruzado Acuña*²

Resumen: En este artículo presentamos un análisis sobre la tasa de convergencia de un algoritmo de punto proximal escalarizado inexacto para resolver problemas irrestrictos de minimización multiobjetivo cuasi-convexas definidos en espacios Euclidianos, donde las funciones vectoriales son localmente Lipschitz. Bajo algunas hipótesis naturales, probamos que la sucesión generada por el algoritmo converge lineal y superlinealmente hacia un punto crítico Pareto-Clarke del problema.

Palabras clave: método de Punto proximal; función Cuasi-convexa; optimización multiobjetivo.

Convergence speed of a inexact scalar proximal point algorithm for multiobjective quasiconvex minimization in Euclidean spaces

Abstract: In this paper we present a rate of convergence analysis of an inexact proximal point algorithm to solve unconstrained quasiconvex multiobjective minimization problems defined in Euclidean spaces, where the vector functions are locally Lipschitz. Under some natural assumptions, we prove that the sequence generated by the algorithm converges linearly and superlinearly to a critical Pareto-Clarke point of the problem.

Keywords: proximal Point Method; quasiconvex function; multiobjective optimization.

Recibido: 20/12/2018. *Aceptado:* 02/03/2019. *Publicado online:* 26/12/2019.

¹UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: epapaq@unmsm.edu.pe

²UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: scruzadoa@gmail.com

1. Introducción

Con el objetivo resolver el siguiente problema irrestricto de minimización multiobjetivo cuasi-convexa, definido en espacios Euclidianos

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = \min\{F(x), x \in \mathbb{R}^n\}, \quad (1)$$

donde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, con $F(x) = (F_1(x), \dots, F_p(x))$, $p \geq 2$, Papa Quiroz y Cruzado (2018) recientemente propusieron el Método de Punto Proximal Escalarizado Inexacto (MPPEI), el cuál presenta el siguiente proceso iterativo: dado un $x^k \in \mathbb{R}^n$, con $k = 0, 1, 2, \dots$, encontrar un $x^{k+1} \in \Omega_k$, tal que:

$$e^{k+1} \in \partial^0 \left(\langle F(\cdot), z_k \rangle + \frac{\alpha_k}{2} \|\cdot - x^k\|^2 \right) (x^{k+1}) + \mathcal{N}_{\Omega_k}(x^{k+1}), \quad (2)$$

donde ∂^0 es el subdiferencial de Clarke, $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \preceq^1 F(x^k)\} \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha_k > 0$, $\{z_k\} \subset \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\} = \{y \in \mathbb{R}^p : y_i \geq 0; i = 1, \dots, p; y \neq 0\}$, $\|z_k\| = 1$ y

$N_{\Omega_k}(x^{k+1}) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle d, x - x^{k+1} \rangle \leq 0, \forall x \in \Omega_k\}$ es el cono normal a Ω_k en x^{k+1} . Los autores asumiendo la siguiente condición (utilizada por Tang y Huang (2013)) para el error de aproximación e^{k+1} :

$$\frac{\|e^{k+1}\|}{\alpha_k} \leq \eta_k \|x^{k+1} - x^k\|, \text{ donde } \sum_{k=0}^{+\infty} \eta_k^2 < +\infty,$$

obtuvieron una nueva versión del mismo, a la que llamaron MPPEI2. Bajo algunas condiciones adicionales, dichos autores establecieron que la sucesión $\{x^k\}$ generada por el MPPEI2 está bien definida, y asumiendo que el parámetro α_k se encuentra acotado, probaron que la sucesión $\{x^k\}$ converge hacia algún punto punto crítico Pareto-Clarke del problema (1). Asumiendo también la convexidad de cada una de las componentes de F , probaron que cualquier punto de convergencia de la sucesión $\{x^k\}$, es una solución débil de Pareto de (1).

Los resultados anteriormente mencionados, desde el punto de vista teórico son muy importantes, sin embargo aún pueden ser mejorados estudiando por ejemplo la tasa de convergencia del MPPEI2, trabajo que realizamos en el presente artículo, el cuál tiene como principal contribución la extensión de la tasa de convergencia (lineal y superlineal) de las funciones mono-objetivo ², hacia las multiobjetivo definidas en espacios Euclidianos, resultados que son novedosos, y aún no han sido publicados por ninguna revista nacional o internacional.

El resto del documento está organizado de la siguiente manera: En la sección 2, presentamos algunas definiciones y resultados sobre cuasi-convexidad de funciones, convergencia lineal y superlineal de sucesiones, subdiferenciales generalizados (de Fréchet y Clarke), y algunos resultados de teoría y ejemplos relacionados a optimización multiobjetivo. En la sección 3, presentamos el problema de optimización y el algoritmo inexacto MPPEI2, el cuál tiene como objetivo resolver problemas irrestrictos de minimización multiobjetivo cuasi-convexas. Finalmente en la sección 4, analizamos la tasa de convergencia del algoritmo propuesto provando convergencia lineal y superlineal dando condiciones al parámetro proximal.

¹Decimos que $F(x) \preceq F(x^k)$, para $F(x), F(x^k) \in \mathbb{R}^p$, si y solamente si $F_i(x) \leq F_i(x^k)$ para todo $i = 1, \dots, p$.

²En el campo de las variedades de Hadamard, dicha tasa de convergencia fue introducida por Tang y Huang (2013)), y posteriormente fue generalizada al caso cuasi-convexo por Baygorrea et al. (2016).

2. Preliminares

A lo largo del presente artículo, \mathbb{R}^n denota el espacio Euclidiano, quien junto con el producto interno canónico $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ y la norma en x dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, representa un espacio vectorial.

2.1. Definiciones, notaciones y algunos resultados básicos

Los conceptos y resultados que presentamos en esta subsección, han sido tomados de Berkovitz (2003), Van Tiel (1984), y Rockafellar y Wets (2009).

Definición 2.1.1 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función de valores extendidos.

1. El dominio efectivo de f , denotado por $\text{dom}(f)$, está dado por

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}.$$

2. Decimos que f es propia, si:

- a. $\text{dom}(f) \neq \emptyset$,
- b. para todo $x \in \text{dom}(f)$, $f(x) > -\infty$.

Definición 2.1.2 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia. Decimos que f es localmente Lipschitz en $x \in \text{dom}(f)$, si existe algún $\epsilon_x > 0$ tal que:

$$|f(z) - f(y)| \leq L_x \|z - y\| \quad \forall z, y \in B(x, \epsilon_x),$$

donde $B(x, \epsilon_x) = \{y \in \mathbb{R}^n, \|y - x\| < \epsilon_x\}$ y $L_x > 0$ es la constante de Lipschitz. Decimos que f es localmente Lipschitz en \mathbb{R}^n , si f es localmente Lipschitz en cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.1.3 Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ y $\bar{x} \in C$. El cono normal al punto \bar{x} relacionado al conjunto C está dado por

$$N_C(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle d, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$

Definición 2.1.4 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia. Decimos que f es cuasi-convexa, si

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall \alpha \in [0, 1].$$

Definición 2.1.5 Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ (con $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) una función. Decimos que F es

1. \mathbb{R}_{\geq}^p -cuasi-convexa si y sólo si cada componente de F es cuasi-convexa;
2. localmente Lipschitz en \mathbb{R}^n si cada componente de F es localmente Lipschitz en \mathbb{R}^n .

Definición 2.1.6 (Custódio et al., 2011, Definición 4.6). Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ una función localmente Lipschitz en \mathbb{R}^n . Decimos que $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico Pareto-Clarke de F si para todas las direcciones $d \in \mathbb{R}^n$, existe $i_0 = i_0(d) \in \{1, \dots, p\}$ tal que $F_{i_0}^0(\hat{x}, d) \geq 0$.

Los conceptos que presentamos a continuación, serán usados para determinar la convergencia lineal y superlineal de la sucesión $\{x^k\}$ generada por el algoritmo MPPEI2.

Definición 2.1.7 Sea $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\{x^k\}$ converge a un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que la convergencia es:

1. *lineal*, si existe una constante $\theta < 1$ y un número positivo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x^k - \bar{x}\| \leq \theta \|x^{k-1} - \bar{x}\| \quad \forall k > n;$$

2. *superlineal*, si existe una sucesión $\{\beta_k\}$ convergente a cero y un número positivo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x^k - \bar{x}\| \leq \beta_k \|x^{k-1} - \bar{x}\| \quad \forall k > \bar{n}.$$

2.2. Subdiferenciales Generalizados

Los conceptos y resultados que presentamos en la presente subsección, fueron tomados de Clarke (2013, 1990) y Rockafellar y Wets (2009, cap. 8 y 10).

Definición 2.2.1 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia.

1. Para cada $x \in \text{dom}(f)$, donde $f(x)$ es finito, el conjunto de subgradientes regulares (también llamado subdiferencial de Fréchet) de f en x , denotado por $\widehat{\partial}f(x)$ esta formado por un conjunto de vectores $d \in \mathbb{R}^n$, tales que

$$f(y) \geq f(x) + \langle d, y - x \rangle + \theta(\|y - x\|), \text{ donde } \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \neq x}} \frac{\theta(\|y - x\|)}{\|y - x\|} = 0,$$

o equivalentemente

$$\widehat{\partial}f(x) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \neq x}} \frac{f(y) - f(x) - \langle d, y - x \rangle}{\|y - x\|} \geq 0 \right\}.$$

Si $x \notin \text{dom}(f)$ entonces $\widehat{\partial}f(x) = \emptyset$.

2. El conjunto de subgradientes generalizados (también llamado subdiferencial en el límite) de f en x , denotado por $\partial^{Lim}f(x)$ esta definido por

$$\partial^{Lim}f(x) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \exists x^l \rightarrow x, f(x^l) \rightarrow f(x), d^l \in \widehat{\partial}f(x^l) \text{ y } d^l \rightarrow d \right\}.$$

Proposición 2.2.1 Sea $C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$, un conjunto convexo cerrado y $x \in C$, entonces

$$\partial^{Lim}(\delta_C)(x) = N_C(x)$$

Demostración. La demostración es una implicación directa del ejercicio 4.5 (página 61) y la proposición 2.9 (página 30) de Clarke (2013).

Definición 2.2.2 Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia y localmente Lipschitz en $x \in \text{dom}(f)$, y $d \in \mathbb{R}^n$.

1. La derivada direccional de Clarke de f en x en la dirección d , denotada por $f^0(x, d)$, es definida como:

$$f^0(x, d) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + td) - f(y)}{t}.$$

2. El subdiferencial de Clarke de f en x , denotado por $\partial^0 f(x)$ está definido por

$$\partial^0 f(x) = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, d \rangle \leq f^0(x, d), \quad \forall d \in \mathbb{R}^n\}.$$

Lema 2.2.1 Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función localmente Lipschitz, y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, entonces:

$$(f + g)^0(x, d) = f^0(x, d) + g^0(x, d) \quad \forall x, d \in \mathbb{R}^n.$$

Además, si g es diferenciable se tiene que

$$\partial^0(f + g)(x) = \partial^0 f(x) + \nabla g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. véase Bento et al. (2010), Lema 3.1, página 8.

2.3. Teoría de optimización multiobjetivo

Las definiciones, propiedades y notaciones que presentamos en esta subsección han sido tomadas de Ehrgott (2005) y Miettinen (2012); por lo que para mayores detalles se recomienda revisar dichas fuentes.

A lo largo de este artículo vamos a considerar el cono $\mathbb{R}_{\geq}^p = \{y \in \mathbb{R}^p : y_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, p\}$, el cuál induce un orden parcial \preceq en \mathbb{R}^p , que indica que $y \preceq y'$, para $y, y' \in \mathbb{R}^p$, si y solo si $y' - y \in \mathbb{R}_{\geq}^p$, lo cual significa que $y_i \leq y'_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, p$. Considerando la relación anterior, definimos el cono $\mathbb{R}_{>}^p = \{y \in \mathbb{R}^p : y_i > 0, \forall i = 1, \dots, p\}$, el cuál induce el orden \prec en \mathbb{R}^p , que indica que $y \prec y'$, para $y, y' \in \mathbb{R}^p$, si y solo si $y' - y \in \mathbb{R}_{>}^p$, lo cual significa que $y_i < y'_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, p$. Esos órdenes parciales establecer una clase de problemas conocidos en la literatura como problemas de optimización multiobjetivo (P_sOM), los cuáles en su versión irrestricta (objeto de estudio del presente artículo) están formulados de la siguiente manera:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = \min\{F(x) : x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (3)$$

donde: $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, con $F(x) = (F_1(x), \dots, F_p(x))$, $p \geq 2$, denota el vector de funciones objetivo, definido en el espacio variable o espacio de decisión \mathbb{R}^n , y con valores en el espacio objetivo o espacio criterio $Y = F(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^p$.

Definición 2.3.1 (Ehrgott, 2005, Definición 2.1). Decimos que un punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es una solución de Pareto (también conocida como solución eficiente, óptimo de Pareto, solución no dominada, o solución no interior) del problema (3), si no existe otra $x \in X$ tal que $F_i(x) \leq F_i(\hat{x})$ para todo $i = 1, \dots, p$ y $F_j(x) < F_j(\hat{x})$ para al menos un índice $j \in \{1, \dots, p\}$.

Observación 2.3.1 En función de la definición, podemos decir que:

1. Si \hat{x} es eficiente, entonces $F(\hat{x})$ es llamado punto no dominado.
2. Si $x^1, x^2 \in X$ y $F(x^1) \leq F(x^2)$, entonces x^1 domina a x^2 (denotado por $x^1 \preceq x^2$) y $F(x^1)$ domina a $F(x^2)$.
3. El conjunto de todas las soluciones eficientes (o soluciones de Pareto), denotado por X_E , es llamado conjunto eficiente o variedad de Pareto.
4. El conjunto de todos los puntos no dominados $\hat{y} = F(\hat{x}) \in Y$, donde $\hat{x} \in X_E$, denotado por $Y_N = F(X_E)$, es llamado el conjunto no dominado o frontera de Pareto.
5. Entre las muchas definiciones, decimos que \hat{x} es una solución de Pareto, si:
 - 5.1. no existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(x) - F(\hat{x}) \in -\mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$;
 - 5.2. $Y \cap (F(\hat{x}) - \mathbb{R}_{\geq}^p) = \{F(\hat{x})\}$, donde $Y = F(X)$.

Ejemplo 2.1 Consideremos el siguiente problema de minimización:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} F(x) = \min_{x \in \mathbb{R}} (e^x, (e^x - 3)^2 + 1).$$

En este problema fácilmente podemos identificar que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, denota el vector de funciones objetivo, definido por $F(x) = (e^x, (e^x - 3)^2 + 1) = (F_1(x), F_2(x))$; \mathbb{R} denota espacio de decisión, y $F(\mathbb{R}) = Y$ denota el conjunto factible, definido en el espacio objetivo \mathbb{R}^2 .

Si consideramos de manera individual cada una de las componentes de la función F , como se muestra en la Figura 1, fácilmente se puede observar que la función F_1 tiene ínfimo, pero no mínimo global; y que la función F_2 tiene como minimizador al punto $(\ln(3), 1)$. Sin embargo, considerando ambas funciones a la vez, como así lo exige el presente problema, la pregunta natural que uno podría plantearse es: **¿cuál o cuáles son los valores que debe asumir la variable x , de tal manera que minimice ambas funciones a la vez?**

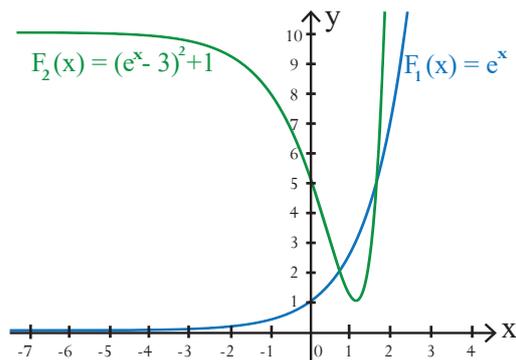


Figura 1. Gráfica de las funciones objetivo del ejemplo 2.1.

Para responder a tal interrogante, el proceso de minimización lo realizamos obteniendo la imagen vía F del conjunto $\mathbb{R} = X$ (el cuál en este caso representa todo el espacio de decisión), es decir debemos calcular el conjunto $F(X) = Y \subset \mathbb{R}^2$. Para ello realizamos lo siguiente:

$$(F_1(x), F_2(x)) = (y_1, y_2).$$

Dado que $y_1 = e^x$, entonces $y_2 = (e^x - 3)^2 + 1 = (y_1 - 3)^2 + 1$. La gráfica de ésta función, se muestra en la Figura 2 (a).

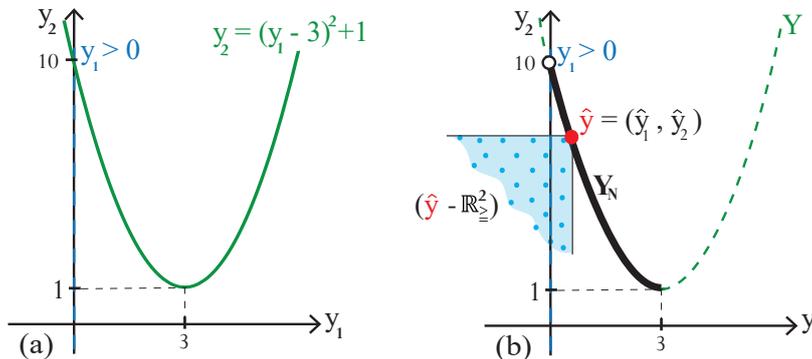


Figura 2. (a) espacio objetivo y (b) puntos no dominados del ejemplo 2.1.

Puesto que $y_1 = e^x > 0$, en la Figura 2 (b), se puede observar que el **conjunto no dominado o frontera de Pareto** Y_N se encuentran entre los correspondientes valores de $y_1 \in (0, 3]$ y $y_2 \in [1, 10)$; así que $Y_N = \{(y_1, y_2) \in Y : y_1 \in (0, 3]\}$.

Teniendo identificado Y_N , fácilmente se puede comprobar que el **conjunto de soluciones de Pareto** (o conjunto de soluciones eficientes) X_E está conformado por los $x \in (-\infty, \ln(3)]^3$; así que $X_E = \{x \in X : (F_1(x), F_2(x)) \in Y_N\} = (-\infty, \ln(3)]$. En la Figura 2, también se puede observar que el ángulo recto adjunto al punto $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ muestra que no existe otro punto $y = (y_1, y_2) \in F(X)$, $y \neq \hat{y}$ tal que $y_1 \leq \hat{y}_1$ y $y_2 \leq \hat{y}_2$.

Definición 2.3.2 (Ehrgott, 2005, Definición 2.24). Un punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es una solución débil de Pareto (solución débilmente eficiente o débilmente óptima de Pareto) del problema (3), si no existe $x \in X$ tal que $F(x) < F(\hat{x})$, es decir $F_i(x) < F_i(\hat{x})$ para todo $i = 1, \dots, p$.

De forma análoga a lo considerado en la Observación 2.3.1, en la presente vamos a considerar a X_{wE} como el conjunto de soluciones débilmente eficientes del problema (3), el cuál en función de las Definiciones 2.3.1 y 2.3.2 satisface $X_E \subset X_{wE}$.

3. Definición del problema y el algoritmo MPPEI2

Estamos interesados en resolver el siguiente problema irrestricto de minimización multiobjetivo cuasi-convex⁴

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = \min\{F(x), x \in \mathbb{R}^n\}, \tag{4}$$

donde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función que satisface las siguientes hipótesis:

- (H1) $0 \preceq F$, es decir que $F_i(x) \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ y $x \in \text{dom}(F_i)$,
- (H2) F es localmente Lipschitz en \mathbb{R}^n ,
- (H3) F es \mathbb{R}_{\geq}^p -cuasi-convexa,

³Como $y_1 \in (0, 3]$, entonces $y_1 = e^x \leq 3$. Así que $x \in (-\infty, \ln(3)]$.

⁴Multiobjetivo, dado que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$; y cuasi-convexo, puesto que cada una de las componentes de $F = (F_1, \dots, F_p)$ es cuasi-convexa.

(H4) $(F(x^0) - \mathbb{R}_{\geq}^p) \cap F(\mathbb{R}^n)$ es \mathbb{R}_{\geq}^p -completo, lo cual significa que para toda sucesión $\{a^k\} \subset \mathbb{R}^n$, con $a^0 = x^0$, tal que $F(a^{k+1}) \preceq F(a^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(a) \preceq F(a^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$,

bajo las cuáles, el siguiente conjunto denotado por:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \preceq F(x^k), \quad \forall k \in \mathbb{N}\}, \quad (5)$$

es convexo, cerrado y no vacío. También denotamos el conjunto

$$Z = E \cap PC, \quad (6)$$

donde PC representa al conjunto de puntos críticos Pareto-Clarke del problema (4), el cuál en función de la Definición 2.1.6 está dado por:

$$PC = \{x \in \mathbb{R}^n : F_{i_0}^0(x, d) \geq 0, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ y para algún } i_0 = i_0(d) = 1, \dots, p\}.$$

3.1. Algoritmo MPPEI2

El algoritmo MPPEI2, que introducimos en esta subsección, fué estudiado por Papa Quiroz y Cruzado (2018), y tiene como objetivo resolver el problema (4). Dicho algoritmo está definido por:

Algoritmo MPPEI2

Inicio: Escoger un punto inicial arbitrario

$$x^0 \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Paso iterativo: Para $k = 0, 1, \dots$, y dado un x^k , encontrar $x^{k+1} \in \Omega_k$ y $e^{k+1} \in \mathbb{R}^n$, tales que:

$$e^{k+1} \in \partial^0 \left(\langle F(\cdot), z_k \rangle + \frac{\alpha_k}{2} \|\cdot - x^k\|^2 \right) (x^{k+1}) + \mathcal{N}_{\Omega_k}(x^{k+1}), \quad (8)$$

donde $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \preceq F(x^k)\}$, $\alpha_k > 0$, $\{z_k\} \subset \mathbb{R}_{\geq}^p \setminus \{0\}$, con $\|z_k\| = 1$, y además el término del error e^{k+1} satisface las siguientes condiciones:

$$\frac{\|e^{k+1}\|}{\alpha_k} \leq \eta_k \|x^{k+1} - x^k\| \quad (9)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \eta_k^2 < +\infty \quad (10)$$

Criterio de parada: Si $x^{k+1} = x^k$ o si x^{k+1} es un punto crítico Pareto-Clarke (ver Definición 2.1.6), detener el criterio. En otro caso hacer $k \leftarrow k + 1$ y retornar al paso iterativo.

Observación 3.1.1 En la práctica para obtener los puntos x^{k+1} y e^{k+1} que satisfagan (8) y (9), se debe encontrar un punto crítico (mínimo local, máximo local o punto silla) aproximado, y no necesariamente un mínimo del siguiente problema de optimización:

$$\min \left\{ \langle F(\cdot), z_k \rangle + \frac{\alpha_k}{2} \|\cdot - x^k\|^2 : x \in \Omega_k \right\}, \quad (11)$$

o equivalentemente, se debería encontrar un punto crítico aproximado del siguiente problema de optimización global con restricciones de desigualdad

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^p z_k^i F_i(\cdot) + \frac{\alpha_k}{2} \|\cdot - x^k\|^2 : F_i(x) \leq F_i(x^k), \quad \forall i = 1, \dots, p \right\}. \quad (12)$$

Ejemplo 3.1 Continuemos con el análisis del problema de minimización tratado en el Ejemplo 2.1, dado por:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (e^x, (e^x - 3)^2 + 1). \quad (13)$$

Este problema, donde la función F presenta las siguientes componentes $F_1(x) = e^x$ y $F_2(x) = (e^x - 3)^2 + 1$, satisface las hipótesis **(H1)**, **(H2)** y **(H3)**, dado que respectivamente cada una de las componentes de F son mayores o iguales a cero (ver Figura 1 - página 6), son cuasi-convexas (ver Figura 1 y Definición 2.1.4), y además son localmente Lipschitz. Dicho problema también satisface la condición **(H4)**. Así que como lo indica la Observación 3.1.1, tomando a x^0 como punto inicial, y dado un $x^k \in \mathbb{R}^2$, el proceso iterativo del algoritmo propuesto consiste en encontrar un punto crítico aproximado del siguiente problema:

$$\begin{cases} \min F(x) = (F_1(x), F_2(x))(z_1^k, z_2^k) + \frac{\alpha_k}{2} \|x - x^k\|^2 \\ \text{s.a :} \\ (F_1(x), F_2(x)) = F(x) \leq F(x^k) = (F_1(x^k), F_2(x^k)). \end{cases} \quad (14)$$

Remplazando las componentes de F , y desarrollando las restricciones de desigualdad, el problema anterior presenta la siguiente estructura:

$$\begin{cases} \min F(x) = z_1^k(e^x) + z_2^k((e^x - 3)^2 + 1) + \frac{\alpha_k}{2}(x - x^k)^2 \\ \text{s.a :} \\ e^x - e^{x^k} \leq 0 \\ e^{2x} - e^{2x^k} + 6(e^{x^k} - e^x) \leq 0, \end{cases} \quad (15)$$

lo cuál es un problema factible a ser desarrollado por algunos paquetes computacionales como el MATLAB.

Los resultados que presentamos a continuación han sido tomados de de Papa Quiroz y Cruzado (2018), y serán utilizados más adelante para discutir la estimación de la tasa de convergencia del algoritmo propuesto.

Lema 3.1.1 Sean $\{x^k\}$ y $\{e^k\}$ las sucesiones generadas por el MPPEI2. Si las hipótesis **(H1)**, **(H2)**, **(H3)** y **(H4)** son satisfechas, entonces existe un entero $k_0 \geq 0$, tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene que

$$\|x^{k+1} - x\|^2 \leq \left(1 + \frac{2\eta_k^2}{1 - 2\eta_k^2}\right) \|x^k - x\|^2 - \frac{1}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \quad \forall x \in E. \quad (16)$$

Además, la sucesión $\{x^k\}$ es acotada, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$, y $\lim_{j \rightarrow +\infty} x^{k_j+1} = x \in E$, cuando $\lim_{j \rightarrow +\infty} x^{k_j} = x$.

Proposición 3.1.1 Sean $\{x^k\}$ y $\{e^k\}$ las sucesiones generadas por el algoritmo MPPEI2. Si las hipótesis **(H1)**, **(H2)**, **(H3)** y **(H4)** son satisfechas, entonces la sucesión $\{x^k\}$ converge a un punto de E .

Teorema 3.1.1 Si la función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ satisface las hipótesis **(H1)**, **(H2)**, **(H3)** y **(H4)**, con $0 < \alpha_k \leq \bar{\alpha}$, entonces la sucesión $\{x^k\}$ generada por el MPPEI2 converge hacia algún punto crítico Pareto-Clarke del problema (4).

Observación 3.1.2 De (8) y del hecho que $\partial^{Lim}(\delta_{\Omega_k})(x^{k+1}) = N_{\Omega_k}(x^{k+1})$ (ver Proposición 2.2.1), se tiene que

$$e^{k+1} \in \partial^0 \left(\langle F(\cdot), z_k \rangle + \frac{\alpha_k}{2} \|\cdot - x^k\|^2 \right) (x^{k+1}) + \partial^{Lim}(\delta_{\Omega_k})(x^{k+1}).$$

Dado que $\langle F(\cdot), z_k \rangle$ es una función localmente Lipschitz y $\|\cdot - x^k\|^2$ es convexa diferenciable. Aplicando el Lema 2.2.1 a la expresión anterior se tiene que

$$e^{k+1} \in \partial^0(\langle F(\cdot), z_k \rangle)(x^{k+1}) + \alpha_k(x^{k+1} - x^k) + \partial^{Lim}(\delta_{\Omega_k})(x^{k+1}),$$

de donde

$$e^{k+1} + \alpha_k(x^k - x^{k+1}) \in \partial^0(\langle F(\cdot), z_k \rangle)(x^{k+1}) + \partial^{Lim}(\delta_{\Omega_k})(x^{k+1}). \quad (17)$$

Así que existe $g^k \in (\partial^0(\langle F(\cdot), z_k \rangle) + \partial^{Lim}\delta_{\Omega_k}(\cdot))(x^{k+1})$, tal que

$$g^k = e^{k+1} + \alpha_k(x^k - x^{k+1}). \quad (18)$$

4. Análisis de la tasa de convergencia

Para este propósito vamos a considerar la siguiente hipótesis:

(H5) Para $\bar{x} \in Z$ tal que $x^k \rightarrow \bar{x}$, existen $\delta = \delta(\bar{x}) > 0$ y $\tau = \tau(\bar{x}) > 0$, tales que para todo $w \in B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ y para todo x^{k+1} con $w \in (\partial^0(\langle F(\cdot), z_k \rangle) + \partial^{Lim}\delta_{\Omega_k}(\cdot))(x^{k+1})$, se tiene que

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq \tau\|w\|. \quad (19)$$

Observación 4.0.1 La hipótesis anterior, a la cuál también la podemos llamar la condición de crecimiento en el punto de convergencia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, es diferente a la propuesta por Tang y Huang (2013)⁵, y a la de Baygorrea (2017) (quien la generalizada al campo de las funciones cuasi-convexas), dado que ambos trabajaron con funciones mono-objetivos definidas en espacios de Hadamard. De hecho, una vez que la sucesión $\{x^k\}$ es obtenida, la hipótesis **(H5)** establece una propiedad de crecimiento del operador subdiferencial en el punto $x^k \in \mathbb{R}^n$, en una vecindad del punto de convergencia \bar{x} .

El conjunto Z (ver relación (6)) y la hipótesis **(H5)** que se está proponiendo para analizar la tasa de convergencia del algoritmo MPPEI2, representan una generalización hacia el campo multiobjetivo, de los trabajos de Tang y Huang (2013) y de Baygorrea (2017).

Lema 4.0.1 Sean $\{x^k\}$ y $\{e^k\}$ las sucesiones generadas por el MPPEI2. Supongamos que las hipótesis **(H1)**, **(H2)**, **(H3)**, **(H4)** y **(H5)** son satisfechas, con $0 < \alpha_k \leq \bar{\alpha}$, entonces

i) existe $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|g^k\| < \delta \quad \forall k \geq \tilde{k}, \quad (20)$$

donde g^k es dado por (18);

⁵Lo propuso para trabajar problemas de singularidad de campos vectoriales monótonos maximales, en particularmente para problemas de minimización convexa en variedades de Hadamard.

ii) se tiene que

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq \tau\alpha_k(\eta_k + 1)\|x^{k+1} - x^k\| \quad \forall k \geq \tilde{k}. \quad (21)$$

Demostración.

i) Sean $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x^k$ y $g^k \in (\partial^0(\langle F(\cdot), z_k \rangle) + \partial^{Lim} \delta_{\Omega_k}(\cdot))(x^{k+1})$ dado por (18). Haciendo uso de algunas propiedades básicas de norma de vectores, y considerando la la relación (9) y el hecho que $\alpha_k \leq \bar{\alpha}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|g^k\| &\leq \|e^{k+1}\| + \alpha_k \|x^k - x^{k+1}\| \\ &\leq (\alpha_k \eta_k + \alpha_k) \|x^{k+1} - x^k\| \end{aligned} \quad (22)$$

$$\leq \bar{\alpha}(\eta_k + 1) \|x^{k+1} - x^k\| \quad k \geq 0. \quad (23)$$

Como $\eta_k \rightarrow 0$ y $\|x^{k+1} - x^k\| \rightarrow 0$ (ver Lema 3.1.1), tomando $\epsilon = \delta$, existe un $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ tal que $\|g^k\| < \delta$ para todo $k \geq \tilde{k}$.

ii) En (19) haciendo que $w = g^k$ para todo $k \geq \tilde{k}$, se tiene que:

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq \tau \|w\| = \tau \|g^k\|. \quad (24)$$

Por lo tanto la relación (21) es obtenida reemplazando (22) en la expresión anterior. Ahora vamos a presentar el teorema relacionado a la tasa de convergencia del algoritmo MPPEI2, completando así el resultado de convergencia dado por la Proposición 3.1.1.

Teorema 4.0.1 Sean $\{x^k\}$ y $\{e^k\}$ las sucesiones generadas por el MPPEI2. Supongamos que las hipótesis **(H1)**, **(H2)**, **(H3)**, **(H4)** y **(H5)** son satisfechas, con $0 < \alpha_k \leq \bar{\alpha}$, entonces $\{x^k\}$ converge linealmente hacia $\bar{x} \in Z$. Además de ello, si $\alpha_k \searrow 0$, entonces la convergencia es superlineal.

Demostración. Sean $\bar{x} \in Z$ un punto límite de la sucesión $\{x^k\}$ y $g^k \in (\partial^0(\langle F(\cdot), z_k \rangle) + \partial^{Lim} \delta_{\Omega_k}(\cdot))(x^{k+1})$ dado por (18). Definimos

$$w^k = g^k.$$

Debido a la relación (20) tenemos que $\|g^k\| = \|w^k\| < \delta$ para todo $k \geq \tilde{k}$. Así que $w^k \in B(0, \delta)$ para todo $k \geq \tilde{k}$. Además, $g^k \in (\partial^0(\langle F(\cdot), z_k \rangle) + \partial^{Lim} \delta_{\Omega_k}(\cdot))(x^{k+1})$.

Como $\bar{x} \in Z$, entonces $\bar{x} \in E$ (ver la relación (6)); así que por (16) tenemos

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \left(1 + \frac{2\eta_k^2}{1 - 2\eta_k^2}\right) \|x^k - \bar{x}\|^2 - \frac{1}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \quad \forall k \geq k_0. \quad (25)$$

Por la relación (21) también tenemos

$$\|x^{k+1} - x^k\| \geq \frac{1}{\tau\alpha_k(\eta_k + 1)} \|x^{k+1} - \bar{x}\| \quad \forall k \geq \tilde{k},$$

de donde

$$-\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq -\left(\frac{1}{\tau\alpha_k(\eta_k + 1)}\right)^2 \|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \quad \forall k \geq \tilde{k}.$$

Reemplazando la relación anterior en (25), se tiene que

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \left(\frac{1}{1 - 2\eta_k^2}\right) \|x^k - \bar{x}\|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau\alpha_k(\eta_k + 1)}\right)^2 \|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \quad \forall k \geq \max\{k_0, \tilde{k}\},$$

así que

$$\left(1 + \frac{1}{2\tau^2\alpha_k^2(\eta_k + 1)^2}\right) \|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \left(\frac{1}{1 - 2\eta_k^2}\right) \|x^k - \bar{x}\|^2 \quad \forall k \geq \max\{k_0, \tilde{k}\},$$

lo cual implica que

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \beta_k \|x^k - \bar{x}\|^2 \quad \forall k \geq \max\{k_0, \tilde{k}\}, \quad (26)$$

donde

$$\beta_k = \frac{1}{1 - 2\eta_k^2} \left(\frac{2\tau^2(\eta_k + 1)^2}{2\tau^2(\eta_k + 1)^2 + \frac{1}{\alpha_k^2}}\right). \quad (27)$$

Dado que $0 < \alpha_k \leq \bar{\alpha}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\beta_k \leq r_k, \quad (28)$$

donde

$$r_k = \frac{1}{1 - 2\eta_k^2} \left(\frac{2\tau^2(\eta_k + 1)^2}{2\tau^2(\eta_k + 1)^2 + \frac{1}{\bar{\alpha}^2}}\right).$$

Como $\eta_k \rightarrow 0$, en la expresión anterior tenemos que

$$r_k \rightarrow \frac{2\tau^2}{2\tau^2 + \frac{1}{\bar{\alpha}^2}} < 1.$$

Por lo tanto, existe un número positivo $k_1 \in \mathbb{N}$ con $k \geq k_1$, tal que

$$\beta_k \leq r_k < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\tau^2}{2\tau^2 + \frac{1}{\bar{\alpha}^2}}\right) < 1 \quad \forall k \geq k_1.$$

Entonces, en (26) se tiene que

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \beta_k \|x^k - \bar{x}\|^2 \quad \forall k \geq \max\{k_0, \tilde{k}, k_1\}.$$

Por lo tanto la sucesión $\{x^k\}$ converge linealmente a \bar{x} (ver Definición 2.1.7 (1)).

La convergencia superlineal de la sucesión generada por el algoritmo MPPEI2, se obtiene inmediatamente, dado que la hipótesis $\alpha_k \searrow 0$, y el hecho que $\eta_k \rightarrow 0$, en (27) implican que $\beta_k \rightarrow 0$, lo cual completa la prueba.

5. Conclusiones y futuras investigaciones

1. En este artículo, presentamos el algoritmo MPPEI2, el cuál representa una variante del MPPEI presentado por Papa Quiroz y Cruzado (2018), obtenida al adicionar un criterio de error utilizado por Tang y Huang (2013)..
2. Bajo ciertas hipótesis, probamos que la sucesión $\{x^k\}$ generada por el algoritmo MPPEI2 converge lineal y superlinealmente hacia un punto crítico Pareto-Clarke del problema (4) cuando la sucesión $\{\alpha_k\}$ es acotada y converge a cero respectivamente.

3. En este artículo no realizamos la implementación computacional del algoritmo, pues forma parte de un nuevo trabajo que se está realizando en en Papa Quiroz y Cruzado (2019), donde explicamos como resolver de forma aproximada los subproblemas generados por el algoritmo, ya que actualmente esta metodología no se encuentra en los paquetes de optimización.
4. Se espera que este artículo sirva como referencia para futuros trabajos de investigación, pues hay otros temas por explorar, tanto en el aspecto teórico como computacional, destacamos las siguientes:
 - Encontrar un algoritmo óptimo para resolver los subproblemas del algoritmo inexacto introducido.
 - Extender el algoritmo inexacto para resolver problemas de optimización multiobjetivos cuasi-convexos con restricciones.
 - Aplicación a modelos económicos en teoría de decisión.

Agradecimientos

Agradecemos a los revisores del artículo que han contribuido con la mejora del trabajo inicial.

Referencias bibliográficas

- [1] Baygorrea, N. (2017). *Método do ponto proximal inexacto para minimização quase-convexa em variedades de Hadamard* (Tesis Doctoral). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.
- [2] Baygorrea, N., Papa Quiroz, E. A., y Maculan, N. (2016). On the convergence rate of an inexact proximal point algorithm for quasiconvex minimization on Hadamard manifolds. *Journal of the Operations Research Society of China*, 5(1), 1-11.
- [3] Bento, G., Ferreira, O., y Oliveira, P. R. (2010). Local convergence of the proximal point method for a special class of nonconvex functions on Hadamard manifolds. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 73(2), 564-572.
- [4] Berkovitz, L. (2003). *Convexity and optimization in \mathbb{R}^n (Vol. 63)*. New York, United States: John Wiley & Sons.
- [5] Clarke, F. (1990). *Optimization and nonsmooth analysis (Vol. 5)*. Philadelphia, United States: SIAM.
- [6] Clarke, F. (2013). *Functional analysis, calculus of variations and optimal control (Vol. 264)*. New York, United States: Springer Science & Business Media.
- [7] Custódio, A., Madeira, J., Vaz, A., y Vicente, L. (2011). Direct multisearch for multiobjective optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 21(3), 1109-1140.
- [8] Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria optimization (2a. ed.)*. New York, United States: Springer.
- [9] Miettinen, K. (2012). *Nonlinear multiobjective optimization (Vol. 12)*. New York, United States: Springer Science & Business Media.

- [10] Papa Quiroz, E. A., y Cruzado, S. (2019). Un método de punto proximal escalarizado inexacto para minimización multiobjetivo cuasi-convexa en espacios Euclidianos. *Pesquimat*, 22(1), 31-50.
- [11] Rockafellar, R., y Wets, R. (2009). *Variational analysis (Vol. 317)*. Berlin, Alemania: Springer Science & Business Media.
- [12] Tang, Guo-ji and Huang, Nan-jing. (2013). An inexact proximal point algorithm for maximal monotone vector fields on Hadamard manifolds. *Operations Research Letters*, 41(6), 586-591.
- [13] Van Tiel, J. (1984). *Convex analysis: An introductory text*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.