PESQUIMAT 23(1): 61–70 (2020)
http://dx.doi.org/10.15381/pesquimat.v23i1.18444

ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Aplicación de la teoría de semigrupos a una ecuación de onda semilineal con disipación localizada

***Carlos Alberto Peña Miranda* [1]*, Alfonso Pérez Salvatierra*[2] *y Elizabeth Cosi Cruz* [3]**

Resumen: En este artículo, demostramos la existencia única de la solución para la ecuación de onda semilineal con disipación localizada no lineal mediante la teoría de semigrupos.

Palabras clave: ecuación de onda semilineal; solucion débil; disipación localizada.

Application of semigroup theory to a semilinear wave equation with localized dissipation

Abstract: In this article, we demonstrate the unique existence of the solution for the semilinear wave equation with localized nonlinear dissipation using semigroup theory..

Keywords: semilinear wave equation; weak solutions; localized dissipation.

Recibido: 13/01/2019. *Aceptado*: 30/07/2019. *Publicado online*: 18/08/2020.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: cpenam@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: aperezs@unmsm.edu.pe
[3]Universidad Privada Norbert Wiener, e-mail: elizabeth.cosi@uwiener.edu.pe

1. Introducción

En el presente artículo vamos a demostrar la existencia y unicidad de solución débil para la ecuación de onda semilineal con disipación localizada no lineal dado por,

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha(x)u + f(u) + a(x)g(u_t) = 0 \text{ en } \Omega \times [0, +\infty[\tag{1}$$

con condicion de frontera

$$u(x,t) = 0, \text{ en } (x,t) \in \Gamma \times [0, +\infty[\tag{2}$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega \tag{3}$$

donde Ω es un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ con frontera Γ bien regular.

El objetivo del artículo es demostrar la existencia y unicidad de una solución débil para el problema (1) utilizando la teoría de semigrupos, una teoría que tuvo su avance en 1948 con la demostración del teorema de Hille - Yosida y que tiene gran importancia en el estudio de la solución a problemas de valor inicial (PVI) o problema de Cauchy abstracto, dado por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = \mathcal{A}u(t) \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \in D(\mathcal{A}). \end{cases}$$

Para demostrar el resultado de la existencia de soluciones, las funciones α, a, f y g, deben verificar las siguientes hipótesis

(H1) $a \in L^\infty(\Omega); a(x) \geq a_0 > 0$ casi siempre en Ω.

(H2) $f \in C^1(\mathbb{R})$ y cumple la siguiente condición de crecimiento:

$$|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

para alguna constante $C > 0$ y $p > 1$ tal que $(n-2)p \leq n$.

(H3) La función no lineal $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple

a) $g \in C^1(\mathbb{R})$

b) $g(s)s \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$

c) g es una función no decreciente

d) existen constantes $m, M > 0$ tal que $m|s| \leq g(s) \leq M|s|$, $\forall s \in \mathbb{R}$

e) $g' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(H4) $\alpha \in W^{1,\infty}(\Omega); \alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ c.s. en Ω.

El problema (1) con disipación localizada del tipo $a(x)u_t$ fue estudiado por Pérez, A. y Peña, C. [7], quienes demostraron la existencia y unicidad de solución regular para la ecuación de onda semilineal con disipación localizada sobre $\mathbb{R}^n$.

Por otro lado, la estabilización para la ecuación de la onda sujeta a disipación localizada

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}_+$$

ha sido estudiado por Zuazua, E. [8] y Nakao, M. [4, 5] donde demuestra el decaimiento uniforme de las soluciones considerando la función a positiva en todo el dominio Ω. Además, el decaimiento uniforme de soluciones para ecuaciones de onda semilineal con disipación localizada

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 \text{ en } \Omega \times [0, +\infty[$$

fue obtenido por Zuazua, E. [9, 10] donde asumen que a es una función positiva en una vecindad ω de la frontera de Ω o en todo $\mathbb{R}$.

En la siguientes dos secciones, usando la teoría de semigrupos, demostraremos el siguiente teorema

Teorema 1.1 *Si $\{u_0, u_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y se cumple las hipotesis (H1) – (H4), entonces existe una única solución débil del sistema (1) - (3) en la clase*

$$u \in C([0, \infty[; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty[; L^2(\Omega)).$$

2. Existencia y unicidad de solución débil

En esta sección estudiamos la existencia y unicidad de la solución débil para el sistema (1) - (3) con las hipótesis (H1) - (H4) y datos iniciales $\{u_0, u_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Efectuamos el cambio de variable $v = u_t$ y denotamos $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}$, el sistema (1) - (3) se puede reescribir como el problema de Cauchy no homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + \mathcal{A}U = F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{4}$$

donde $F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(u) - a(\cdot)g(u_t) \end{pmatrix}$ y $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ es el operador definido por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ (-\Delta + \alpha(\cdot))\, I & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Con el fin de efectuar la formulación del semigrupo asociado al sistema (1) - (3), definimos la energía del sistema

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[|\nabla u(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2 + \alpha(x)|u(x,t)|^2\Big] dx + \int_\Omega F(u(x,t))dx. \tag{6}$$

Observación 2.1 Por la hipótesis (H2), la función

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt, \ \forall s \in \mathbb{R},$$

está bien definida.

Proposición 1 *La energía asociada al sistema (1) – (3), es decreciente.*

Demostración. Multiplicamos la ecuación (1) por u_t e integrando sobre Ω, obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha(x)|u|^2\right]dx\right) + \int_\Omega f(u)u_t dx + \int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx = 0.$$

Luego

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha(x)|u|^2\right]dx + \int_\Omega F(u)dx\right) = -\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx. \tag{7}$$

De (6), hipótesis (H1) y (H3) se concluye

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx \leq 0. \tag{8}$$

Por tanto, la energía asociada al sistema (1) – (3) es decreciente, para todo $t \in [0, +\infty[$. $\square$

Observación 2.2 Del resultado de la proposición 1, para que la energía esté bien definida, se establece que la solución $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}$ debe satisfacer

$$U \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

De este modo se define el espacio de fase asociado al sistema (1) – (3) dado por

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

con el producto interno

$$\langle U_1, U_2\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega (\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + \alpha(x)u_1u_2 + v_1v_2)dx$$

donde $U_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$. Dotado con la norma inducida

$$\|U\|_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \alpha(x)|u|^2 + |v|^2\right) dx$$

hace de $\mathcal{H}$ un espacio de Banach.

El dominio del operador $\mathcal{A}$ es el conjunto sobre el cual el operador está bien definido sobre el espacio de fase, es decir,

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H};\ \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}$$

teniendo en cuenta el operador $\mathcal{A}$ definido en (5) y el vector $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ se deduce

$$D(\mathcal{A}) = \left(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega).$$

De las inmersiones

$$\left(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \overset{c}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega) \text{ y } H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

resulta

$$\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}.$$

Lema 2.1 *$\mathcal{A}$ es un operador disipativo.*

Demostración. Sea $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ y el operador $\mathcal{A}$ definido en (5), entonces

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + \alpha(\cdot)u \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega [-\nabla v \cdot \nabla u - \alpha(x)vu + ((-\Delta u) + \alpha(x)u)v]dx \\ &= \int_\Omega [-\nabla v \cdot \nabla u + (-\Delta u)v]dx \end{aligned}$$

aplicando la formula de Green (ver Kesavan [3] pág. 103), se obtiene

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \leq 0.$$

Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es un operador disipativo. □

Lema 2.2 *$\mathcal{A}$ es un operador maximal.*

Demostración. Dado $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ debemos demostrar que existe una única solución $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \tag{9}$$

En efecto, de la igualdad (9), se obtiene

$$\begin{aligned} u - v &= f \\ v - \Delta u + \alpha(\cdot)u &= g \end{aligned}$$

sumando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos

$$-\Delta u + (\alpha(\cdot) + 1)u = f + g \in L^2(\Omega). \tag{10}$$

A fin de garantizar la solución del sistema (10), definamos la forma bilineal

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

dada por

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + ((\alpha(\cdot) + 1)u, v)_{L^2(\Omega)}. \tag{11}$$

Afirmación 2.1 La forma bilineal $a(u,v)$ definido en (11) es continua y coerciva.

En efecto,

i) $a(u,v)$ es continua.

En efecto, sea $u,v \in H_0^1(\Omega)$, aplicando la desigualdad de Cauchy - Schwarz se obtiene

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq |\nabla u|_{L^2(\Omega)}|\nabla v|_{L^2(\Omega)} + (1+|\alpha|_\infty)|u|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)} \\ &= |u|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)} + (1+|\alpha|_\infty)|u|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{12}$$

De la inmersión de Sobolev $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, existe una constante $\widehat{C} > 0$ tal que

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{C}|u|_{H_0^1(\Omega)}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{13}$$

De (12) y (13) obtenemos

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq |u|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)} + \widehat{C}^2\,(1+|\alpha|_\infty)\,|u|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq 2\tilde{C}|u|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

donde $\tilde{C} = \max\{1, \widehat{C}^2\,(1+|\alpha|_\infty)\}$.

ii) $a(u,v)$ es coerciva.

En efecto, sea $u \in H_0^1(\Omega)$, de la hipótesis (H4) y (11), resulta

$$\begin{aligned} |a(u,u)| &= |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)} + |(\alpha(\cdot)u,u)| \\ &\geq |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0|u|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq k\left(|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\geq k|u|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

donde $k = \min\{1, 1+\alpha_0\}$.

Con lo que queda demostrado la afirmación 2.1.

Dado $\psi \in L^2(\Omega)$, definimos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccl} L: & H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \langle L, v\rangle : \;= (\psi, v) \end{array}$$

entonces L es una forma lineal y continua, es decir, $L \in (H_0^1(\Omega))'$. Por teorema de Lax - Milgram (ver Brezis [2] pág. 140), la ecuación (10) posee una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = \langle L, v\rangle := (\psi, v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Para todo $\varphi \in D(\Omega)$, tenemos

$$\begin{aligned} (\psi,\varphi)_{L^2(\Omega)} &= \langle L, \varphi\rangle \\ &= a(u,\varphi) \\ &= (\nabla u, \nabla\varphi) + ((\alpha(\cdot)+1)u, \varphi) \\ &= (-\Delta u, \varphi) + ((\alpha(\cdot)+1)u, \varphi) \\ &= (-\Delta u + (\alpha(\cdot)+1)u, \varphi) \end{aligned}$$

luego $-\Delta u+(\alpha(\cdot)+1)u=\psi\in L^2(\Omega)$ y por el teorema 3.3.3 (ver Kesavan [3] pág. 139) $u\in H^2(\Omega)$.

Por lo tanto, dado $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\in\mathcal{H}=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ existe una única $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\in D(\mathcal{A})$ tal que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}+\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

y esto demuestra que $\mathcal{A}$ es maximal. $\square$

Lema 2.3 *El operador $F:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ dado por*

$$F(U)=\begin{pmatrix} 0 \\ -f(u)-a(\cdot)g(v) \end{pmatrix}\ \textit{para todo}\ U=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\in\mathcal{H}$$

está bien definida.

Demostración. Sea $U=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\in\mathcal{H}$ sólo nos faltaría demostrar que

$$f(u)+a(\cdot)g(v)\in L^2(\Omega).$$

En efecto, por las hipótesis (H2) y de la desigualdad $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u)|^2dx &\le \int_\Omega \left[(1+|u|^{p-1})|u|\right]^2dx\\ &\le 2C\left(\int_\Omega |u|^2dx+\int_\Omega |u|^{2p}dx\right)\\ &= 2C(|u|^2_{L^2(\Omega)}+|u|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)}).\end{aligned}\tag{14}$$

De la inmersión de Sobolev $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, existe una constante $\tilde{C}$ tal que

$$|u|_{L^{2p}(\Omega)}\le\tilde{C}|u|_{H_0^1(\Omega)},\ \text{para todo } u\in H_0^1(\Omega).\tag{15}$$

De las desigualdades (14) y (15) resulta

$$\int_\Omega |f(u)|^2dx\le 2C\left(|u|^2_{L^2(\Omega)}+\tilde{C}^2|u|^{2p}_{H_0^1(\Omega)}\right)<\infty.\tag{16}$$

Además de la hipótesis (H1) y (H3) obtenemos

$$\int_\Omega |a(x)g(v)|^2dx\le M^2|a|^2_\infty\int_\Omega |v|^2dx<\infty.\tag{17}$$

De (16) y (17) se prueba la buena definición de F. $\square$

Lema 2.4 *El operador $F:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ es localmente lipschitziano.*

Demostración. Sean $U_1=\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}\in\mathcal{H}$ y $U_2=\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}\in\mathcal{H}$ tal que

$$\|U_1\|_\mathcal{H}\le M \text{ y } \|U_2\|_\mathcal{H}\le M \text{ para algún } M>0.\tag{18}$$

Por demostrar que existe una constante $L_M>0$ tal que

$$\|F(U_1)-F(U_2)\|_\mathcal{H}\le L_M\|U_1-U_2\|_\mathcal{H}.$$

En efecto, por las hipótesis (H2) y de la desigualdad $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ resulta

$$\begin{aligned} |f(u_1)-f(u_2)|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C^2 \int_\Omega \left\{ \left(1+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1}\right)|u_1-u_2| \right\}^2 dx \\ &\leq 3C^2 \left(\int_\Omega |u_1-u_2|^2 dx + \int_\Omega |u_1|^{2(p-1)}|u_1-u_2|^2 dx \right. \\ &\qquad \left. + \int_\Omega |u_2|^{2(p-1)}|u_1-u_2|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Desde que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{p-1}{p}=1$, usando la desigualdad de Hölder (ver Adams [1] pág. 24) obtenemos

$$\begin{aligned} |f(u_1)-f(u_2)|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 3C^2 \left(|u_1-u_2|^2_{L^2(\Omega)} + |u_1|^{2(p-1)}_{L^{2p}(\Omega)}|u_1-u_2|^2_{L^{2p}(\Omega)} \right. \\ &\qquad \left. + |u_2|^{2(p-1)}_{L^{2p}(\Omega)}|u_1-u_2|^2_{L^{2p}(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

De las desigualdades (13), (15) y (18) obtenemos

$$\begin{aligned} |f(u_1)-f(u_2)|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 3C^2 \left(\widehat{C}^2|u_1-u_2|^2_{H^1_0(\Omega)} + \tilde{C}^{2p}M^{2(p-1)}|u_1-u_2|^2_{H^1_0(\Omega)} \right. \\ &\qquad \left. + \tilde{C}^{2p}M^{2(p-1)}|u_1-u_2|^2_{H^1_0(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Luego

$$|f(u_1)-f(u_2)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_M|u_1-u_2|^2_{H^1_0(\Omega)} \tag{19}$$

donde $C_M = 3C^2\left(\widehat{C}^2+\tilde{C}^{2p}M^{2(p-1)}+\tilde{C}^{2p}M^{2(p-1)}\right)$.

De la hipótesis (H3), por el teorema del valor medio, existe $\lambda \in (s_1,s_2)$ tal que

$$|g(s_1)-g(s_2)| = |g'(\lambda)||s_1-s_2| \leq |g'|_{L^\infty(\Omega)}|s_1-s_2|. \tag{20}$$

Usando (20) se obtiene

$$|a(\cdot)\left(g(v_1)-g(v_2)\right)|^2_{L^2(\Omega)} \leq |g'|^2_{L^\infty(\Omega)}|a|^2_{L^\infty(\Omega)}|v_1-v_2|^2_{L^2(\Omega)} \tag{21}$$

De las desigualdades (19) y (21) resulta

$$\begin{aligned} \|F(U_1)-F(U_2)\|_{\mathcal{H}} &= |f(u_1)-f(u_2)|^2_{L^2(\Omega)} + |a(\cdot)\left(g(v_1)-g(v_2)\right)|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_M|u_1-u_2|^2_{H^1_0(\Omega)} + |g'|^2_{L^\infty(\Omega)}|a|^2_{L^\infty(\Omega)}|v_1-v_2|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq L_M\left(|u_1-u_2|^2_{H^1_0(\Omega)} + |v_1-v_2|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq L_M\|U_1-U_2\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

donde $L_M = \text{máx}\left\{C_M, |g'|^2_{L^\infty(\Omega)}|a|^2_{L^\infty(\Omega)}\right\}$. □

Finalmente, como F es continua y localmente lipschitziana, por el teorema 1.4 (ver Pazy [6] pág. 185) para cada $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$, existe una única solución de sistema (4) en la clase

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C([0,t_{max}[;\mathcal{H}),$$

es decir,

$$u \in C([0,t_{max}[;H^1_0(\Omega)) \cap C^1([0,t_{max}[;L^2(\Omega)).$$

3. Prolongamiento de la solución débil

En esta sección obtendremos la solución global del problema (1); para ello extenderemos nuestra solución obtenida anteriormente, aplicando el teorema 1.4 (ver Pazy [6] pág. 185).

Integrando (8) desde t_1 hasta t_2 se obtiene

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t(x,t)|^2 dxdt, \text{ para todo } t_2 > t_1 \geq 0.$$

Por lo tanto

$$E(t_2) \leq E(t_1), \text{ para todo } t_2 > t_1 \geq 0,$$

lo que demuestra que la energía asociada al sistema (1) - (3) es decreciente, para todo $t \in [0, +\infty[$.

Afirmación 3.1 $t_{max} = +\infty$.

En efecto, si suponemos que $t_{max} < +\infty$ entonces por el teorema 1.4 (ver Pazy [6] pág. 185) se tiene

$$\lim_{t \to t_{max}} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty.$$

Pero

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \Big[|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha(x)|u|^2\Big] dx &\leq E(t) \\ &\leq E(0) < \infty, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto $t_{max} = +\infty$, es decir, la solución débil existen en todo el intervalo $[0, +\infty[$.

4. Conclusión

La teoría de semigrupos demostró ser una herramienta poderosa en la demostración de existencia y unicidad de solución del problema (1) - (3). Además, tal teoría se puede aplicar a cualquier tipo de ecuaciones diferenciales parciales de evolución ya sea que tengan términos lineales y no lineales, como en nuestro caso que se tiene un término localmente disipativo no lineal

Referencias bibliográficas

[1] Adams, R. A. (1975). *Sobolev Spaces.* New York, States United: Academic Press.

[2] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* New York, States United: Springer.

[3] Kesavan, S.(1989). *Topics in functional analysis and applications.* Bangalore, India: Wiley Eastern Limited.

[4] Nakao, M. (1978). A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations. *Journal of the Mathematical Society of Japan 30*(4), 747–762.

[5] Nakao, M. (1996). Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation. *Israel Journal of Mathematics,* 95, 25–42.

[6] Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, New York, States United: Springer–Verlag.

[7] Pérez, A. y Peña, C. (2012). Existencia y unicidad de soluciones regulares de la ecuación de onda semilineal con disipación localizada en $\mathbb{R}^n$. *Pesquimat, 15*(2), 51–60.

[8] Zuazua, E. (1990). Exponential decay for the semilinear wave equations, with locally distributed damping. *Communications in Partial Differential Equations*, *15*(2), 205–235.

[9] Zuazua, E. (1991). Exponential decay for the semilinear wave equations, with localized Damping in Unbounded Domains. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 70 , 513–529.

[10] Zuazua, E. (1988). Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems, *Asymptotic Analysis*, *1*(2), 161–185.