PESQUIMAT 27(1): 18–37 (2024)
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v27.i1.20546
ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

La dualidad de Poincaré en la homología de H-espacios

***Wilfredo Mendoza Quispe* [1], *Sofía Duran Quiñones* [2] *y Fidel Suarez Huaromo Malpaso* [3]**

Resumen: En este trabajo presentamos preliminarmente y muy brevemente los llamados H-espacios y las H-aplicaciones, así como también el álgebra de Hopf, conceptos que son utilizados en el cálculo de Homología de H-espacios resaltando en todos los resultados la condición de arco conexo para una H-espacio. Además probamos algunos resultados relacionados a la dualidad de Poincaré, los cuales están basados en los trabajos estudiados en [**5**], donde se destaca la relación isomórfica entre $H^q(X, \mathbb{Z}_p)$ y $H_{m-q}(X; \mathbb{Z}_p)$. El cual permitirá mostrar el isomorfismo$H_{m-q}(X, G) \cong H^q(X, G)$ para cualquier grupo abeliano G.

Palabras clave: H-espacios, homología, cohomología, implicaciones infinitas, arco conexo, dualidad.

Poincaré duality in the homology of H-spaces

Abstract: In this work we preliminarily and very briefly present the so-called H-spaces and the H-applications, as well as the Hopf algebra, concepts that are used in the calculation of Homology of H-spaces, highlighting in all the results the connected arc condition for an H-space. We also prove some results related to Poincaré duality, which are based on the works studied in [**5**], where the isomorphic relationship between $H^q(X, \mathbb{Z}_p)$ and $H_{mq}(X; \mathbb{Z}_p)$ is highlighted.

Keywords: H-spaces, homology, cohomology, infinite implications, connected arc, duality.

Recibido: 08/02/2024. *Aceptado:* 15/05/2024. *Publicado online:* 30/06/2024.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: wmendozaq@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: sduranq@unmsm.edu.pe
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: fidel.huaromo@unmsm.edu.pe

1. Introducción

Hay diversas teorías de homología, relacionado el objeto matemático que se pretenda estudiar. Por ejemplo un espacio topológico o un grupo, lo asociamos a alguna de estas teorías. Cuando es posible la descripción geométrica a dicho objeto, el n-ésimo grupo de homología describe el comportamiento del objeto en la n-ésima dimensión.
Los orígenes de la homología se atribuye con el comienzo de la característica de Euler o formula del Poliedro de Euler, el cual fue seguido por la definición de Riemann de invariantes numéricos de género y conexión de n-veces en el año 1857, y la prueba de Betti en 1871 de la independencia de los "números de homología" de la elección de la base. En este contexto consideramos la categoría $\mathscr{F}_{\mathscr{B}}$ cuyos objetos son espacios topológicos con punto base y los morfismos son aplicaciones continuas que preservan punto base. De este modo Y^X denota el espacio de funciones que preservan punto base con la topología compacta abierta y $[X, Y]$ el conjunto de clases de homotopía que preservan punto base de aplicaciones que preservan punto base de X en Y. Como nuestro objetivo es, estudiar la homología de los denominados H-espacios y la dualidad de Poincaré, presentamos preliminarmente en esta sección la definición de H-espacio, aplicaciones entre H-espacios y, otras definiciones y resultados que permintirá el cálculo de homología de H-espacios y por ende facilitará mostrar el Teorema de dualidad de Poincaré. Antes de abordar el tema central del trabajo presentamos en esta parte introductoria algunas definiciones de topología y álgebra.

1.1. H-espacios y resultados topológicos básicos

Definición 1.1. *Dados dos aplicaciones continuas*

$$f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

Diremos que f es homotópico a g y escribiremos $f \simeq g$ si existe una aplicación continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$, y $H(x_0, t) = y_0$, para todo $t \in I \in [0, 1]$.
Se tiene que "$\simeq$" es una relación de equivalencia y el conjunto de todas estas clases de equivalencia bajo esta relación se denota por $[X, Y]$. En el caso de que $X = S^n$ es la esfera unitaria de dimensión n, se denota por: $\pi_n(Y) = [S^n, Y]$ y s denomina el n-ésimo grupo de homotopía de Y.

Definición 1.2. *Sea Y un espacio con punto base y_0, diremos que Y es un H-espacio si existe una aplicación continua $m : Y \times Y \to Y$ tal que $mi_1 \simeq mi_2 \simeq \mathrm{Id}_Y$. Donde $i_1, i_2 : Y \to Y \times Y$ son las aplicaciones definidos por: $i_1(y) = (y, y_0)$, $i_2(y) = (y_0, y)$.*

A la aplicación m se denomina multiplicación.
Sea Y espacio topológico con punto base y_0. El conjunto de todos los caminos en Y con punto inicial y el punto final y_0 con la topología compacta abierta es denotada por $\Omega(Y, y_0)$. Se denomina espacio de lazoss de Y basado en y_0. La multiplicación está dado por:

$$\begin{array}{rccl} m: & \Omega(Y, y_0) \times \Omega(Y, y_0) & \longrightarrow & \Omega(Y, y_0) \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & m(\alpha, \beta) = \alpha * \beta \end{array}$$

donde:

$$(\alpha, \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \ 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & , \ 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definición 1.3. *Dada una multiplicación $f : X \to Y$, donde X, Y son H-espacios con multiplicaciones m_X y m_Y respectivamente; diremos que f es una H-aplicación si el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "m_X"'] & Y \times Y \arrow[d, "m_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo, salvo homotopía, esto es: $fm_X \simeq m_Y(f \times f)$.

Definición 1.4. *Un H-espacio topológico Y es homotópicamente asociativo si el diagrama*

$$\begin{tikzcd} Y \times Y \times Y \arrow[r, "m\times \mathrm{Id}_Y"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_Y\times m"'] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ Y \times Y \arrow[r, "m"] & Y \end{tikzcd}$$

es homotópicamente conmutativo, esto es: $m(\mathrm{Id}_Y \times m) \simeq m(m \times \mathrm{Id}_Y)$.

Un H-espacio Y tiene inverso si existe una aplicación continua $\sigma : Y \times Y$ tal que $m(\sigma \times \mathrm{Id}_Y)\Delta \simeq m(\mathrm{Id}_Y \times \simeq)\Delta \simeq C_{y_0}$, donde:

$$C_{y_0} : Y \to y_0 \text{ es la aplicación constante}$$
$$\Delta : Y \times Y \times Y \text{ es la aplicación diagonal}$$

Definición 1.5. *Un H-espacio Y es homotópicamente conmutativo si el diagrama*

$$\begin{tikzcd} Y \times Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, "T"'] & Y \\ Y \times Y \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

es homotópicamente conmutativo, esto es: $mT \simeq m$, donde $T(x, y) = (y, x)$ para todo $x, y \in Y$.

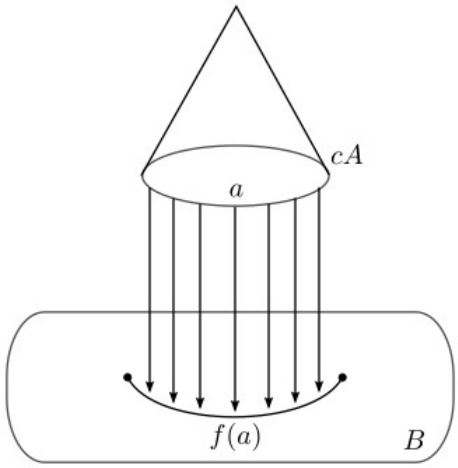
Definición 1.6. *Una aplicación $f : A \to B$ es llamada aplicación cofibra, si dados X, $g : B \to X$ y homotopía $H : A \times I \to X$, comenzando en gf, existe una homotopía $G : B \times I \to X$ que comienza en g y satisface $H = G(f \times \mathrm{Id}_I)$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "f"'] & & A \times I \arrow[dl, "f\times \mathrm{Id}_I"'] \arrow[dd, "H"] \\ & B \times I & \\ B \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "g"'] & & X \end{tikzcd}$$

Definición 1.7. *El cono reducido sobre un espacio X, denotado por cX es definido por $X \wedge I$ (punto base de I es 1).*

Definición 1.8. *Para cada aplicación $f : A \to B$, la aplicación cono de f, denotado por C_f es definido como el espacio obtenido de B identificando, paracada $a \in A$ los puntos.*

$$a \wedge o \in cA \ y \ f(a) \ en \ B$$



Proposición 1.1. *Para Y un H-espacio homotópicamente asociativo con inverso, la sucesión $A \xrightarrow{f} B \xhookrightarrow{f'} C_f$, induce una sucesión exacta de grupos*

$$[C_f, Y] \xrightarrow{(f)^*} [B, Y] \xrightarrow{f^*} [A, Y]$$

La construcción de C_f puede iterarse y obtener una sucesión larga de espacios y aplicaciones.

$$A \xrightarrow{f} H \xrightarrow{f'} C_f \xrightarrow{f''} C_{f'} \xrightarrow{f^{(3)}} C_{f''} \longrightarrow \dots$$

Corolario 1.1. *Para Y un H-espacio asociativo con inverso, la sucesión de grupos*

$$\dots \longrightarrow C[C_{f'}, Y] \xrightarrow{(f'')^*} [C_f, Y] \xrightarrow{(f')^*} [B, Y] \xrightarrow{f^*} [A, Y]$$

es exacta.

Proposición 1.2. *Si $f : A \to B$ es una aplicación cofibración entonces $C_f \simeq \dfrac{B}{f(A)}$.*

Definición 1.9. *Dados los espacios X e Y, la junta (join) de X con Y, $X * Y$, es el espacio cociente:*

$$X * Y = \frac{X \times I \times Y}{\sim}$$

donde: $\dfrac{(x, 0, y) \sim (x, 0, y')}{(x, 1, y) \sim (x', 0, y)}$*, para todo $x, x' \in X$ y para todo $y, y' \in Y$, $I = [0, 1]$.*

Si (X, m) es un H-espacio, existe una aplicación bien definida:

$$\begin{array}{cccc} h: & X * X & \longrightarrow & \sum X \\ & (x, t, y) & \longmapsto & h[x, t, y] = (m(x, y), t) \end{array}$$

a la cofibra de h se denomina el Plano Proyectivo $P_2 X$.

Algunas veces es usual reemplazar $X * X$ por $\sum(X \wedge X)$ vía la equivalencia homotópica

$$X * X \xrightarrow{\mathscr{K}} \sum(X \times X) \xrightarrow{\sum q} \sum(X \wedge X)$$

$$\mathscr{K}[x, t, y] = (x, y, t) \quad , \quad q : X \times X \to X \wedge X \text{ aplicación cociente}$$

Existe una aplicación

$$\theta_X : \sum(X \wedge X) \to \sum X$$
$$\theta_X = -\sum \pi_1 + \sum m - \sum \pi_2$$

Aquí estamos usando el hecho de que las multiplicaciones de una suspensión en otro espacio forma un grupo.
La cofriba de θ_X es también considerado como P_2X salvo homotopía.

Proposición 1.3. *Sean (X, m_X) y (Y, m_Y) H-espacio, una H-aplicación $f : X \to Y$ induce una aplicación $P_2f : P_2X \to P_2Y$.*

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\sum(X \wedge X) \arrow[r, "\sum(f\wedge f)"] \arrow[d, "\theta_X"'] & \sum(Y \wedge Y) \arrow[d, "\theta_Y"] \\
\sum X \arrow[r, "\sum f"] \arrow[d, "i_X"'] & \sum_Y \arrow[d, "i_Y"'] \\
P_2X \arrow[r] & P_2Y
\end{tikzcd}$$

La propiedad de cofibración implica la existencia de una aplicación: $P_2f : P_2X \to P_2Y$ que extiende $\sum f$.
Dado un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\sum X \arrow[r, "\sum f"] \arrow[d] & \sum Y \arrow[d] \\
P_2X \arrow[r, "P_2f"] & P_2Y
\end{tikzcd}$$

f es una H-aplicación. $\square$

Si (Y, m_Y) es un H-espacio con inverso $\sigma : Y \to Y$ podemos considerar la aplicación $D_f : X \times X \to Y$, donde X es también H-espacio definida por:

$$D_f(X_1, X_2) = m_Y(f m_X(X_1, X_2), m_Y(\sigma(X_2), \sigma(X_1)).$$

Si el punto base actúa como la identidad $D_f : (X \vee X) = Y_0$ la aplicación inducida por D_f

$$\widehat{D}_f : X \wedge X \to Y$$

Se denomina H-desviación de f.
Podemos reformular $\widehat{D}$ en términos del plano proyectivo.
Existe el siguiente diagrama (posiblemente no conmutativo)

$$\begin{tikzcd}
\sum(X \wedge X) \arrow[r, "\sum(f\wedge f)"] \arrow[d, "\theta_X"'] & \sum(Y \wedge Y) \arrow[d, "\theta_Y"] \\
\sum X \arrow[r, "\sum f"] \arrow[d, "i_X"'] & \sum Y \arrow[d, "i_Y"] \\
P_2X & P_2Y
\end{tikzcd}$$

las columnas son cofibraciones.
Definamos la H-desviación:

$$\widetilde{D}_f : \sum(X \wedge X) \to \sum Y$$
$$\widetilde{D}_f = \sum f\theta_X - \theta_Y \sum(f \wedge f)$$

Proposición 1.4. *$i_Y\widetilde{D}_f \simeq * \Leftrightarrow f$ es una H-aplicación.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos $i_Y\widetilde{D}_f \simeq *$ entonces $* \simeq i_Y\widetilde{D}_Y \simeq i_Y \sum f\theta_X$, puesto que $i_Y\theta_Y \simeq *$ por la propiedad de cofibración de la columna de la derecha de $*$.

Por el hecho de que la columna de la izquierda de $(*)$ es cofibración, existe una aplicación

$$P_2f : P_2X \to P_2Y$$

Tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\sum X \arrow[r, "\sum f"] \arrow[d, "i_X"'] & \sum Y \arrow[d, "i_Y"] \\
P_2X \arrow[r, "P_2f"] & P_2Y
\end{tikzcd}$$

conmuta, luego f es una H-aplicación.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es una H-aplicación, existe P_2f, luego:

$$i_Y \sum f\theta_X = P_2fi_X\theta_X \simeq *$$

de donde:

$$i_Y\widetilde{D}_f = i_Y \left(\sum f\theta_X - \theta_Y \sum(f \wedge f)\right) \simeq *$$

□

Proposición 1.5. *Sean X, Y, Z H-espacios, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ aplicaciones. Entonces $\widetilde{D}_{gf} \simeq \sum g\widetilde{D}_f + \widetilde{D}_g \sum(f \wedge f)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_{gf} &= \sum(gf)\theta_X - \theta_2\left(\sum gf \wedge gf\right) \\
&\simeq \sum g\left(\sum f\theta_X - \theta_Y \sum(f \wedge f)\right) + \left(\sum g\theta_Y - \theta_Z \sum(g \wedge g)\right)\sum(f \wedge f) \\
&= \sum g\widetilde{D}_f + \widetilde{D}_g(f \wedge f)
\end{aligned}$$

Hay una correspondencia biyectiva de $H^n(X, \mathscr{K})$ en $[X, K(\mathscr{K}, n)]$ donde $\mathscr{K}$ es un cuerpo y $K(\mathscr{K}, n)$ espacios de Gilemberg Maclane.
También $K(\mathscr{K}, n) = \Omega K(\mathscr{K}, n+1)$ es un H-espacio. Si $[f] \in H^n(X, \mathscr{K})$, $f : X \to K(\mathscr{K}, n)$ es una H-aplicación si y solo si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "m_X"'] & K(\mathscr{K}, n) \times K(\mathscr{K}, n) \arrow[d, "m_K"] \\
X \arrow[r, "f"'] & K(\mathscr{K}, n)
\end{tikzcd}$$

conmuta salvo homotopía.
Esto es, $m_K(f \times f) \simeq fm_X$.

$$[m_K(f \times f)] \quad , \quad [fm_X] \in [X \times X, K(\mathscr{K}, n)] = H^n(X \times X, \mathscr{K})$$

Si $\mathscr{K}$ es un campo

$$\begin{aligned}
[m_K(f \times f) - fm_{\mathscr{K}}] &= [m_K(f \times f)] - [fm_{\mathscr{K}}] \\
&= (f^* \otimes f^*)\Delta(in) - \Delta f^*(in) \\
&= (f^* \otimes f^*)(in \otimes id + id \otimes in) - f^*(in) \otimes id - id \otimes f^*(in) \\
&= -\overline{\Delta} f^*(in)
\end{aligned}$$

donde $\overline{\Delta}(X) = \Delta(X) - X \otimes 1 - 1 \otimes X$, luego $D^*_f(in) = \overline{\Delta} f^*(in) = \overline{D}(f)$. $\square$

1.2. Álgebra de Hopf y otras definiciones

Definición 1.10. *Un K-módulo graduado A es una familia de K-módulos $\{A_n\}$, $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Definición 1.11. *Si A y B son K-módulos graduados,un morfismo de K-módulos graduados $f : A \to B$ es una familia de morfismos $\{f_n\}$ tal que $f_n : A_n \to B_n$ es un morfismo de K-módulos.*

Definición 1.12. *Un álgebra sobre K, es un K-módulo graduado A, juntamente con morfismos de K-módulos graduados*

$$\varphi : A \otimes A \to A \qquad \wedge \qquad \eta : K \to A$$

Tal que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "1_A\otimes\varphi"] \arrow[d, "\varphi\otimes 1_A"'] & A\otimes A \arrow[d, "\varphi"] \\
A\times A \arrow[r, "\varphi"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K\otimes A \arrow[rr, "\eta\otimes 1_A"] & & A\otimes A \arrow[dl, "\varphi"] \\
& A \arrow[ul, "\cong"] \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
A\otimes K \arrow[rr, "1_A\otimes\eta"'] & & A\otimes A
\end{tikzcd}
$$

son conmutativos.

El morfismo φ es llamado multiplicación del álgebra y η es llamado la unidad de A.
Una aumentación de una álgebra A es un morfismo de álgebras $\varepsilon : A \to K$ y una álgebra A juntamente con una aumentación ε es llamado **álgebra conmutativa (o suplementada)**.

Definición 1.13. *Una coálgebra sobre K es un K-módulo graduado A juntamente con morfismos de K-módulos graduados*

$$\Delta : A \to A\otimes A \qquad \wedge \qquad \varepsilon : A \to K$$

Tal que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A\otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes 1_A"] \\
A\times A \arrow[r, "1_A\otimes\Delta"'] & A\otimes A\otimes A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[rr, "\varepsilon\otimes 1_A"] & & K\otimes A \arrow[dl, "\cong"] \\
& A \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\
A\otimes A \arrow[rr, "1_A\otimes\varepsilon"'] & & A\otimes K
\end{tikzcd}
$$

son conmutativos.

El morfismo "Δ" es llamado la comultiplicación del coálgebra A y ε es llamado la unidad de A.
Una aumentación es un morfismo de coálgebras $\eta : K \to A$ y una coálgebra aumentada.

Definición 1.14. *Un álgebra de Hopf sobre K es un K-módulo graduado A junto con morfismos de K-módulos graduados*

$$
\begin{array}{lcl}
\varphi : A\otimes A \to A & , & \eta : K \to A \\
\Delta : A \to A\otimes A & , & \varepsilon : A \to K
\end{array}
$$

tal que

(1) (A, φ, η) *es un álgebra sobre K en aumentación ε.*

(2) (A, Δ, ε) *es un coálgebra sobre* K *con aumentación* η.

(3) *El diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "A\otimes A"] & A \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[d, "\varphi\otimes\varphi"] \\ A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "1_A\otimes T\otimes 1_A"'] & & A \otimes A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Consideremos un álgebra aumentada A, $\varepsilon : A \to K$ una aumentación $I(A) = \ker(\varepsilon)$ ideal aumentación de A.

$$K \xrightarrow{\eta} A \xrightarrow{\varepsilon} K \quad , \quad \varepsilon\eta = 1_K$$

$A = \mathrm{Im}g(\eta) \oplus \ker(\varepsilon) = K \otimes I(A)$.

Definición 1.15. *Sea* $A = H(\nabla, \eta, \Delta, \varepsilon, s)$ *un álgebra de Hopf. Un elemento* x *de* A *que satisface:* $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ *se llama elemento primitivo.*

Definición 1.16. *Si* A *es un álgebra de Hopf, el módulo de primitivos es denotado por* $P(A)$ *y es definido por:*

$$P(A) = \{X \in A / \Delta X = X \otimes 1 + 1 \otimes X\}$$

Una aplicación $f : A \to B$ de álgebras de Hopf que preservan productos y coproductos induce una aplicación $P(f) : P(A) \to P(B)$.
El módulo de indescomponibles es denotado por $Q(A)$ y es definido por:

$$Q(A) = \frac{I(A)}{I(A)I(A)} \quad , \quad I(A) \text{ ideal aumentación de } A.$$

A es primitivamente generado si la aplicación natural

$$P(A) \longrightarrow I(A) \longrightarrow Q(A) \text{ es sobre.}$$

Proposición 1.6. $f : X \to K(\mathscr{K}, n)$ *es una* H*-aplicación, entonces*

(*a*) $[f] \in H^n(X, \mathscr{K})$ *es primitivo y recíprocamente.*

(*b*) f *es adjunto a una aplicación* $f' : \sum X \to K(\mathscr{K}, n+1)$ *que extiende a* P_2S *y recíprocamente.*

Demostración.

(*a*) $(\Rightarrow)$ f es una H-aplicación, $\mathfrak{M}_K(f \times f) \simeq f\mathfrak{M}_X$, entonces $[\mathfrak{M}_K(f \times f)] = [f\mathfrak{M}_X]$ es decir $\overline{\Delta}[f] = 0$

$$0 = \overline{\Delta}[f] = \Delta[f] - [f] \otimes 1 - 1 \otimes [f]$$
$$\Delta[f] = [f] \otimes 1 + 1 \otimes [f]$$

luego $[f]$ es primitivo.

($\Leftarrow$) $[f] \in H^n(X, \mathscr{K})$ primitivo entonces $\Delta f = [f] \otimes 1 + 1 \otimes [f]$ pero

$$\overline{\Delta} f = \Delta f - [f] \otimes 1 - 1 \otimes [f] = 0$$
$$\overline{\Delta} f = 0$$

esto es

$$[\mathfrak{M}_K(f \times f)] = [f \mathfrak{M}_X]$$
$$\mathfrak{M}_K(f \times f) \simeq f \mathfrak{M}_X$$

el diagrama siguiente conmuta salvo homotopía.

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\mathfrak{M}_X"'] & K(\mathscr{K}, n) \times K(\mathscr{K}, n) \arrow[d, "\mathfrak{M}_K"] \\ X \arrow[r, "f"'] & K(\mathscr{K}, n) \end{tikzcd}$$

Así f es una H-aplicación.

(b) Si f es una H-aplicación, existe un diagrama conmutativo esto es

$$\begin{tikzcd} \sum X \arrow[r, "\sum f"] \arrow[d, "i_1(X)"'] & \sum K(\mathscr{K}, n) \arrow[d, "i_1(\mathscr{K})"] & \\ P_2 X \arrow[r, "P_2 f"] & P_2 K(\mathscr{K}, n) \arrow[r, "\mathfrak{N}"] & K(\mathscr{K}, n+1) \end{tikzcd}$$

con $\mathfrak{N} i(K) \sum f$ adjunto a f, $\overline{f} = \mathfrak{N} P_2 f$. □

2. Homología de H-espacios

en esta sección mostraremos mostraremos el Teorema, relacionado al cálculo de homología de H-espacios, y consecuentemente presentamos algunos resultados. No haremos suposiciones especiales de asociatividad; en caso contrario (no asociatividad), definimos por inducción la n-ésima potencia, esto es: $x^0 = 1$, supongamos que está definido x^n, entonces $x^{n+1} = x^n \dot{x}$.
Si M es un módulo sobre el anillo $\mathbb{Z}_p$ con p-primo, el dual de M descrito como $M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}_p)$, para $\varphi \in M^*$, $m \in M$, denotamos por $\varphi(m)$ elemento en $\mathbb{Z}_p$, el valor del homomorfismo φ evaluado en m. En este mismo contexto si E un álgebra de Hopf sobre $\mathbb{Z}_p$; entonces su álgebra de hopf dual será denotado por E^*.

Definición 2.1. *Un elemento $x \in E^n$ se dice que tiene **implicaciones infinitas** (co-implicaciones) si existe una secuencia de elementos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, con $x_0 = x$, $x_k \in E^{mp^k}$, $x_k \neq 0$ tal que para cada k cualquiera se tiene:*

i) $x_{k+1} = x_k^p$ *o*

ii) *Existe $\varphi_k \in E^*$ tal que $\varphi_k(x_k) \neq 0$ y $\varphi_k^p(x_{k+1}) \neq 0$.*

Observación.

1. *De la definición anterior, si E y E^* son asociativas, entonces tales álgebras (E y E^*) son equivalentes. La existencia de un elemento que soporta la definición 2.1 implica que E es infinito dimensional.*

2. *Previamente al resultado principal, presentamos seis proposiciones que facilitarán la prueba del resultado en mención.*

Proposición 2.1. *Sean E un álgebra de Hopf, y $\Psi : E \to E \otimes E$ la aplicación diagonal (co-álgebra) entonces $\Psi(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \otimes x^k$, donde x es un elemento primitivo en E^{2m}.*

Demostración. Usando inducción matemática, y de manera análoga al Teorema binomial de Newton, con respecto al número combinatorio $\binom{n}{k}$. □

Proposición 2.2. *Sea E un álgebra diferencial de Hopf sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_p$, $\Psi : E \to E \otimes E$ la aplicación diagonal, E^* el álgebra dual de Hopf de E, así que $\Psi^* : E^* \otimes E^* \to E^*$ es su multiplicación. Sea x un elemento primitivo en E^{2m}, $\varphi \in E^*$. Entonces $\varphi^n(x^n) = n!(\varphi(x))^n$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\varphi^n(x^n) &= (\Psi^*(\varphi^{n-1} \otimes \varphi))(x^n) \\
&= (\varphi^{n-1} \otimes \varphi)(\Psi(x^n)) \\
&= (\varphi^{n-1} \otimes \varphi) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \otimes x^k \\
&= (\varphi^{n-1} \otimes \varphi)(nx^{n-1} \otimes x) \\
&= n[\varphi^{n-1}(x^{n-1}) \circ \varphi(x)] \\
&= n!(\varphi(x))^n
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.3. *Sea E un álgebra diferencial de Hopf sobre $\mathbb{Z}_p$ con diferencial d, y de grado -1; E^* su álgebra dual diferencial de Hopf, $E \xrightarrow{\Psi} E \otimes E \xrightarrow{\gamma} E$, y $E_0 = \mathbb{Z}_p$. Sea $x \neq 0$ un elemento primitivo de E_{2n} con $x = dy$, $y \in E^*_{2n}$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ y pongamos $d^*\varphi = \eta$ con $\eta = y^*$ (elemento dual de y). Entonces $(\varphi^{p-1}\eta)(x^{p-1}y) \neq 0$.*

Demostración. Observemos que

$$\eta(y) = (d^*\varphi)(y) = \varphi(dy) = \varphi(x) \neq 0 \tag{1}$$

entonces $(\varphi^{p-1}\eta)(x^{p-1}y) = [\Psi^*(\varphi^{p-1} \otimes \eta)](x^{p-1}y)$, también

$$(\varphi^{p-1} \otimes \eta)[\Psi(x^{p-1}y)] = [\varphi^{p-1} \otimes \eta][\Psi(x^{p-1})\Psi(y)] \tag{2}$$

Sabemos que, por definición Ψ es una aplicación de álgebras. Ahora usando la proposición 2.1, se tiene

$$\Psi(x^{p-1}) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} x^{(p-1)-k} \otimes y$$

y sea $\Psi y = \sum y'_k \otimes y_k + y \otimes 1 + 1 \otimes y$. Puesto que η anula cualquier elemento que no esté en dimensión $2n+1$, entonces la expresión (2) se reduce a

$$(\varphi^{p-1} \otimes \eta) \left[x^{p-1} \otimes y + (p-1) \sum_t x^{p-2} y'_t \otimes x y_t \right] \tag{3}$$

donde "t" es tal que $\dim(y_t) = 1$, entonces

$$(\varphi^{p-1} \otimes \eta)(x^{p-1} \otimes y) = \varphi^{p-1}(x^{p-1}) \cdot \eta(y) \neq 0$$

pues observe (1) y la proposición 2.2.
Nosotros mostramos que el valor de $\varphi^{p-1} \otimes \eta$ del segundo término en (3) se anula mostrando que $\eta(xz) = 0$ si $z \in E^1$. Para $\eta(xz) = (d^*\varphi)(xz) = \varphi(d(xz))$, pero $x = dy$, de donde $dx = d(dy) = 0$, y así $d(xz) = xd(z)$. Si $d(z) \neq 0$ en E_0, entonces existe un elemento $w \in E^0$ tal que $d^*w \neq 0$ en E_1. Pero $w = \alpha \cdot 1$ donde $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ puesto que $E^0 = \mathbb{Z}_p$ y $d(1) = d(1 \cdot 1) = d(1) \cdot 1 + 1 \cdot d(1) = 2d(1)$, de aquí $d(1) = 0$. También $d(w) = d(\alpha \cdot 1) = \alpha d(1) = 0$, por eso $dz = 0$, $d(xz) = 0$ y $\eta(d(xz)) = \varphi(0) = 0$, y de este modo se tiene el resultado. □

Proposición 2.4. *Sea E un álgebra diferencial de Hopf, y sea $x \in H(E)$ el cual es un álgebra diferencial de Hopf. Si $\{y\} = x$ para $y \in E$ y $x^p \neq 0$, entonces $y^p \neq 0$. Además si x posee implicaciones infinitas (co-implicaciones) en $H(E)$ entonces y también tiene implicaciones infinitas en E.*

Demostración. Como $x = \{y\}$ entonces $x^p = \{y^p\}$, y así $y^p \neq 0$. Usando este argumento en cada paso, se obtiene que "y" posee implicaciones infinitas en e, nótese que, siendo $\varphi(x) \neq 0$ y $\{\overline{y}\} = \overline{x}$, entonces $\varphi(y) \neq 0$ con $\varphi \in H(E^*) = [H(E)]^*$, $\varphi \in E^*$. □

Proposición 2.5. *Sea E un álgebra de Hopf sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_p$, $x \in E^{2n}$ un elemento primitivo, $x^p = 0$, $dy = x$. Si $\xi = \{x^{p-1}y\} \neq 0$ en $H(E)$, entonces ξ es primitivo.*

Demostración. Sean las aplicaciones coálgebras $\Psi : E \to E \otimes E$ y $\widetilde{\Psi} : H(E) \to H(E) \otimes H(E)$ de E y $H(E)$ respectivamente, entonces $\widetilde{\Psi}\{x^{p-1}y\} = \{\Psi(x^{p-1}y)\}$. Como x es primitivo $d(\Psi y) = \Psi(dy) = \Psi(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x = dy \otimes 1 + 1 \otimes dy$ si y solo si $d[\Psi(y) - y \otimes 1 - 1 \otimes y] = 0$. Ahora aplicando la proposición 2.1

$$\Psi(x^{p-1}) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} x^{p-1-k} \otimes x^p \quad \text{y} \quad \binom{p-1}{k} - (-1)^k = \mathring{p},$$

de aquí

$$\begin{aligned}
\Psi(x^{p-1}y) &= [\Psi(x^{p-1})][\Psi(y)] \\
&= \left[\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k x^{p-1-k} \otimes x^k\right][y \otimes 1 + 1 \otimes y + (\Psi(y) - y \otimes 1 - 1 \otimes y)] \\
&= x^{p-1}y \otimes 1 + 1 \otimes x^{p-1}y + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k x^{p-1-k} \otimes x^k y + \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k x^{p-1-k} y \otimes x^k \\
&\quad + [\Psi x^{p-1}][\Psi y - y \otimes 1 - 1 \otimes y] \\
&= x^{p-1}y \otimes 1 + 1 \otimes x^{p-1}y + d\left[\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k+1}(x^{p-1-k}y \otimes x^{k-1}y)\right] \\
&\quad + d((\Psi(x^{p-2}y))(\Psi y - y \otimes 1 - 1 \otimes y).
\end{aligned}$$

De aquí $\{\Psi(x^{p-1}y)\} = \{x^{p-1}y\} \otimes 1 + 1 \otimes \{x^{p-1}y\}$ y $\{x^{p-1}y\}$ es primitivo. □

Proposición 2.6. *Sea X un H-espacio, $\pi : X \times X \to X$. Sea $\overline{x} \in H_{2n}(X; \mathbb{Z}_2)$ un elemento primitivo, $\overline{y} \in H_{2n+1}(X; \mathbb{Z}_2)$ y $z \in H^{2n+1}(X; \mathbb{Z}_2)$. Entonces $(Sq^{2n}z)(\overline{xy}) = 0$.*

Demostración. $(Sq^{2n}z) = (\pi^* Sq^{2n}z)(\overline{x} \otimes \overline{y}) = (Sq^{2n}\pi^* z)(\overline{x} \otimes \overline{y})$. Escribamos $\pi^*(z) = \sum_k z_k \otimes z'_k$ con $\dim z_k + \dim z'_k = 2n + 1$. Recordando la fórmula de Cartan: $Sq^k(ab) = \sum_{j=0}^{k} Sq^j a Sq^{k-j} b$, usando dicha fórmula tenemos:

$$Sq^{2n}(z_j \otimes z'_j) = \sum_{i+j=2n} Sq^i z_k \otimes Sq^j z'_k.$$

Ahora, si $i > \dim z_k$ (o $j > \dim z'_k$) entonces tenemos $Sq^i z_k = 0$ ($Sq^j z'_k = 0$). por esta razón

$$Sq^{2n}(z_k \otimes z'_k) = Sq^t z_k \otimes Sq^{d-1} z'_k + Sq^{t-1} z_k \otimes Sq^d z'_k,$$

para $t = \dim z_k$, $d = \dim z'_k$, $t+d = 2n+1$. Pero $Sq^t z_k = (z_k)^2$ y $(z_k)^2(\overline{x}) = 0$, como $\overline{x}$ es primitivo y recordando el resultado siguiente: «Si E es un álgebra, $x \in E$ es no descomponible, entonces existe $\overline{x} \in E^*$, tal que $\overline{x}$ es primitivo y $\varphi(x) \neq 0$. Además, cualquier elemento primitivo $\varphi \in E^*$ anula todo elemento descomponible», se tiene que: $(Sq^t z_k \otimes Sq^{d-1} z'_k)(\overline{x} \otimes \overline{y}) = 0$, también $Sq^d z'_k = (z'_k)^2$ que incluso es dimensional, y de este modo $(Sq^d z'_k)(\overline{y}) = 0$, y así $(Sq^{t-1} z_k \otimes Sq^d z'_k)(\overline{x} \otimes \overline{y}) = 0$. Por tanto $(Sq^{2n}(z_k \otimes z'_k))(\overline{x} \otimes \overline{y}) = 0$ para todo k, de manera que $(Sq^{2n}z)(\overline{xy}) = 0$. □

Ahora, luego de estas proposiciones antes mostradas probaremos el resultado principal del trabajo.

Proposición 2.7. *Sea X un H-espacio arco conexo, con $H_k(X)$ finitamente generado para cada k, y sea $\beta = \{F^{(r)}\}_{r \in \mathbb{N}}$ la sucesión espectral de Bockstein de X en homología módulo "p". Si $x \in F^{(r)}_{2n}$ es un elemento primitivo, y $x = d^{(r)} y \neq 0$ entonces x posee implicaciones infinitas.*

Demostración. Para mostrar que el elemento $x \in F^{(r)}$ posee implicaciones infinitas (co-implicaciones), construiremos una sucesión de elementos $x = x_0, x_1, x_2, \ldots$, en $F^{(r)}$. Nosotros probaremos la proposición mostrando que siempre podemos construir el paso siguiente en la secuencia.
Sin embargo, frecuentemente resultará que las propiedades de $x_{k+1} \in F^{(r)}$ no son lo suficientemente buenas para aplicar los mismos argumentos anteriores; por ejemplo, puede ser que ninguno de los x_{k+1} sea primitivo, ni en el borde en $F^{(r)}$. Nuestro método de construcción no obstante asegurará que la imagen de x_{k+1} tendrá estas propiedades en $F^{(r+s)}$ para algún s, y así nosotros continuaremos construyendo elementos en $F^{(r+s)}$, entonces por la proposición 2.4 los representativos de estos elementos serán los términos de la secuencia implicación infinita en $F^{(r)}$.
Podemos asumir que $x^p = 0$. Por si, x^p no fuera nuevamente primitivo (en este caso ver: por proposición 2.1) y $x^p = d^{(r)}(x^{p-1}y)$. Por esta razón podemos empezar con x^p en lugar x, y si nosotros nunca alcanzamos que una p-ésima potencia p^{th} sea cero, entonces tenemos construida nuestra secuencia implicación infinita.
Encontraremos un elemento $x_1 \in F^{(r)}_{2np}$ tal que $\overline{x}^p(x_1) \neq 0$ para cualquier elemento $\overline{x}$ en $F^{2n}_{(r)}$ tal que $\overline{x}(x) \neq 0$. El elemento x_1 tampoco será primitivo en la frontera en $F^{(r)}$, pero $\{x_1\}$ posee estas propiedades en $F^{(r+1)}$, así que nosotros podemos proceder con el argumento en $F^{(r+1)}$ en el mismo camino.
Primero mostramos que $\{\overline{x}^p\} \neq 0$ en $F_{(r+1)}$ mostrando $\{\overline{x}^{p-1}(d_{(r)}\overline{x})\} \neq 0$ en $F_{(r+1)}$ y usando el resultado:
(R_0): ≪Sea $x \in F^{2n}_{(r)}$ y $d_{(r)}x \neq 0$ y si $p \neq 2$ o $r \neq 1$, supóngase $\{x^{p-1}y\} \neq 0$ en $F_{(r+1)}$. Si $p = 2$ y $r = 1$, supóngase $\{Sq^{2n}y + xy\} \neq 0$ en $F_{(2)}$. Entonces $x^p \neq 0$ y $d_{(r+1)}\{x^p\} = x\{x^{p-1}y\} \neq 0$ si $p \neq 2$ o $r \neq 1$, y $d_{(2)}\{x^2\} = \{Sq^{2n} + xy\}$ si $p = 2$, $r = 1$ ≫.
Con las modificaciones apropiadas en el argumento si $p = 2$ y $r = 1$.

Si $\overline{x} \in F^{2n}_{(r)}$ es tal que $\overline{x}(x) \neq 0$, entonces pongamos $\overline{y} = d^{(r)}\overline{x}$. Entonces $\overline{y}(y) = (d_{(r)}\overline{x})(y) = \overline{x}(d^{(r)}y) = \overline{x}(x) \neq 0$. De este modo la proposición 2.3 implica que $\overline{x}^{p-1}\overline{y}(x^{p-1}y) \neq 0$. Ahora $d_{(r)}(\overline{x}^{p-1}\overline{y}) = (p-1)\overline{x}^{p-2}\overline{y}^2 = 0$ si $p \neq 2$ o $r > 1$. Por si $p \neq 2$ entonces $\overline{y}^2 = 0$ porque $\overline{y}$ es dimensional extraña si $p = 2$ y $r > 1$ entonces $\overline{y}^2 = \{Sq^{2n+1}z\} = \{Sq^1 Sq^{2n}z\} = 0$ en $F_{(2)}$, donde $z \in F_{(1)}$ es tal que $\{z\} = \overline{y}$ en $F_{(r)}$. Si $p = 2$, $r = 1$ entonces $d_{(1)}\ (Sq^{2n}\overline{y} + \overline{xy}) = \overline{y}^2 + \overline{y}^2 = 0$ y $[Sq^{2n}\overline{y} + \overline{xy}] \neq 0$ por proposiciones 2.3 y 2.6. Ahora si $\overline{x}^{p-1}\overline{y} = d_{(r)}z$ entonces:

$$\begin{aligned}(\overline{x}^{p-1}\overline{y})(x^{p-1}y) &= (d_{(r)}z)(x^{p-1}y) = z[d^{(r)}(x^{p-1}y)]\\ &= z(x^p) = z(0) = 0,\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Análogamente $(Sq^{2n}\overline{y} + \overline{xy}) \neq d_{(r)}z$. Por tanto $\{\overline{x}^{p-1}\overline{y}\} \neq 0$ en $F_{(r+1)}$, osi $p = 2$, $r = 1$, $\{Sq^{2n}\overline{y} + \overline{xy}\} \neq 0$ en $F_{(2)}$. Nuevamente por el resultado (R_0), $\overline{x}^p \neq 0$ y $d_{(r+1)}\{\overline{x}^p\} = x\{\overline{x}^{p-1} \cdot \overline{y}\}$ con $c \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$ o $d_{(2)}\{\overline{x}^2\} = \{Sq^{2n}\overline{x} + \overline{xy}\}$ si $p = 2$ y $r = 1$.

Enseguida mostraremos que existe un elemento primitivo $\alpha \in^{(r+1)}_{2np}$ con $\{\overline{x}^p\}(\alpha) \neq 0$ y $\alpha = d^{(r+1)}\beta$. Entonces empezando de α nosotros continuamos construyendo una sucesión en $F^{(r+1)}$ en el mismo camino. Si $x_1 \in F^{(r)}$ tal que $\{x_1\} = \alpha \in F^{(r+1)}$ entonces $\overline{x}^p(x_1) \neq 0$ así que x_1 puede ser tomado como el siguiente paso en la sucesión implicación infinita para el elemento x, y por la proposición 2.4, la existencia del siguiente paso en la sucesión en $F^{(r+1)}$ implica su existencia en $F^{(r)}$. Por eso esta construcción nunca termina y por consiguiente produce una sucesión implicación infinita.

Primero note que $d^{(r)}(x^{p-1}y) = x^p = 0$. Si $x^{p-1}y = d^{(r)}z$ entonces

$$(\overline{x}^{p-1}y)(x^{p-1}y) = (\overline{x}^{p-1}\overline{y})(d^{(r)}z) = (d_{(r)}(\overline{x}^{p-1}\overline{y}))(z) = 0$$

desde que $\overline{x}^{p-1}\overline{y}$ es un ciclo; o si $p = 2$, $r = 1$, $(Sq^{2n}\overline{y} + \overline{xy}) = 0$ se produce análogamente. Pero esto es una contradicción así que $x^{p-1}y \neq d^{(r)}z$ y $\beta = \{x^{p-1}y\} \neq 0$ en $F^{(r+1)}$.

Por esta razón $\{\overline{x}^{p-1}\overline{y}\}(\beta) \neq 0$ y por consiguiente $\{\overline{x}^p\}(d^{(r+1)}(\beta)) = c\{\overline{x}^{p-1}\overline{y}\}(\beta) \neq 0$, así poniendo $\alpha = d^{(r+1)}\beta$, entonces si α es primitivo en $F^{(r+1)}$ nosotros hemos terminado; mientras que si β es primitivo, entonces $\alpha = d^{(r+1)}\beta$ también lo es, pero β primitivo se sigue de la proposición 2.5 en consecuencia se completa y culmina la prueba. $\square$

Observación. *La sucesión implicación infinita construida líneas arriba tiene la siguiente propiedad: Si $x_1^p = 0$ entonces $\overline{x}_i^p(x_{i+1}) \neq 0$ para cualquier $\overline{x}_i \in F_{(r)}$ tal que $\overline{x}_i(x_i) \neq 0$. En particular $x = d^{(r)}y$,con x primitivo en $F^{(r)}_{2n}$,$x^p = 0$, entonces $\overline{x}^p \neq 0$ para cualquier elemento $\overline{x}$ en $F^{2n}_{(r)}$ tal que $\overline{x}(x)$ es diferente de cero.*

Proposición 2.8. *Sea X un H-espacio arco conexo con $H_k(x)$ finitamente generado para cada k, y supóngase que existe un número natural n_0 tal que $H_k(X;\mathbb{Z}_p) = 0$ para todo $k > n_0$. Ahora si $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ (aplicación reducción módulo "p") y $j_* : H_*(X,\mathbb{Z}) \to H_*(X,\mathbb{Z}_p)$ la aplicación inducida por "j" entonces la imagen de j_* inclusive no contiene elementos primitivos dimensionales.*

Demostración. Si $x \in \mathrm{Im}(j_*)$ es un elemento primitivo, entonces x es un ciclo bajo $d^{(r)}$ para todo r. Ahora recordando el resultado: $\ll R^*$: Si X es un H-espacio arco conexo con $H_k(X)$ finitamente generado para cada k, y supóngase que $H^*(X,\mathbb{Z}_p)$ es un $\mathbb{Z}_p$-módulo finito entonces existen elementos primitivos en $F^{(\infty)}$ incluso no dimensionales$\gg$.

Usando este resultado R^*, se tiene $\{x\} = 0$ en $F^{(\infty)}$, y así $\{x\} = d^{(r)}y$ en $F^{(r)}$ para algún r, entonces por la proposición 2.7, se tiene que $\{x\}$ es de implicaciones finitas, por tanto $H_{2np^k}(X,\mathbb{Z}_p) \neq 0$ para todo k, lo cual es una contradicción. $\square$

Proposición 2.9. *Sea X como en la proposición 2.8, si $h : \pi_m(X) \otimes \mathbb{Z}_p \to H_m(X,\mathbb{Z}_p)$ es el homomorfismo de Hurewicz módulo "p", entonces $h = 0$ para cada m.*

Demostración. Sabemos que todos los ciclos de la esfera son primitivos y enteros. Por tanto $\mathrm{Im}(h)$ está formado de ciclos primitivos, más aún $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Im}(j_*)$, y así por la proposición 2.8, se tiene que $(\mathrm{Im}(h))_{2n}$ es nulo. □

Proposición 2.10. *Sea X un H-espacio arco conexo, entonces el primer grupo no trivial $\pi_m(x) \otimes \mathbb{Z}_p$ para $m > 1$, ocurre para m impar.*

Demostración. Como X es un H-espacio arco conexo, entonces por el Teorema de Serre-Hurewicz, se tiene que h es un isomorfismo para el primer grupo no nulo. Por tanto usando la proposición 2.9 se tiene el resultado. □

Ahora si X no es simplemente conexo,entonces su cubrimiento universal denotado por $\overline{X}$ es un H-espacio, y $\pi_1(X)$ actúa trivialmente sobre la homología de $\overline{X}$, entonces se sigue que $H_k(\overline{X})$ es finitamente generado para cada k y por tanto $H_k(\overline{X}) = 0$ para $k > n_0$; de este modo podemos aplicar el argumento anterior a $\overline{X}$, y en consecuencia el resultado se sigue del hecho que: $\pi_m(X) \otimes \mathbb{Z}_p \cong \pi_m(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_p$ para $m > 1$.

Proposición 2.11. *Sea X un H-espacio arco conexo con $H_k(X)$ finitamente generado para cada k, y $H_k(X) \neq 0$ para solo un número finito k, entonces el primer grupo no nulo grande de homotopía $\pi_m(X)$, $m > 1$ ocurre para m impar. En particular $\pi_2(X) = 0$.*

Demostración. La demostración es directa al aplicar la proposición 2.10 para todo p. □

Los resultados que presentamos a continuación son aplicaciones directas del resultado principal (es decir, proposición 2.7).

Proposición 2.12 (Aplicación). *Sea X un H-espacio arco conexo si $\overline{x} \in F^{2n}_{(r)}$, $\overline{x}$ primitivo y $d_{(r)}\overline{x} = \overline{y} \neq 0$, entonces $\overline{x}$ posee implicaciones infinitas (co-implicaciones).*

Demostración. Recordando un resultado el cual afirma que en un álgebra de Hopf, asociativo y conmutativo, si un elemento primitivo es descomponible entonces este es una p-ésima potencia de otro elemento. El álgebra de Hopf $F_{(r)}$ es asociativo y conmutativo, por tanto $\overline{x}$ es primitivo, y así también $\overline{y} = d_{(r)}\overline{x}$ es primitivo y en una dimensión impar; por esto no puede ser una p-ésima potencia, y así esto no es descomponible. Luego por el resultado siguiente: ≪Si E es un álgebra, $x \in E$ es no descomponible entonces existe $\varphi \in E^*$, tal que φ es primitivo y $\varphi(x) \neq 0$. Además, cualquier primitivo $y \in E^*$ anula a todo elemento descomponible≫; existe un elemento primitivo, $y \in F^{(r)}$ tal que $\overline{y}(y) \neq 0$ y por lo tanto $\varphi(d^{(r)}y) = (d_{(r)}\varphi)(y) = \overline{y}(y) \neq 0$. Como "$y$" es primitivo, $x = d^{(r)}y$ también lo es, además por la proposición 2.7 es de implicaciones infinitas. En consecuencia $\overline{x}$ es de implicaciones infinitas. □

Proposición 2.13 (Aplicación). *Sea X un H-espacio arco conexo con $H_k(X)$ finitamente generado para todo k y $H^k(X, \mathbb{Z}_p) \neq 0$ para a lo sumo un número finito de enteros k, entonces $P(E^{2n}_{(r)}) \subset \mathrm{Im}(j_{(r)})$, o en otras palabras, los elementos primitivos de dimensión impar en la cohomología de la sucesión espectral de Bockstein son la imagen de cociclos enteros. Para $r = 1$, esto se convierte en $P(H^{2n}(X, \mathbb{Z}_p)) \subset \mathrm{Im}(j_*)$.*

Demostración. Si $x \in P(F^{2n}_{(r)})$, y $d_{(r)}x \neq 0$, entonces x tiene implicaciones infinitas (co-implicaciones) por el resultado anterior (proposición 2.12) y así $H^k(X, \mathbb{Z}_p) \neq 0$ para infinitos k, lo cual contradice la hipótesis. Por tanto es un ciclo para cada $d_{(r)}$. Ahora recordemos el siguiente resultado: ≪Si $x \in F_r(C)$, entonces $d_j x = 0$ para todo $j \geq r$ si y solo si $x = j_{(r)}x'$ para algún $x' \in H(C)$ ≫; luego aplicando tal resultado concluimos la prueba. □

3. Dualidad de Poincaré para H-espacios

Actualmente la formulación y presentación del teorema de dualidad de Poincaré se establece en función de la homología y cohomología, de este modo: Si M es una variedad cerrada orientada, y k es un número entero, entonces existe un isomorfismo canónico definido del k-ésimo grupo de homología $H_k(M)$ al $(n-k)$-ésimo grupo de cohomología $H^{n-k}(M)$. Específicamente, se mapea un elemento de $H^k(M)$ a su "producto cap" con una clase fundamental de M, la cual existe para una variedad orientada.
Se definen a los grupos de homología y cohomología como cero para los grados negativos; de esta forma la dualidad de Poincaré en particular implica que los grupos de homología y cohomología de las n-variedades cerradas orientables anulándose para los grados mayores que "n". En este contexto nosotros mostraremos la dualidad de Poincaré para H-espacios con homología finitamente generada, sin asumir ninguno de estructura de variedad. Previamente citamos un Teorema Boreliano.

Proposición 3.1 (**Teorema Boreliano**). *Sea E un álgebra de Hopf, asociativo, conmutativo sobre un cuerpo perfecto K, entonces $E = \bigotimes_j E_j$ como un álgebra (no necesariamente un coálgebra) donde los E_j son álgebras de Hopf con un generador. Así, si $E_j = \langle e_j \rangle$ (es decir: e_j genera E_j) el conjunto de monomiales $\{e_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot e_n^{t_n}\}$ forman una base aditiva para E, para* $0 \leq t_j < \text{altura}(e_j)$, *donde* $\text{altura}(e_j) = \text{mín}\{t \in \mathbb{Z}^+ : e_j^t = 0, \ (e_j^0 = 1)\}$.

Definición 3.1. *Sea p un número primo y sea X un espacio. La **p-dimensión de** X es el mayor "m" tal que $H_m(X, \mathbb{Z}_p) \neq 0$. Similarmente la dimensión racional de X es el mayor "m", tal que $H_m(X, \mathbb{Q}) \neq 0$, donde $\mathbb{Q}$ es conjunto de números racionales.*

Teorema 3.1. *Si X es un H-espacio arco conexo con $H_k(X)$ finitamente generado para cada k, y si la p-dimensión de X es finito, entonces la p-dimensión de X es igual a la dimensión racional de X, $H_m(X, \mathbb{Z}_p)$ es un-dimensional, y $H_m(X, \mathbb{Z}_p) = j_*(H_m(X, \mathbb{Z}))$, donde $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$(aplicación proyección).*

Demostración. Por porposición 3.1, puesto que $H^*(X, \mathbb{Z}_p)$ es un álgebra de Hopf, asociativa, conmutativa sobre $\mathbb{Z}_p$, existe un conjunto de elementos $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (solo un número finito porque $H^*(X, \mathbb{Z}_p)$ es finito dimensional), $e_j \in H^*(X, \mathbb{Z}_p)$, tal que el conjunto de monomiales $\{e_1^{t_1}, \ldots, e_n^{t_n}\}$ donde $0 \leq t_j \leq \text{altura}(e_j)$ forma una base aditiva para $H^*(X, \mathbb{Z}_p)$. Desde que $H^*(X, \mathbb{Z}_p)$ es finito dimensional tenemos que: $\text{altura}(e_j) < \infty$, para todo j, entonces existe un único elemento, más aún de dimensión "m" más alta, a saber que cuando cada t_j es maximal.
Ahora supongamos que $\pi_1(X) = 0$. Por lo tanto $H_1(X) = \pi_1(X) = 0$ y por consiguiente $H^1(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, por tanto $\dim(e_j) \geq 2$ para todo j, así que algún t_j es menor que su máximo valor posible, de donde $\dim(e_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot e_n^{t_n}) < m - 1$. Así $H^{m-1}(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, y así $F^m_{(1)} = F^m_{(\infty)} = \mathbb{Z}_p$.
Por lo tanto en homología también $F_m^{(1)} = F_m^{(\infty)} = \mathbb{Z}_p$ y de esta forma se tiene el resultado.
Ahora si X no es simplemente conexo, tomamos $\widetilde{X}$ =cubierta universal H-espacio de X, entonces se muestra sin dificultad que $\widetilde{X}$ satisface la hipótesis del Teorema, y la p-dimensión de $\widetilde{X}$ =(p-dimensión de X)$-r$; mientras que la dimensión racional de $\widetilde{X}$ =(dimensión racional de X)$-r$, donde r =rango$(\pi_1(X)) = \dim H_1(X, \mathbb{Q})$; luego usando el resultado para $\widetilde{X}$, tenemos para el espacio X. □

Por lo tanto $F_m^{(1)} = F_m^{(\infty)}$, y todos los elementos de $F_m^{(r)}$ son ciclos bajo $d^{(r)}$, así que no existe p-torsión en $H_{m-1}(X)$, de este modo tenemos las siguientes consecuencias.

Corolario 3.2.

(*a*) *Si X es un H-espacio arco conexo con $H_k(X)$ finitamente generado para todo k, $H_m(X) \neq 0$ y $H_j(X)$ para $j > m$, entonces $H_m(X) = \mathbb{Z}$ y $H_{m-1}(X)$ es libre.*

(b) *Si M es un arco conexo, variedad compacta lo cual es un H-espacio, entonces M es orientable.*

Sean X un espacio y $\Delta : X \to X \times X$ la aplicación diagonal, $\Delta(x) = (x, x)$. De este modo Δ induce una aplicación $\widetilde{\Delta} : C_*(X) \to C_*(X) \otimes C_*(X)$, escribiendo $C_* = C_*(X)$, $C^* = C^*(X)$. Recordando el "producto cup", esto es:

Definición 3.2. *Sean $c^q \in C^q$, $e_n \in C_n$ y escribamos $\Delta e_n = \sum_k x_k \otimes x'_k$. El "producto cup" se donota por "$\wedge$" y define como la aplicación de $C^q \otimes C_n$ en C_{n-q}, es decir, $\wedge : C^q \otimes C_n \to C_{n-q}$ tal que $C^q \wedge C_n = (C^q \otimes 1)(\Delta e_n) = \sum_k (C^q(x_k))x'_k$. Ahora si consideramos una nueva diferencial $\delta' : C^q \to C^{q+1}$ dado como $\delta' = (-1)^{q+1}\delta$, entonces los grupos de homología de δ' son idénticos al diferencial δ.*

Proposición 3.2. *Sea δ' el diferencial en C^*, y considerando (calificando) C^* en el recíproco (es decir: ${}^{\backprime}C^q = C^{-q}$), entonces el producto cup "$\wedge$" es una aplicación de cadena de ${}'C^* \otimes C_*$ en C_*, es decir, $\wedge :{}^{\backprime} C^* \otimes C_* \to C_*$.*

Demostración. Por definición del producto cup $\wedge$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\wedge(\partial(C^q \otimes e_n)) &= \bigcap[(-1)^{q+1}(\delta C^q) \otimes e_n] + \bigcap[(-1)^q C^q \otimes \partial e_n] \\
&= (-1)^{q+1} \sum [\delta C^q(x_k)]x'_k + (-1)^q \sum [C^q(\partial x_k)]x'_k \\
&\quad + (-1)^q \sum (-1)^{\dim x_k}(C^q(x_k))\partial x'_k \\
&= \sum C^q(x_k)\partial x'_k = \partial(C^q \wedge e_n)
\end{aligned}$$

De este modo la aplicación "$\wedge$" induce productos cup en homología. ☐

Proposición 3.3. *Sea $\partial e_n = 0$. Entonces la aplicación $\wedge e_n :{}^{\backprime} C^q \to C_{n-q}$ es un "aplicación cadena" ∂' sobre ${}^{\backprime}C^q$.*

Demostración. Claramente $C^q \wedge \partial e_n = 0$, de donde $C^q \wedge \partial e_n = \delta C^q \wedge e_n + (-1)^q \partial(C^q \wedge e_n)$ y en consecuencia $\partial(C^q \wedge e_n) = (\delta' C^q) \wedge e_n$. ☐

Proposición 3.4. *Dados la aplicación $f : A \to B$ de complejos de cadena libre y $f_* : H(A) \to H(B)$ el inducido de f. Entonces f_* es un isomorfismo si y solamente si $f_G : H(A \otimes G) \to H(B \otimes G)$ es un isomorfismo para todo grupo abeliano G.*

Demostración. Observemos que la segunda afirmación produce de manera trivial la primera, al considerar $G = \mathbb{Z}$.
Ahora si f_* es un isomorfismo, vemos que la aplicación inducida del Teorema de coeficientes universales $H(A \otimes G)$ y $H(B \otimes G)$ da lugar al diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_n(A) \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "f_* \otimes 1"'] & H_n(A \otimes G) \arrow[r] \arrow[d, "f_G"] & \mathrm{Tor}(H_{n-1}(A), G) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tor}(f_*, 1)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_n(B) \otimes G \arrow[r] & H_n(B \otimes G) \arrow[r] & \mathrm{Tor}(H_{n-1}(B), G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como f_* es un isomorfismo entonces $f_* \otimes 1$ y $\mathrm{Tor}(f_*, 1)$ son isomorfismos, y en consecuencia por el "lema cinco" se tiene que f_G es un isomorfismo. ☐

Proposición 3.5. *Sea $f : A \to B$ una aplicación de complejos de cadena libre con, $H_k(A)$ y $H_k(B)$ finitamente generado para cada k, entonces $f_* : H(A) \to H(B)$ es un isomorfismo si y solo si $f_p : H(A \otimes \mathbb{Z}_p) \to H(B \otimes \mathbb{Z}_p)$ es un isomorfismo para cada primo p.*

Demostración. Por la proposición 3.4 se tiene que siendo f_* isomorfismo entonces f_p es un isomorfismo. Ahora definimos el complejo C, llamado la "aplicación cono" de f como: $C_n = A_{n-1} + B_n$ con $d' : C_n \to C_{n-1}$ definido por $d'(a, b) = (-da, db + f(a))$ entonces $g(a, b) = a$ es una aplicación de grado -1 de C en A, ($dg = -gd'$) e $i(b) = (0, b)$ es una aplicación cadena de B en C. Esto da lugar a que la sucesión siguiente

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} C \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0 \tag{4}$$

es exacta de complejos de cadena libre. Si nosotros tomamos homología en (4) con coeficientes en un grupo abeliano G, obtenemos una sucesión exacta

$$\ldots \longrightarrow H_n(B \otimes G) \xrightarrow{i_*} H_n(C \otimes G) \xrightarrow{g_*} H_{n-1}(A \otimes G) \xrightarrow{d_*} H_{n-1}(B \otimes G) \longrightarrow \ldots \tag{5}$$

directamente se verifica que $d_* = f_G$.
Tomando $G = \mathbb{Z}$ encontramos que $H_k(C)$ es finitamente generado puesto que $H_k(B)$ y $H_{k-1}(A)$ lo son. También si $G = \mathbb{Z}_p$ en (5) encontramos que f_p es un isomorfismo $H_k(C \otimes \mathbb{Z}_p) = 0$ para todo k, y para todo p, pero $H_k(C \otimes \mathbb{Z}_p) = H_k(C) \otimes \mathbb{Z}_p + \mathrm{Tor}(*)$, de este modo $H_k(C) \otimes \mathbb{Z}_p = 0$ para todo k y para todo p; lo cual implica que $H_k(C) = 0$ y por tanto $H_k(C)$ es finitamente generado. Ahora tomando $G = \mathbb{Z}$ en (5) tenemos $d_* = f_*$ y así $d_* : H(A) \to H(B)$ es un isomorfismo. □

Proposición 3.6. *Sea X un H-espacio arco conexo con $H_k(X)$ finito dimensional para todo k, y supóngase que $H_m(X, \mathbb{Z}_p) \neq 0$ y $H_r(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, $r > m$, existe una cadena $u \in C_m(X)$ tal que $\partial u = 0$ y $j_*\{u\}$ generadores de $H_m(X, \mathbb{Z}_p)$, entonces $\wedge u : H^q(X, \mathbb{Z}_p) \to H_{m-q}(X, \mathbb{Z}_p)$ es un isomorfismo para todo q.*

Demostración. Por la proposición 3.5 se tiene: $H_m(X, \mathbb{Z}_p) = j_*(H_m(X, \mathbb{Z}))$ así que existe un elemento $u \in C_m(X)$ tal que $\partial u = 0$ y $j_*\{u\}$ generadores de $H_m(X; \mathbb{Z}_p)$.
Por el resultado Boreliano ( ) encontramos un conjunto de generadores $\{x_1, \ldots, x_n\}$ para $H^*(X, \mathbb{Z}_p)$ así que $\{x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}\}$, $0 \leq q_i \leq h_i$ (altura$(\alpha_i) - 1$), forma una base aditiva para $H^*(X, \mathbb{Z}_p)$ para cada monomial $x = x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$, asignamos otro monomial $f(x) = x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}$, donde $r_i = h_i - q_i$, entonces si $\{y_1, \ldots, y_r\}$ es una base monomial para $H^q(X, \mathbb{Z}_p)$, $\{f(y_1), \ldots, f(y_r)\}$ es una base monomial para $H^{m-q}(X, \mathbb{Z}_p)$. También $x \cdot f(x) = x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$. Además mostramos que $y_i f(y_j) = 0$ para $i \neq j$. Para algún exponente r_s ($y_j = x^{r_1} - 1 \ldots x_n^{r_n}$, $y_i = x_1^{t_1} \ldots x_n^{t_n}$); así tenemos $r_{<} r_t$ y así $f(y_j) = x_1^{h_1 - r_1} \ldots x_n^{h_n - r_n}$, y por ende $y_i f(y_j) = x_1^{h_1 - r_1 + t_1} \ldots x_s^{h_s - r_s + t_s} \ldots x_n^{h_n - t_n + r_k} = 0$, luego $x_s^{h_s - r_s + t_s} = 0$ puesto que $h_s - r_s + t_s \geq h_s + 1 =$altura$(x_s)$. Así el producto par establece el isomorfismo siguiente $H^q(X; \mathbb{Z}_p) \cong (H^{m-q}(X, \mathbb{Z}_p))^*$. Ahora si $\widetilde{x} \in H^q(X; \mathbb{Z}_p)$, $x \neq 0$ existe $\widetilde{y} \in H^{m-q}(X, \mathbb{Z}_p)$ tal que $\widetilde{x}\widetilde{y} = x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$. Ahora $x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}(j_*\{u\}) \neq 0$, pero

$$\widetilde{y}(\widetilde{x} \cap u) = \widetilde{y}(\widetilde{x} \otimes 1)(\Delta u) = (\widetilde{x} \otimes \widetilde{y})(\Delta u) = (\widetilde{x} \cdot \widetilde{y})(u) \neq 0.$$

Desde que $\widetilde{y} \in H^*(X, \mathbb{Z}_p)$ no es un elemento ortogonal a $\mathrm{Im}(\wedge u)$; así $(\wedge u)$ es sobre.
También ningún elemento $\widetilde{x} \in H^*(X, Z_p)$ va a cero, bajo la imagen de $\wedge u$, de donde $\wedge u$ es uno a uno, de este modo $\wedge u$ es un isomorfismo, es decir, $H^q(X; \mathbb{Z}_p) \cong H_{m-q}(X; \mathbb{Z}_p)$. □

Proposición 3.7 (**Teorema de dualidad de Poincaré**). *Sea X un H-espacio arco conexo con $H_k(X)$ finitamente generado para todo k y supóngase que $H_m(X) \neq 0$ y $H_i(X) = 0$ para todo $i > m$. Entonces $H_m(X) = \mathbb{Z}$ y si γ es un generador de $H_m(X)$, entonces $\cap\gamma : H^q(X; G) \to H_{m-q}(X; G)$ es un isomorfismo para todo q, para cualquier grupo abeliano G.*

Demostración. Por definición de la aplicación $\cap\gamma$ bastará probar para $\cap\Psi$ donde Ψ es cualquier cadena que representa γ.
Ahora recordemos los resultados siguientes: $\ll R_1$: Si X es un H-espacio arco conexo con $H_k(X)$ finitamente generado para todo k, $H_m(X) \neq 0$ y $H_j(X) = 0$ para $j > m$, entonces $H_m(X) = \mathbb{Z}$ y $H_{m-1}(X)$ es libre.$\gg$
$\ll R_2$: Si X es un H-espacio con arco conexo con $H_k(X)$ finito dimensional para todo k, y supóngase que $H_m(X, \mathbb{Z}_p) \neq 0$ y $H_r(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, para $r > m$. Existe una cadena $u \in C_m(X)$, tal que $\partial u = 0$ y $j_*(\{u\})$ generadores de $H_m(X, \mathbb{Z}_p)$. Entonces $\cap u : H^q(X, \mathbb{Z}_p) \to H_{m-q}(X, \mathbb{Z}_p)$ es un isomorfismo para todo q.$\gg$
Entonces de "R_1" se tiene $H_m(X) = \mathbb{Z}$; mientras que de "R_2" $\cap u$ es un isomorfismo para $G = \mathbb{Z}_p$, para todo entero "q" y para todo primo "q", luego por la proposición 3.5 se tiene, $\cap u$ es un isomorfismo cuando $G = \mathbb{Z}$, y finalmente $\cap u$ es un isomorfismo para cualquier grupo abeliano G, basta ver la proposición 3.4, y así se tiene el resultado. □

4. Conclusión

- La presentación moderna del Teorema de dualidad de Poincaré se establece en términos de la homología y cohomología, siendo m y q dos números enteros, entonces hay un isomorfismo canónico entre $H^q(X, \mathbb{Z}_p)$ y $H_{m-q}(X, \mathbb{Z}_p)$, para X un H-espacio.
- Dentro de los resultados presentados destacamos la proposición 2.6, que permite calcular el anulamiento de un elemento primitivo mediante los llamados cuadrados de Steenrod el cual es de utilidad en la prueba de uno de los resultados principales.
- La condición de arco conexo en un H-espacio, es de trascendencia en los resultados obtenidos.

Referencias bibliográficas

[1] Munkres, J. R. (2002). *Topología, segunda edición*. ISBN 84-205-3180-4. Madrid.

[2] Massey, W. S. (1972). *Introducción a la topología algebraica*. Editorial Reverte.

[3] Browder, W. (1960). *Homology and homotopy of H-spaces*. Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A., 46, 543-545.

[4] Eilenberg, S. and Steenrod, N. E. (1953). *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton University Press.

[5] Browder W. (1960). *Torsion in H-spaces*. Annals of mathematics, vol. 74.

[6] Eilemberg, S. and Zilber, J. A. (1953). *On products of complexes*. Amer. J. Math, 75, 200-204.

[7] Hopf, H. (1941). *Ueber die Topologie der Gruppe-Mannigfaltiglceiten und ihrer Verallgemeinerungen*. Ann. of Math, 42, 22-52.

[8] Serre, J.-P. (1953). *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg MacLane*. Comment. Math. Helv., 27, 198-231.