PESQUIMAT 27(1): 60–71 (2024)
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v27.i1.20549
ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Dualidad de Matlis generalizado, sobre un anillo conmutativo Noetheriano

***Wilfredo Mendoza Quispe* [1], *Sofía Duran Quiñones*[2], *Marco Antonio Rubio Gallarday*[3], *Willian César Olano Díaz* [4]**

Resumen: Sea R un anillo conmutativo Noetheriano y sea E el cogenerador inyectivo minimal de la categoría de R-módulos. Belshoff, Enochs y García Rozas introdujeron en [**6**] los denominados I-módulos Matlis reflexivos, donde I es un ideal. En este contexto presentamos en la segunda sección una introducción de los módulos reflexivos y sus propiedades, y en la tercera y última sección damos la clasificación de módulos reflexivos con respecto a un cogenerador minimal E. Un nódulo M se dice reflexivo con respecto a E, si la aplicación de M en $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_R(M,E),E)$ es un isomorfismo y así establecemos la clasificación de los R-módulos M, los cuales son reflexivos con respecto a E si y sólo si M tiene un submódulo S finitamente generado tal que los cocientes ${}^{M}\!/_{S}$ y ${}^{R}\!/_{\mathrm{anul}(M)}$ es artiniano y semilocal completo respectivamente.

Palabras clave: Módulos reflexivos, cogenerador minimal, dualidad, Matlis generalizado, cápsula inyectiva, anillo semilocal completo.

Generalized Matlis duality, on a Noetherian commutative ring

Abstract: Let R be a Noetherian commutative ring and let E be the minimal injective cogenerator of the category of R-modules. Belshoff, Enochs and García Rozas are three people who introduced in [**6**] the so-called I-reflexive Matlis modules where I is an ideal. In this context we present in the second section a brief introduction of the reflective modules and some of their properties, and in the third and last section we give the classification of reflective modules with respect to a minimal cogenerator E. A node M is said to be reflexive with respect to E if the map of M in $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_R(M,E),E)$ is an isomorphism and thus we establish the classification of the R-modules M, which are reflexive with respect to E if and only if M has a finitely generated submodule S such that the quotients: ${}^{M}\!/_{S}$ and ${}^{R}\!/_{\mathrm{anul}(M)}$ is complete Artinian and semilocal respectively.

Keywords: Reflective modules, minimal cogenerator, duality, generalized Matlis, injective capsule, complete semilocal ring.

Recibido: 15/02/2024. *Aceptado:* 15/05/2024. *Publicado online:* 30/06/2024.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: wmendozaq@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: sduranq@unmsm.edu.pe
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: mrubiog@unmsm.edu.pe
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: wolanod@unmsm.edu.pe

1. Introducción

La cohomología puede ser interpretada como un método de asignación de invariantes algebraicos a un espacio topológico que posee una estructura algebraica más refinada que la que posee la homología. En este contexto teórico de la cohomología nos sumergimos en la cohomología local; la cual fue introducida por Alexander Grothendieck a principios de los años sesenta del siglo anterior (1960), en parte para dar respuesta a una conjetura de Pierre Samuel, cuando cierto tipo de anillos conmutativos son dominios de factorización única, desde su inicio la cohomología local se ha convertido en una herramienta para la geometría algebraica y álgebra conmutativa. El artículo se basará en muchas aplicaciones de la cohomología local, lo cual necesita el desarrollo previo de material básico concerniente a tal cohomología. Para el desarrollo de este trabajo los anillos son considerados conmutativos con identidad, más aún Noetherianos.
Entre muchos atributos la cohomología local da respuesta a muchas preguntas aparentemente dificultosas, entre ellas por ejemplo se muestra lo siguiente: ¿Cuántos generadores del ideal radical son generadores del ideal?
En general, si R es un anillo e I es un ideal de R. El **radical** de I es el ideal denotado y definido como:

$$\sqrt{I} = \{a \in R : a^n \in I, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

De este modo, diremos que un ideal I es generado hasta radical por m-elementos si existen: $a_1, a_2, \ldots, a_m \in I$ tal que $\sqrt{I} = \sqrt{\langle a_1, \ldots, a_m \rangle}$, por ejemplo, el ideal $I \subseteq K[x, y]$ generado por x^2, xy, y^2 es generado hasta radical por dos elementos x^2, y^2. Es bien conocido que si $I \subset R$ es un ideal, entonces

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$$

donde $V(I) = \{P \in Spec(R) : I \subseteq P\}$ y $Spec(R) = \{P \subset R : P \text{ es ideal primo}\}$. Un famoso resultado Hilbertiano dice que en el caso que R sea un anillo de polinomios sobre un cuerpo, el radical de I es la intersección de todos los ideales maximales conteniendo a I. En este contexto se define también el llamado radical de Jacobson de un anillo R, denotado por $J(R)$, el cual es la intersección de todos los ideales maximales de R, es decir:

$$J(R) = \bigcap_{m \in \mathfrak{M}} m$$

donde $\mathfrak{M} = \{m \subseteq R : m \text{ es ideal maximal de } R\}$. De este modo formulamos la siguiente interrogante: Dado un ideal I, ¿cuál es el menor número de elementos necesarios para generarlo hasta alcanzar el radical?. Siendo un caso particular y especial de este problema el siguiente: Sea $R = K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ el anillo de polinomios de cuatro variables sobre el cuerpo K. Ahora consideremos el ideal $I = \langle x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4 \rangle$. este ideal es su propio nilradical, es decir, $I = \sqrt{I}$, y así el menor número de elementos generadores son cuatro. Ahora se presenta otra interrogante para el ejemplo antes dado, ¿existirán dos elementos que lo generan hasta el radical? y análogamente, ¿existirá un elemento que lo genera hasta el radical?. La respuesta a la última pregunta es no, debido a una obstrucción la cual fue probada por Krull's, este es: ≪Sea R un anillo Noetheriano e $I = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ ideal generado por n-elementos. Si P es un primo minimal sobre I entonces la altura de P es a lo más n. En particular, si I es un ideal generado hasta alcanzar el radical por n-elementos, entonces la altura de I es a lo sumo n≫.
Ahora la teoría de cohomología que proporciona tal obstrucción es la cohomología local, así para un anillo R y un ideal I, asociamos para $i \geq 0$ módulos $H^i_I(R)$ verificando:

(1) $H^i_I(R) = H^i_{\sqrt{I}}(R)$

(2) $H^i_I(R) = 0$ para todo $i > k$, siempre que $I = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Nosotros, bajo el contexto antes expuesto, buscaremos generalizar en cierto sentido la dualidad de Matlis. Es el caso que P. Gabriel y E. Matlis en [**1**] y [**2**] consideran módulos sobre un anillo R local completo, y muestran que el dual de un R-módulo es tomado con respecto a la envoltura inyectiva del campo residual K de R, el cual es denotado por $E_R(K)$, entonces módulos finitamente generados y módulos artinianos son reflexivos. En este artículo consideramos el cogenerador inyectivo minimal E, de la categoría de R-módulos. Nosotros en primer lugar damos una clasificación de módulos los cuales son reflexivos, con relación a E puntualmente el resultado es que: ≪Un módulo M es reflexivo con respecto a E si y solo si M posee un submódulo finitamente generado N tal que el cociente ${}^{M}\!/\!_{N}$ es artiniano y así ${}^{R}\!/\!_{\mathrm{Anul}(M)}$ es un anillo semilocal completo≫.
Escribamos el espectro maximal de R como ξ, es decir,

$$\xi = \mathrm{Specm}(R) = \{m \subsetneq A : m \text{ es un ideal maximal de } R\}$$

y sea $E = \bigoplus_{m\in\xi} E_R({}^{R}\!/\!_{m})$ el cogenerador inyectivo minimal en la categoría de R-módulos. Ahora para un R-módulo M, denotaremos $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, E)$ al cual llamaremos el dual Matlis (o Mtlis dual) de M. Si $M \cong M^{**}$ diremos que M es (Matlis) reflexivo. Notemos que para cualquier R-módulo M, la aplicación $M \to M^{**}$ es inyectiva y así se puede concluir que $\mathrm{Anul}(M) = \mathrm{Anul}(M^*)$.
De otro lado si $S \subset R$ es un conjunto multiplicativo y la aplicación canónica $\tau : M \to S^{-1}M$ es un isomorfismo, entonces escribiremos $M = S^{-1}M$, y si $M = S^{-1}M$, entonces $M^* = (S^{-1}M)^* = S^{-1}(M^*)$, y cuando $S = R \setminus P$ (P-ideal primo) entonces denotaremos $S^{-1}M$ como M_P, en esta contexto algebraico denotemos por $\widetilde{R}$ la completación de un anillo R. Ahora si un R-módulo M es finitamente generado se tiene que $\widetilde{M} \cong \widetilde{R} \otimes_R M$, donde $\widetilde{M}$ es la completación de M y así escribiremos $\widetilde{R}\otimes_R M \cong \widetilde{M}$ para decir que $M \mapsto \widetilde{R}\otimes_R M \cong \widetilde{M}$ es un isomorfismo. También nótese que si $\mathfrak{M} \in \xi$ y M es un R-módulo finitamente generado, entonces $\mathrm{Hom}_R(M, E({}^{R}\!/\!_{m})) \neq 0$ si y solo si $\mathrm{Anul}(M) \subset m$. De aquí si R es un anillo local completo, entonces todos los finitamente generados y todos los R-módulos artinianos son reflexivos. Si R es un anillo semilocal completo, entonces como R es el producto de un número finito de anillo locales completos, tenemos módulos finitamente generados y módulos artinianos sobre R que son reflexivos.

2. Módulos reflexivos

En esta sección introducimos los módulos E-Matlis reflexivos, donde E es un cogenerador inyectivo arbitrario de la categoría de R-módulos y generalizamos algunas propiedades presentadas por R. G. Belshoff, E. E. Enochs y J. R. García Rozas.

2.1. Extensiones esenciales

Definición 2.1. *Sean M y N dos R-módulos con $M \subseteq N$. Decimos que N es una* ***extensión esencial*** *de M, si todo submódulo no nulo L de N ($L \leqslant N$) satisface: $L \cap M \neq (0)$. Tal extensión esencial se dirá propia si $L \subsetneq N$.*

Observación. *Las extensiones esenciales siempre existen. De manera trivial se puede ver que todo módulo es extensión esencial de si mismo. Hay otras formas de verificar si una extensión es esencial, por lo que presentamos los lemas siguientes.*

Lema 2.1. *Sean M, N dos R-módulos y $M \subseteq N$, son equivalentes los enunciados siguientes:*

1. *N es una extensión esencial de M.*

2. *Todo elemento no nulo $n \in N$ tiene un múltiplo no nulo $an \in M$, para $a \in R$.*

3. *Si $\varphi : N \to M'$ es un homomorfismo, tal que la restricción de φ a M es inyectivo entonces φ es inyectivo.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2)**:** Por dato N es una extensión esencial de M, y tenemos un elemento $n \in N$ con $n \neq 0$ entonces claramente $Rn = \{an : a \in R\}$ es un submódulo no nulo de N y así existe un elemento $a \in R$ tal que $0 \neq an \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3)**:** Procediendo por el absurdo, supongamos que $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ entonces existe un elemento no nulo $h \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ de donde $ah \in M - \{0\}$ para algún $a \in R$, así mismo $0 = a \cdot \varphi(h) = \varphi(ah)$ (esto es una contradicción). Por tanto el resultado.

(3) $\Rightarrow$ (1)**:** Si L es un submódulo de N y consideremos la proyeción al cociente $\pi : N \to N/L$, entonces $\mathrm{Ker}(\pi|_M) = L \cap M$. Si $L \cap M = (0)$ entonces $\pi|_M$ es inyectivo, donde π es monomorfismo y $0 = \mathrm{Ker}\pi = L$, luego N es un extensión esencial de M. ☐

Lema 2.2. *Un módulo es inyectivo si, y sólo si, no posee extensiones esenciales propias.*

Demostración. Si E es inyectivo y $E \subseteq M$ entonces $M = E \oplus M_0$ para algún submódulo M_0 de M, para lo cual basta recordar el resultado siguiente: ≪Un módulo M es inyectivo si, y solamente si, toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0$ escinde≫. Ahora si $E \neq M$ entonces $M_0 \neq 0$ y M no es una extensión esencial de E.
Recíprocamente, si E no posee extensiones esenciales propias, consideremos $E \subsetneq M$, donde M es inyectivo. Entonces existe un submódulo no nulo L de M tal que $L \cap E = (0)$; por el Lema de Zorn, existe un submódulo maximal N de M tal que $H \subseteq N$ y $N \cap E = (0)$. Ahora, existe un homomorfismo inyectivo natural $\Psi : E \to M/N$ que efectivamente, define una extensión esencial $E \subseteq M/N$ (ver el Lema 2.1). De esta manera, $E = M/N$. En consecuencia, $E + N = M$, donde $M = E \oplus N$ y E es inyectivo. ☐

Observación. *Del Lema 2.2, se puede afirmar que si M es un submódulo de N; la existencia de extensiones esenciales maximales de M en N está garantizada gracias al Lema de Zorn, los módulos inyectivos permanecen caracterizados para la no existencia de extensiones esenciales propias.*

Proposición 2.1. *Si N es una extensión esencial maximal de M entonces N es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que N posee una extensión esencial N', entonces N' también es una extensión esencial de M. Luego, $N = N'$ pues N es una extensión esencial maximal de M. De esta manera, N no tiene extensiones esenciales propias, luego por el Lema 2.2, N es inyectivo. ☐

Proposición 2.2. *Si N y N' son dos extensiones esenciales maximales de M, entonces N y N' son isomorfos.*

Demostración. Sean $f : M \to N$ y $g : M \to N'$ dos monomorfismos, luego por el Lema 2.1, f se eleva para un homomorfismo $\varphi : N' \to N$, es decir, $f = \varphi \circ g$. Por la Proposición 2.1, resulta que el homomorfismo φ es inyectivo. Luego N' es un submódulo de N, done $N' \cong N$. ☐

A continuación presentamos algunos resultados conocidos sobre: **Anillos conmutativos Noetherianos**, previamente exponemos algunos homomorfismos de módulos. En efecto, para cualquier conjunto de índices Λ, existe un homomorfismo inyectivo de grupos $\varphi : \bigoplus_{k\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M, N_k) \to \mathrm{Hom}(M, \bigoplus_{k\in\Lambda} N_k)$ dado por $\varphi(f_{k_1} + \ldots + f_{k_s}) = f_{k_1} + \ldots + f_{k_s} : M \to \bigoplus_{k\in\Lambda} N_k$ para $f_{k_j} \in \mathrm{Hom}_R(M, N_{k_j})$. Nótese que φ es un isomorfismo cuando M es finitamente generado pues la imagen de $f \in \mathrm{Hom}_R(M, \bigoplus_{k\in\Lambda} N_k)$ está contenida en una cantidad finita de N_k, de este modo, $f \in \mathrm{Hom}_R(M, \bigoplus_{k\in\Lambda_0} N_k)$, donde Λ_0 es un subconjunto finito de Λ, más aún en este

caso, el homomorfismo inyectivo $\varphi|_{\Lambda_0} : \bigoplus \mathrm{Hom}_R(M, N_k) \to \mathrm{Hom}_R(M, \bigoplus N_k)$ es desde luego un isomorfismo.
Los anillos Noetherianos permanecen caracterizados por el comportamiento de los módulos inyectivos.

Proposición 2.3. *Un anillo conmutativo con identidad es Noetheriano si, y sólo si toda suma directa de módulos inyectivos es un módulo inyectivo.*

Demostración. (Ver [**3**]: Lectures on local cohomology and duality). □

2.2. Módulos E-Matlis relfexivos

Iniciamos esta sección recordando que un R-módulo E es un cogenerador inyectivo de R si el funtor

$$\mathrm{Hom}_R(-, E) : (\mathrm{Mod}_R)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}_R$$

es exacto.

Ejemplo 2.1. *Un cogenerador inyectivo de R es dado por*

$$E_R\left(\bigoplus_{m\in\mathfrak{M}} \frac{R}{m}\right)$$

*donde $E(M)$ denota la **cápsula inyectiva** de un R-módulo M. Cuando R es un anillo Noetheriano se cumple la igualdad:*

$$E_R\left(\bigoplus_{m\in\mathfrak{M}} \frac{R}{m}\right) = \bigoplus_{m\in\mathfrak{M}} E_R\left(\frac{R}{m}\right)$$

Ahora fijemos un cogenerador inyectivo E de R y escribamos por $D_E(-)$ el funtor (contravariante) $\mathrm{Hom}_R(-, E)$. Notemos que existe una transformación natural

$$T : \mathrm{id}(-) \longrightarrow D_E D_E(-)$$

el cual es inyectiva para cada R-módulo M. A saber

$$\begin{array}{rccl} T_M : & M & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, E), E) \\ & x & \longmapsto & T_M(x) : \varphi \mapsto \varphi(x) \end{array}$$

Para la inyectividad de T_M, observemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(R, M) \arrow[r, "D_E"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, E), \mathrm{Hom}_R(R, E)) \arrow[d, "\cong"] \\ M \arrow[r, "T_M"] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, E), E) \end{tikzcd}$$

donde la primera fila es inyectiva, a consecuencia de que $D_E(-)$ es un funtor fiel.

Definición 2.2. *Decimos que un R-módulo M es E-**Matlis reflexivo** si la función*

$$T_M : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, E), E)$$

es biyectiva. Ahora cuando el anillo R es Noetheriano y $E = E_R(\bigoplus_{m\in\mathfrak{M}} R/m)$, simplemente se dirá que M es Matlis reflexivo.

Definición 2.3. *Diremos que una subcategoría plena $\mathcal{C}$ de la categoría de R-módulos Mod_R es una subcategoría de Serre, si para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ de R-módulos, M pertenece a $\mathcal{C}$, si y solo si M' y M'' pertenecen a $\mathcal{C}$.*

Ejemplo 2.2. *La subcategoría de R-módulos finitamente generados mod_R es una subcategoría de Serre.*

Proposición 2.4. *La clase formado por todos los R-módulos E-Matlis reflexivos es una subcategoría de Serre.*

Demostración. (Ver [**4**], pág. 26). □

Observación. *En lo que sigue en esta subsección mostraremos algunas propiedades sobre A-módulos E-matlis reflexivos, para lo cual, previamente presentamos el resultado siguiente: Sean X un A-módulo y $\mathscr{N} = \{N_k\}_{k\in\Lambda}$ una familia de R-módulos. Ahora para cada $j \in \Lambda$ escribamos como $i_j : N_j \to \bigoplus_{k\in\Lambda} N_k$ la inclusión natural. Entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \sum : & \prod\limits_{k\in\Lambda} \mathrm{Hom}(N_k, X) & \longrightarrow & \mathrm{hom}\left(\bigoplus_{k\in\Lambda} N_k, X\right) \\ & (\varphi_k) & \longmapsto & \sum[(\varphi_k)] = \Psi \end{array}$$

donde $\Psi : \bigoplus_{k\in\Lambda} N_k \to X$ es el único homomorfismo de R-módulos que hace conmutativo cada uno de los siguiente diagramas

$$\begin{tikzcd} N_j \arrow[r, "\varphi_j"] \arrow[d, "i_j"'] & X \\ \bigoplus\limits_{k\in\Lambda} N_k \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

es un isomorfismo.

En la siguiente proposición, denotemos por $i : \bigoplus_{k\in\Lambda} N_k \to \prod_{k\in\Lambda} N_k$ la inclusión natural.

Proposición 2.5. *Si M es un R-módulo E-Matlis reflexivo, entonces M no contiene sumas directas infinitas.*

Demostración. (Ver [**4**], pág. 28). □

Proposición 2.6. *Sea M un R-módulo artiniano, entonces existe un homomorfismo inyectivo $\varphi : M \to E^n$ para algún número entero $n \geq 1$.*

Demostración. Consideremos la familia

$$\mathscr{F} := \{\text{Ker tal que } \varphi : M \to E^n \text{ para algún entero positivo } n\}$$

Como E es un cogenerador inyectivo entonces $\mathscr{F} \neq \emptyset$. Por hipótesis, M es artiniano, de donde $\mathscr{F}$ posee un elemento minimal, digamos $\ker(\varphi)$. Ahora, si existe un elemento $0 \neq x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, podemos hallar $\Psi : M \to E$ tal que $\Psi(x) \neq 0$. Definamos el homomorfismo $\widetilde{\varphi} : M \to E \oplus E^n$ como $\widetilde{\varphi}(m) = (\Psi(m), \varphi(m))$. Entonces $\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi} \in \mathscr{F}$, pero $\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi} \subsetneq \mathrm{Ker}(\varphi)$, lo cual es una contradicción. Esto implica que $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ y por lo tanto, $\varphi : M \to E^n$ es un homomorfismo inyectivo. □

Proposición 2.7. *Un R-módulo M es E-Matlis reflexivo si, y solo si, $\mathrm{Hom}_R(M, E)$ es E-Matlis reflexivo.*

Demostración. Sabemos que $\mathrm{Hom}_R(M,E) = D_E(M)$, y como M es E-Matlis reflexivo. Consideramos el homomorfismo R-lineal $\theta_{D_E(M)} : D_E(M) \to D_E D_E D_E(M)$, tomando un elemento $\varphi \in D_E D_E D_E(M)$, entonces $\varphi \circ \theta_M \in D_E(M)$.
Afirmación: $\theta_{D_E(M)}(\varphi \circ \theta_M) = \varphi$.
En efecto: Sea $\beta \in D_E D_E(M)$, entonces existe $x \in M$ tal que $\beta = \theta_M(x)$, luego

$$\theta_{D_E(M)}(\varphi \circ \theta_M)(\beta) = \beta(\varphi \circ \theta_M) = \theta_M(x)(\varphi \circ \theta_M) = \varphi(\theta_M(x)) = \varphi(\beta)$$

de aquí, $\theta_{D_E(M)}$ es sobreyectivo, y en consecuencia, $D_E(M)$ es E-Matlis reflexivo.
Recíprocamente, supongamos que $D_E(M)$ es E-Matlis reflexivo. Observemos que $D_E(\theta_M) \circ \theta_{D_E(M)} = \mathrm{id}_{D_E(M)}$ desde que $\theta_{D_E(M)}$ es un isomorfismo tenemos que $D_E(\theta_M)$ también es un isomorfismo, y como $D_E(-)$ es un funtor exacto y fiel, concluimos que θ_M es un isomorfismo. Por lo tanto, M es E-Matlis reflexivo. □

Como una consecuencia directa tenemos el siguiente

Corolario 2.1. *Si R es E-Matlis reflexivo, entonces R es semilocal.*

Proposición 2.8. *Supongamos que R es Noetheriano. Si M es un R-módulo finitamente generado y E-Matlis reflexivo, entonces* $\mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Max}(R)$ *es un conjunto finito.*

Demostración. Como R es Noetheriano, podemos escribir $E = \bigoplus_{P\in\Lambda} E_A(R/P)$ para algún conjunto de índices $\Lambda \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ y como E es un cogenerador inyectivo de R tenemos que: $\mathrm{máx}(R) \subseteq \Lambda$. También se tiene que M es finitamente generado, de donde existe un isomorfismo natural $D_E(M) \cong \bigoplus_{P\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M, E_R(R/M))$. Por la Proposición 2.7 se tiene que $D_E(M)$ es E-Matlis reflexivo, lo cual implica que solo un número finito de los R-módulos $\mathrm{Hom}_R(M, E_R(R/P))$ es diferente de cero. En particular $\mathrm{Hom}_R(M, E_R(R/m)) \neq 0$ para un número finito de ideales maximales m de R, y en consecuencia se tiene la igualdad.

$$\mathrm{Ass}\left(\mathrm{Hom}_R\left(M, E_R\left(\frac{R}{P}\right)\right)\right) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Ass}\left(E_R\left(\frac{R}{P}\right)\right) = \mathrm{Supp}(M) \cap \{P\}$$

para cada $P \in \mathrm{Spec}(R)$, demuestra el resultado, donde $\mathrm{Ass}(M)$ denota el conjunto de ideales primos asociados del módulo M, el cual está definido en la siguiente sección. □

Observación. *Sean X, Y, Z tres R-módulos, entonces existe un homomorfismo natural*

$$\gamma : \mathrm{Hom}_R(X,Y) \otimes_R Z \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(Z,X), Y)$$

el cual resulta ser un isomorfismo cuando Z es de presentación finita y cuando Y es inyectivo, y el mismo que está dado por

$$\gamma(f \otimes z)(g) = (f \circ g)(z),\ \textit{para todo}\ f \in \mathrm{Hom}_R(X,Y),\ g \in \mathrm{Hom}_R(Z,X),\ z \in Z$$

Cerramos esta subsección enunciando un resultado cuya prueba se puede ver en [**4**], página 31, el resultado afirma que los módulos $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)$ y $\mathrm{Tor}^R_n(M,N)$ son E-Matlis reflexivos para todo $n \geq 0$. Esto es:

Proposición 2.9. *Sea R un anillo Noetheriano. Si M es un R-módulo finitamente generado y N un R-módulo E-Matlis reflexivo. Entonces los R-módulos* $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)$ *y* $\mathrm{Tor}^R_n(M,N)$ *son E-Matlis reflexivos para todo $n \geq 0$.*

3. Clasificación de módulos reflexivos con respecto a un cogenerador minimal

En esta sección presentamos o daremos una clasificación de módulos los cuales son reflexivos con relación a un cogenerador inyectivo minimal.

3.1. Módulos reflexivos sobre un anillo cociente

Abordaremos algunos resultados relacionados a la reflexividad de módulo sobre un anillo cociente.

Proposición 3.1. *Sea R un anillo, $I \subset R$ un ideal. Si $IM = 0$ para algún R-módulo M, entonces M es reflexivo como un R-módulo si y solo si M es reflexivo como un R/I-módulo.*

Demostración. Para lo cual observemos que $\mathrm{Hom}_R(R/I, E)$ es un cogenerador inyectivo minimal, y como $M \otimes_R R/I \cong M$, entonces se tiene que:

$$\mathrm{Hom}_R(M, E) \cong \mathrm{Hom}_{R/I}(M, \mathrm{Hom}_R(R/I, E)) \qquad \square$$

Corolario 3.1. *Sea R un anillo y $S \subset R$ un conjunto multiplicativo y $S^{-1}M = M$ para un R-módulo M, entonces M es reflexivo como un R-módulo si y solo si M es reflexivo como un $S^{-1}R$-módulo.*

Demostración. Como en la Proposición 3.1, se tiene que $\mathrm{Hom}_R(S^{-1}R, E)$ es un cogenerador inyectivo minimal sobre el anillo $S^{-1}R$, y en consecuencia

$$\mathrm{Hom}_R(M, E) \cong \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(M, \mathrm{Hom}_R(S^{-1}R, E)) \qquad \square$$

Proposición 3.2. *Sea R un anillo local y M un R-módulo finitamente generado, entonces M es reflexivo si y sólo si $\widetilde{R} \otimes_R M = M$, donde $\widetilde{R}$ denota la completación de R.*

Demostración. Para cualquier tal R-módulo M tenemos el siguiente diagrama que conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "H"] \arrow[d, "m"'] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, E_R(K)), E_R(K)) \arrow[d, "m_H"] \\
\widetilde{M} = \widetilde{R} \otimes_R M \arrow[r, "\widetilde{H}"] & \mathrm{Hom}_{\widetilde{R}}(\mathrm{Hom}_{\widetilde{R}}(\widetilde{M}, E_{\widetilde{R}}(K)), E_{\widetilde{R}}(K))
\end{tikzcd}$$

donde K es el cuerpo residual del anillo R y de su completación $\widetilde{R}$. Como la completación $\widetilde{M}$ de M es un $\widetilde{R}$-módulo reflexivo, entonces el homomorfismo $\widetilde{H}$ es un isomorfismo, pero afirmamos que el homomorfismo m_H es un isomorfismo. Para $E_R(K) = E_{\widetilde{R}}(K)$ y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\widetilde{R}}(\widetilde{M}, E_R(K)) &= \mathrm{Hom}_{\widetilde{R}}(\widetilde{R} \otimes_R M, E_R(K)) \\
&= \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\widetilde{R}}(\widetilde{R}, E_R(K))) \\
&= \mathrm{Hom}_R(M, E_R(K)).
\end{aligned}$$

Desde que $L = \mathrm{Hom}_R(M, E_R(K))$ y $E_R(K)$ son R-módulos y $\widetilde{R}$-módulos artinianos, entonces tenemos $\mathrm{Hom}_{\widetilde{R}}(L, E_R(K)) = \mathrm{Hom}_R(L, E_R(K))$, y de aquí se sigue que $M \mapsto \widetilde{R} \otimes_R M$ es un isomorfismo si y solo si M es reflexivo. $\square$

Corolario 3.2. *Sea R un anillo local y sea $I \subset R$ un ideal, entonces R/I es reflexivo como un R-módulo (o como un R/I-módulo) si y sólo si R/I es un anillo local completo.*

Demostración. Se sigue de la igualdad $\widetilde{R} \otimes_R R/I = \widetilde{R}/I$. $\square$

Proposición 3.3. *Sean M un R-módulo y $S \subset M$ un submódulo, entonces M es reflexivo si y sólo si S y M/S son reflexivos.*

Demostración. Se sigue del diagrama conmutativo 1, con filas exactas y las aplicaciones verticales son inyectivas. Antes de observar el diagrama, escribamos $H^* = \mathrm{Hom}_R(M, E)$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & {}^{M}/_{S} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & S^{**} \arrow[r] & M^{**} \arrow[r] & ({}^{M}/_{S})^{**} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1}$$

□

Definición 3.1 (**Ideales primos asociados**). *Sea R un anillo y M un R-módulo no nulo, decimos que M es un módulo primo si, para todo submódulo N de M ($N \subset M$) se tiene que*

$$\mathrm{Anul}(N) = \mathrm{Anul}(M).$$

Definición 3.2. *Sea R un anillo, $P \subset R$ un ideal primo. Decimos que P es* ***asociado al módulo*** *M cuando existe un submódulo primo N de M ($N \subset M$) tal que $P = \mathrm{Anul}(N)$.*

El conjunto de todos los ideales primos asociados de M se denota como $\mathrm{Ass}(M)$ o $\mathrm{Soc}(M)$.

Lema 3.1 (Caracterización de ideales primos asociados a un módulo). *Sea M un R-módulo y $P \subset R$ un ideal primo, entonces el ideal primo P es asociado a M si, y sólo si, $P = \mathrm{Anul}(m)$, para algún elemento m de M.*

Demostración. (Ver [**5**], pág. 73). □

Proposición 3.4. *Si M es reflexivo, entonces existe un submódulo finitamente generado tal que ${}^{M}/_{S}$ es artiniano.*

Demostración. Si $M = (0)$, entonces el resultado es obtenido trivialmente.
Si $M \neq (0)$ existe un conjunto finitamente generado $S_1 \subset M$ tal que $\mathrm{Soc}({}^{M}/_{S_1}) \neq (0)$. Si $\mathrm{Soc}({}^{M}/_{S_1})$ es esencial en ${}^{M}/_{S_1}$ entonces ${}^{M}/_{S_1}$ es artiniano y en consecuencia también lo es $E({}^{M}/_{S_1})$. Ahora si este no es esencial, sea ${}^{N}/_{S_1} \cap \mathrm{Soc}({}^{M}/_{S_1}) = 0$ con $S_1 \subset N$, $S_1 \neq N$, entonces existe un conjunto finitamente generado S_2 con $S_1 \subset S_2 \subset N$ y $\mathrm{Soc}({}^{N}/_{S_2}) \neq 0$, de este modo $\mathrm{Soc}({}^{M}/_{S_1}) \to \mathrm{Soc}({}^{M}/_{S_2})$ es inyectivo pero no es suryectivo. Repitiendo el proceso vemos que este debe parar, de lo contrario si $L = \bigcup S_n$, entonces $\mathrm{Soc}({}^{M}/_{L})$ es una suma directa, lo cual es un absurdo por la Proposición 2.5. □

Proposición 3.5. *Sea M un R-módulo y supóngase que para algún $m \in \xi = \mathrm{Spec}(R)$, $\mathrm{Hom}_R(M, E({}^{R}/_{n})) = 0$ para $n \in \xi$ con $n = m$. Entonces si M es reflexivo, $M_m = M$ y $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, E), E({}^{R}/_{n})) = 0$ para $n \neq m$.*

Demostración. Sea M reflexivo y $m \in \mathrm{Spec}(R)$ tal que $\mathrm{Hom}_R(M, E({}^{R}/_{n})) = 0$ para $n \neq m$. Si $M \neq 0$ entonces tenemos el homomorfismo natural no nulo $M \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, E), E)$, por lo que es inmediato ver que:

$$\mathrm{Hom}_R\left(M, \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{Hom}_R(M, E), E\left(\frac{R}{n}\right)\right)\right) \neq 0$$

pero

$$\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, E), E({}^{R}/_{n}))) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, E), \mathrm{Hom}_R(M, E({}^{R}/_{n})))$$

así $\mathrm{Hom}_R(M, E({}^{R}/_{n})) \neq 0$, de aquí $n = m$.

Como $\text{Hom}_R(M, E) = \text{Hom}_R(M, E(R/m))$, se sigue fácilmente usando propiedades de $E(R/m)$ que $(\text{Hom}_R(M, E))_m = \text{Hom}_R(M, E)$, pero entonces

$$[\text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, E), E)]_m = \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, E), E)$$

y así $M_m = M$. Ahora por el Corolario 3.1 se sigue que M es un R_m-módulo reflexivo así como un módulo R-reflexivo. □

3.2. Clasificación completa de módulos reflexivos

En esta última sección daremos una clasificación completa de módulos reflexivos, previamente presentamos un resultado que relaciona la reflexividad de un módulo con la completitud de un anillo semilocal. Para lo cual usamos el hecho que: Si H es un R-módulo artiniano, entonces existen diferentes ideales maximales: $n_1, n_2, \ldots, n_t \in \xi$, donde $\xi = \text{Spec}(M)$, y M es un R-módulo; y una descomposición

$$H = \bigoplus_{i=1}^{t} H_i$$

tal que $(H_i)_{n_i} = H_i$, los ideales $n_1, n_2, \ldots, n_t$ y la descomposición son únicos. Ahora, si $J \subset H$ es un submódulo, entonces

$$J = (J \cap H_1) \oplus (J \cap H_2) \oplus \ldots \oplus (J \cap H_t)$$

produce la descomposición correspondiente de B. Nótese que $\text{Hom}_R(H_i, E(R/m)) = 0$ para $m \in \xi = \text{Spec}(M)$, con $m \notin \{n_1, n_2, \ldots, n_t\}$.

Proposición 3.6. *Sea M un R-módulo finitamente generado y sea $I = \text{Anul}(M)$. Entonces M es reflexivo si y sólo si R/I es un anillo semilocal.*

Demostración. Tenemos

$$\text{Hom}_R(M, E) = \text{Hom}_R\left(M, \bigoplus E\left(\frac{R}{m}\right)\right) \cong \bigoplus_{m \in \xi} \text{Hom}_R\left(M, E\left(\frac{R}{m}\right)\right)$$

ya que M es finitamente generado. Así $\text{Hom}_R(M, E)$ también es reflexivo, por la Proposición 3.5 se tiene que $\text{Hom}_R(M, E(R/m)) = 0$, salvo para un número finito de ideales $\mathfrak{M} \in \xi$.
Sean $n_1, n_2, \ldots, n_t \in \xi$ los diferentes elementos de ξ tal que $\text{Hom}_R(M, E(R/m)) = 0$ para $m \notin \{n_1, n_2, \ldots, n_t\}$, así $\text{Hom}_R(M, E) = \bigoplus_{i=1}^{t} \text{Hom}_R(M, E(R/n_i))$. Podemos asumir que

$$\text{Hom}_R\left(M, E\left(\frac{R}{n_i}\right)\right) \neq 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, t.$$

Si $M_i := \text{Hom}_R(M, E(R/n_i))$ de donde $\text{Hom}_R(M_i, E(R/m)) = 0$ para $m \neq n_i$, vemos que $\text{Hom}_R(R/I_i, E(R/m)) = 0$ para $m \neq n_i$ donde $I_i = \text{Anul}(M_i)$. Por eso I_i está contenido únicamente, solo en un ideal maximal n_i. Por lo que R/I_i es un anillo local y $(R/I_i)_{n_i} = R/I_i$.
Ahora, como R/I_i es también reflexivo y finitamente generado, de este modo obtenemos que R/I_i es un R_{n_i}-módulo basta observar el Corolario 3.1, pero por la proposición 3.2, se tiene $\widetilde{R}_{n_i} \otimes_{R_{n_i}} R/I_i = R/I_i$, esto quiere decir que R/I_i es un anillo local completo. □

Pero ahora si $I = \text{Anul}(M)$, entonces tenemos $I = \bigcap_{i=1}^{t} I_i$, los $I_1, I_2, \ldots, I_t$ son comaximales, así por el Teorema chino del resto

$$\frac{R}{I} \cong \frac{R}{I_1} \times \frac{R}{I_2} \times \ldots \times \frac{R}{I_t},$$

de aquí R/I es un anillo semilocal completo.

Observación. *Asumiendo que M es un R-módulo finitamente generado y que R/I es un anillo semilocal, donde $I = \mathrm{Anul}(M)$. Entonces M es reflexivo como un (R/I)-módulo y así por la Proposición 3.1, es reflexivo como un R-módulo.*

Proposición 3.7. *i) Sea R un anillo y sea $I \subset R$ un ideal, entonces R/I es reflexivo si y sólo si R/I es un anillo semilocal completo.*

ii) Sea R un anillo, y sean $I, J \subset R$ dos ideales tales que R/I y R/J son anillos semilocales completos.

Demostración. *i)* Es inmediato de la Proposición 3.6.

ii) Para esto, solo bastará ver que R/IJ es un R-módulo reflexivo. Nosotros tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \frac{I}{IJ} \longrightarrow \frac{R}{IJ} \longrightarrow \frac{R}{I} \longrightarrow 0$$

Pero R/I es un R-módulo reflexivo, y desde que I/IJ es un cociente de $(R/J)^n$ para algún $n \geq 1$ este es un R-módulo reflexivo. De aquí R/IJ es un R-módulo reflexivo. para lo cual bastará recordar el resultado siguiente: ≪Si M es un R-módulo y $S \subset M$ es un submódulo, entonces M es reflexivo si y sólo si M/S es reflexivo≫.

□

Teorema 3.3 (**Clasificación completa de módulos reflexivos**). *Un R-módulo M es reflexivo si y solo si este tiene un submódulo S finitamente generado tal que M/S es artiniano y si R/I es un anillo semilocal completo, donde $I = \mathrm{Anul}(M)$.*

Demostración. Asumamos que M es reflexivo, por el resultado siguiente: ≪Si M es reflexivo existe un submódulo finitamente generado S tal que M/S es artiniano≫ tenemos que existe $S \subset M$ finitamente generado con M/S artiniano. Como S es reflexivo y finitamente generado entonces se tiene que R/J es anillo semilocal completo, donde $J = \mathrm{Anul}(S)$ para lo cual bastará observar la Proposición 3.6. Como M/S es artiniano y reflexivo entonces $\mathrm{Hom}_R(M/S, E)$ es Noetheriano, es decir,finitamente generado. Ahora, si $L = \mathrm{Anul}[\mathrm{Hom}(M/S, E)]$, entonces R/L es semilocal completo. Pero $\mathrm{Anul}[\mathrm{Hom}_R(M/S, E)] = \mathrm{Anul}(M/S)$ y desde que $I = \mathrm{Anul}(M) \supset JL$ y también R/JL es semilocal completo entonces por la Proposición 3.6, parte (*ii*), se tiene R/I es semilocal completo.
Recíprocamente, asumiendo que M posee un submódulo $S \subset M$ finitamente generado, con M/S artiniano y que R/I es un anillo semilocal completo, donde $I = \mathrm{Anul}(M)$, entonces puesto que $J = \mathrm{Anul}(S) \supset \mathrm{Anul}(M) = I$, vemos que R/J es completo y semilocal, y así S es reflexivo. Como M/S es artiniano y $L = \mathrm{Anul}(M/S) \supset \mathrm{Anul}(M) = I$, vemos que R/L es completo y semilocal, entonces el R/L-módulo artiniano es reflexivo como un R/L-módulo. Por la Proposición 3.1, se tiene que M/S es un R-módulo reflexivo, y por la Proposición 3.3, se sigue que M es un R-módulo reflexivo. □

4. Conclusión

- Los R-módulos $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ y $\mathrm{Tor}^R_n(M, N)$ E-Matlis reflexivos pueden ser obtenidos a partir de un R-módulo M finitamente generado y, de un R-módulo N, E-Matlis reflexivo, para todo $n \geq 0$.
- El i-ésimo módulo de cohomología local $H^i_{\mathscr{M}}(M)$ de un A-módulo M I-Matlis reflexivo es artiniano para todo $i \geq 0$, y donde $\mathscr{M}$ es un sistema de ideales generado por el conjunto de ideales maximales.
- La clasificación de un cierto tipo de módulos se establece con respecto a un cogenerador inyectivo minimal de la categoría de R-módulos.

Referencias bibliográficas

[1] Brodmann, T. Y. and Sharp, R. (2013). *Local Cohomology: An algebraic Introduction with Geometric Applications*, volume 136 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 2013.

[2] Hartshorne, R. (1966). *A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall, 1961.* Lecture in mathematics. Springer Verlag, Berlin, New York, 1966.

[3] Lipman, J. (2002). *Lectures on local cohomology and duality. Local cohomology and its applications (Guanajuato, 1999).* Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 226 Decker.

[4] Mendoza Quispe, W. (2022). *Una generalización de cohomología local para complejos de módulos.* Tesis doctoral, FCM-UNMSM.

[5] Alba-Napoleón Caro, L. (2020). *Álgebra conmutativa.* Preprint.

[6] Belshoff, R. G., Enochs, E. E. and García Rozas, J. R. (2000). *Generalized matlis Duality.* Proc. Amer. Math. Soc, 128:1307-1312.

[7] Rotman, J. J. (2009). *An introduction to Homological Algebra.* Universitext. Springer-Verlag, New York.

[8] Sharp, R. Y. (1989). *A method for the study of Artinian modules, with an application to asymptotic behavior.* Math. Sci. Res. inst. Publ., (3):443-465.