PESQUIMAT 25(2): 16–31 (2022)
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v25i2.20942
ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Notas sobre puntos singulares irregulares de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y el wronskiano

José Luis Condori Condori[1]

Resumen: Presentamos una clasificación de los puntos singulares irregulares y el infinito de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden; además, mostramos algunos resultados del wronskiano de las soluciones y sus derivadas para esas ecuaciones. Usamos la referencia bibliográfica de Butkov y Krantz para el desarrollo del marco teórico, Sabbah enfoca el caso en variedades complejas y Scardua-León a ecuaciones diferenciales de segundo y tercer orden. Para conseguir los resultados empleamos reiteradamente el método inductivo-deductivo y el manejo de los índices para las series.

Palabras clave: funciones analíticas, puntos singulares, wronskiano

Notes on Irregular Singular Points of Wronskian and Second-Order Linear Differential Equations

Abstract: We present a classification of irregular singular points and infinity of second-order linear differential equations; Furthermore, we show some Wronskian results of the solutions and their derivatives for those equations. We use the bibliographic reference of Butkov and Krantz for the development of the theoretical framework, Sabbah focuses the case on complex manifolds and Scardua-León on second and third order differential equations. To achieve the results we repeatedly use the inductive-deductive method and the handling of the indices for the series

Keywords: analytic functions, singular points, wronskian

Recibido: 30/08/2022. *Aceptado:* 24/10/2022. *Publicado online:* 30/12/2022.

[1]UNSCH, Departamento Académico de Matemática y Física. e-mail: jose.condori@unsch.edu.pe

1. Introducción

Estudiamos los puntos singulares de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes las funciones analíticas. En el marco teórico describimos las nociones básicas de las ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden, el wronskiano, las funciones analíticas y la noción de los puntos singulares. En la sección de los resultados deducimos una clasificación de los puntos regulares y singulares en el origen, de ella descartamos algunos casos. Analizamos los casos del punto infinito. Finalmente, presentamos algunas situaciones del wronskiano de las derivadas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

2. Marco Teórico

2.1. Ecuación diferencial homogénea

Seguimos algunas ideas de Butkov[1]. Presentamos las ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0, \tag{1}$$

definida en un cierto intervalo I. Observamos que la aplicación trivial $y \equiv 0$ la satisface; además, la combinación lineal $Cy_1 + Dy_2$ de dos soluciones de ella y_1, y_2 también la cumple. Definamos las soluciones independientes de la ecuación diferencial homogénea.

Definición 1 *Decimos que dos soluciones y_1, y_2 definidas en un intervalo I son* **independientes** *si la condición*

$$C \cdot y_1(x) + D \cdot y_2(x) = 0. \tag{2}$$

satisfecha para todo $x \in I$ tiene solución únicamente para $C = 0, D = 0$.

Podemos completar las ideas de las soluciones de la ecuación diferencial anterior con el siguiente teorema.

Teorema 1 *Sean las aplicaciones y_1, y_2 linealmente independientes que también son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. Si y es cualquier solución de la ecuación diferencial entonces existen constantes C, D tal que $y(x) = Cy_1(x) + Dy_2(x)$ para todo $x \in I$, algún intervalo donde están definidas todas las funciones.*

2.2. Wronskiano

La condición de independencia lineal de dos funciones puede verse de otro modo, para ello necesitamos la siguiente definición.

Definición 2 *El* **wronskiano** *de las funciones y_1, y_2 se define por la fórmula*

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \tag{3}$$

para todo x definida en el intervalo I.

Veamos una propiedad del wronskiano de dos soluciones de la ecuación diferencial.

Teorema 2 *El wronskiano $W(y_1, y_2)$ de dos soluciones y_1, y_2 de la ecuación diferencial homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ definidas en $|x| < r$ es idénticamente nula o nunca se anula.*

Prueba Calculemos la derivada, $\frac{dW}{dx} = y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2 y_1'' - y_2' y_1' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$. Por el planteamiento del teorema las aplicaciones y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial homogénea, significan que $y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0, \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$. Multiplicando la primera ecuación por $-y_2$ y la segunda por y_1; a continuación sumamos ambas igualdades.

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + P(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

Podemos identificar las fórmulas del wronskiano en ella, es decir, $\frac{dW}{dx} + P(x)W = 0$ es la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden satisfecha por el wronskiano.
La solución de ese tipo de ecuación tiene la forma,

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(\eta)d\eta\right)$$

donde $W(x_0)$ es una constante con $x_0 \in I$.
Sabemos que la función exponencial nunca se anula. Deducimos las siguientes afirmaciones:

- Si $W(x_0) = 0$ entonces $W(x)$ es idénticamente cero, o
- Si $W(x_0) \neq 0$ entonces $W(x)$ nunca es cero. □

La relación de la independencia y el wronskiano de dos funciones está aclarada por el siguiente teorema.

Teorema 3 *Sean dos funciones y_1, y_2, tenemos la siguiente equivalencia:*

(i) *las funciones y_1, y_2 son linealmente independientes,*

(ii) *el wronskiano $W(y_1, y_2)$ es no nulo.*

Prueba La condición de independencia lineal $Cy_1 + Dy_2 = 0$ equivale a $Cy_1 + Dy_2 = 0$ y $Cy_1' + Dy_2' = 0$. A su vez, la última condición equivale a

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La independencia lineal equivale decir que la solución es única $C = D = 0$ si y sólo si $W(y_1, y_2)(x)$ no es cero para algún x de un intervalo I. □

2.3. Solución general de la ecuación homogénea

Para la solución general se necesitan hallar dos aplicaciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea; pero, basta tener una solución y_1 no nula de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

para deducir la otra función y_2; ambas linealmente independientes. El procedimiento descrito recibe el nombre de **método de variación de constantes,** que expresamos.
Ya tenemos una solución y_1 no nula, la otra solución tiene la forma $y_2 = C(x)y_1(x)$, donde

$$C(x) = \int_{x_1}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{\eta} P(\xi)d\xi\right)\frac{d\eta}{y_1(\eta)^2}, \tag{4}$$

para x_0, x_1 constantes arbitrarias. Se comprueba que y_1, y_2 son linealmente independientes.

2.4. Funciones analíticas

Tomemos algunas ideas básicas de Krantz [3].

Definición 3 *Una función f con dominio un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$ y rango los números reales se llama* **analítico real** *en $\alpha \in U$ si la función f se puede representar por una serie de potencias convergentes sobre algún intervalo de radio positivo centrado en α:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-\alpha)^j. \tag{5}$$

La función f se dice **analítico real sobre** $V \subset U$ si es analítico real en cada $\alpha \in V$; y se dice función analítica real si f es función analítica en cada $\alpha \in U$ y el conjunto de ellas denotamos por $C^w(U)$; analógamente, se tiene la definición de función analítica compleja.
La propiedad analítica real son cerradas por las operaciones algebraicas usuales. El radio de convergencia de deduce por la fórmula de Cauchy-Hadamard.

Proposición 1 *Para la serie de potencias $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-\alpha)^j$ definimos $A = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ y por*

$$\rho = \begin{cases} 0 & A = \infty \\ 1/A & 0 < A < \infty \\ \infty & A = 0. \end{cases}$$

Entonces ρ es el radio de convergencia de la serie de potencias alrededor de α.

Consecuencias directas: el radio de convergencia de la serie derivada es la misma que el radio de convergencia de la serie de potencias original; además, si f es analítico real en α entonces f es continua y tiene derivadas contínuas de todas las órdenes en α.

Algunas condiciones de la igualdad de dos funciones analíticas reales las mostramos ahora.

Proposición 2 *Sean f, g dos funciones analíticas reales sobre un intervalo abierto U.*
Si existe un punto $x_0 \in U$ tal que $f^{(j)}(x_0) = g^{(j)}(x_0)$ para $j = 0, 1, \ldots$ o si existe $W \subset U$ abierto tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in W$ o si existe una secuencia (x_n) en U con $\lim_{n\to\infty} x_n \in U$ tal que $f(x_n) = g(x_n)$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Entonces $f(x) = g(x)$ para $x \in U$.

La composición de funciones analíticas se preserva por composición. También se cumple el teorema de la función inversa.

Teorema 4 (Teorema de la Función Inversa) *Sea $f \in C^{\omega}(I)$ para algún intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$. Si $\alpha \in I$ tal que $f'(\alpha) \neq 0$, entonces existe una vecindad J de α y una función analítica real g definida en algún intervalo abierto K conteniendo $f(\alpha)$ tal que $g \circ f(x) = x, \forall x \in J$ y $f \circ g(x) = x, \forall x \in K$.*

2.5. Puntos singulares

Vamos a presentar la definición de puntos singulares o regulares de la ecuación diferencial de segundo orden en el origen. Sea la ecuación diferencial de la forma

$$y'' + \frac{P(x)}{x^p} y' + \frac{Q(x)}{x^q} y = 0, \tag{6}$$

donde simbolizamos las funciones analíticas $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ y los valores $p, q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

Definición 4 *Con las nomenclaturas anteriores definimos al origen $x = 0$ como un punto:*

- **regular** *si* $p = 0, q = 0$,
- **singular regular** *si* $p = 1, q = 2$, *que no sea punto regular,*
- **singular irregular** *en otro caso.*

Las ecuaciones diferenciales de la física matemática clásica son ejemplos recurrentes del asunto que definimos.

3. Resultados

3.1. Puntos singulares

Nos centramos en el origen y fijamos la ecuación diferencial dada por

$$y'' + \frac{P(x)}{x^p}y' + \frac{Q(x)}{x^q}y = 0, \tag{7}$$

donde

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

con $b_0 \neq 0, d_0 \neq 0$ son funciones analíticas en la vecindad de $|x| < r$, y los valores enteros $p \geq 0, q \geq 0$.

Considerando la simplificación de factores identificamos los siguientes pares de valores (p, q):

(i) Puntos regulares: $(0, 0)$.

(ii) Puntos singulares regulares: cinco pares $(1, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 2), (1, 2)$. En efecto,

- El par $(1, 0)$ se elije por

$$\frac{P(x)}{x^p} = \frac{P(x)}{x}, \quad \frac{Q(x)}{x^q} = Q(x) = \frac{x^2 Q(x)}{x^2}.$$

- El par $(1, 1)$ se elije por

$$\frac{P(x)}{x^p} = \frac{P(x)}{x}, \quad \frac{Q(x)}{x^q} = \frac{Q(x)}{x} = \frac{xQ(x)}{x^2}.$$

- El par $(0, 1)$ se elije por

$$\frac{P(x)}{x^p} = P(x) = \frac{xP(x)}{x}, \quad \frac{Q(x)}{x^q} = \frac{Q(x)}{x} = \frac{xQ(x)}{x^2}.$$

- El par $(0, 2)$ se elije por

$$\frac{P(x)}{x^p} = P(x) = \frac{xP(x)}{x}, \quad \frac{Q(x)}{x^q} = \frac{Q(x)}{x^2}.$$

- El par $(1, 2)$ se elije por

$$\frac{P(x)}{x^p} = \frac{P(x)}{x}, \quad \frac{Q(x)}{x^q} = \frac{Q(x)}{x^2}.$$

(iii) Punto singulares irregulares son otros puntos que pueden describirse por las siguientes tres posibilidades:

- $\{0\} \times \{q/q \geq 3\}$,
- $\{1\} \times \{q/q \geq 3\}$.
- $p \geq 2, q \geq 0$,

Veamos la clasificación completa de los puntos regulares y singulares de las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

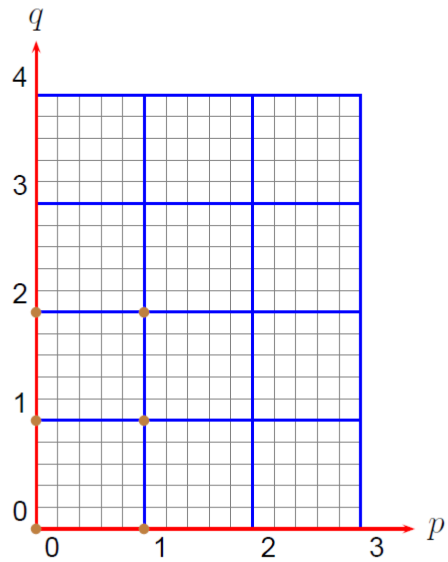

Figura 1: Puntos regulares y singulares

Puntos regulares y singulares regulares Ambos casos presentan resultados conocidos, para lo cual remitimos al lector a Scardua, León [6] o Rainville, Bedient [4].
Punto singulares irregulares En Sabbah [5] encontramos resultados del tema en superficies analíticas complejas; pero, presentamos resultados de la misma definición en el plano real que también tiene validez en el plano complejo.

Sea la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{P(x)}{x^p} y' + \frac{Q(x)}{x^q} y = 0.$$

Exigimos que las funciones P, Q sean analíticas en una vecindad $|x| < r$ del origen.

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

con $b_0 d_0 \neq 0$.

Una supuesta solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s},$$

de la ecuación diferencial (7), donde s la hallamos por la ecuación indicial.

Si reemplazamos en la ecuación diferencial de segundo orden obtenemos la ecuación

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n \cdot x^{n+s-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_k b_{n-k} \cdot x^{n+s-p-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} \cdot x^{n+s-q} = 0. \quad (8)$$

Analicemos el **primer caso** ($p = 0, q \geq 3$), afirmamos si hubiera alguna solución de la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + \frac{Q(x)}{x^q}y = 0$$

tendrá que ser nula. Reemplazamos el valor de $p = 0$ y considerar el valor entero $q \geq 3$ en la ecuación (8) se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n \cdot x^{n+s-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_k b_{n-k} \cdot x^{n+s-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} \cdot x^{n+s-q} = 0.$$

Observe que el exponente de la variable x no son iguales en las series, vamos a igualarlos a x^{n+s-q} debido al orden $0 < q-2 < q-1$. Reordenamos

$$\sum_{n=q-2}^{\infty} (n+s-q+2)(n+s-q+1)a_{n-q+2} \cdot x^{n+s-q}$$
$$+ \sum_{n=q-1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-q+1} (k+s)a_k b_{n-q+1-k} \cdot x^{n+s-q} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} \cdot x^{n+s-q} = 0.$$

Despejamos los valores de los índices de inicio de cada una de las tres series, $k = q-1$, tenemos

$$I + \sum_{n=q-1}^{\infty} [(n+s-q+2)(n+s-q+1)a_{n-q+2} + \sum_{k=0}^{n-q+1} (k+s)a_k b_{n-q+1-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k}] \cdot x^{n+s-q} = 0,$$

donde I es la ecuación indicial dada por

$$I = (s-1)sa_0 x^{s-2} + \sum_{n=0}^{q-2}\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} \cdot x^{n+s-q}.$$

Despleguemos la ecuación indicial en orden descendente ($s-2 > s-q$):

$$s(s-1)a_0 \cdot x^{s-2} + \sum_{k=0}^{q-2} a_k d_{q-2-k} \cdot x^{s-2} + \cdots + \sum_{k=0}^{1} a_k d_{1-k} \cdot x^{s-q+1} + a_0 d_0 \cdot x^{s-q} = 0.$$

Sabemos de antemano que el coeficiente $d_0 \neq 0$, por ello, de la igualdad $a_0 d_0 \cdot x^{s-q} = 0$ deducimos $a_0 = 0$. Podemos continuar, $0 = a_0 d_1 + a_1 d_0$ implica $a_1 = 0$; repetimos el proceso de igualar y cancelar factores, llegamos a la igualdad

$$\sum_{k=0}^{q-2} a_k d_{q-2-k} x^{s-2} = 0,$$

ella se reduce a $a_{q-2}d_0 = 0$, deducimos $a_{q-2} = 0$.

Significa que la ecuación indicial es idénticamente nula, es decir, cualquier s es una raíz de ella.

La fórmula de recurrencia de los coeficientes de la igualdad anterior será

$$(n+s-q+2)(n+s-q+1)a_{n-q+2} + \sum_{k=0}^{n-q+1} (k+s)a_k b_{n-q+1-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} = 0,$$

que se cumple para todo entero $n \geq q-1$.

Sabemos que $a_0 = \cdots = a_{q-2} = 0$. Probaremos que $a_n = 0$ para todo $n \geq q-1$. Por inducción matemática, evaluemos las sumas anteriores para $n = q-1$:

$$(s+1)sa_1 + \sum_{k=0}^{0}(k+s)a_k b_{-k} + \sum_{k=0}^{q-1} a_k d_{q-1-k} = 0.$$

Se cancelan casi todos los términos (incluyendo a_1 porque $q \geq 3$) excepto $a_{q-1}d_0 = 0$ que implica $a_{q-1} = 0$.

Vamos a suponer por induccion matemática que se cumple para n con $n \geq q-1$, es decir, $a_k = 0$ para todo $0 \leq k \leq n$. Veamos la fórmula de recurrencia para el valor de $n+1$:

$$(n+s-q+3)(n+s-q+2)a_{n-q+3} + \sum_{k=0}^{n-q+2}(k+s)a_k b_{n-q+2-k} + \sum_{k=0}^{n+1} a_k d_{n+1-k} = 0.$$

Antes de proceder a cancelar por inducción veamos las siguientes relaciones de los índices:

- $n-q+3 \leq n$,
- $n-q+2 < n$ porque $q > 2$.

Las sumatorias anteriores se reducen a $a_{n+1}d_0 = 0$ concluyendo $a_{n+1} = 0$.

Por tanto, se cumple que todos los coeficientes $a_n = 0$ y de ella cualquier solución dada por $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$ de la ecuación diferencial anterior tiene que ser nula.

Analicemos el **segundo caso** $\{1\} \times \{q/q \geq 3\}$ de ella afirmamos si hubiera alguna solución de la ecuación diferencial (7), la solución tendrá que ser nula.

Se sigue el mismo procedimiento del caso anterior y con las mismas simbologías de las series con $p = 1, q \geq 3$ deducimos de la fórmula de series (8),

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n \cdot x^{n+s-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_k b_{n-k} \cdot x^{n+s-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} \cdot x^{n+s-q} = 0.$$

Observe que $q \geq 3 > 2$ de donde $n+s-2 > n+s-q$. Vamos a modificar los índices correspondientes.

Primero, modificamos la tercera serie anterior (de menor orden):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n \cdot x^{n+s-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_k b_{n-k} \cdot x^{n+s-2}$$

$$+ \sum_{n=q-2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} \cdot x^{n+s-q} + \sum_{n=0}^{q-3}\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} \cdot x^{n+s-q} = 0.$$

Modificamos el índice de la tercera serie:

$\sum_{n=q-2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} \cdot x^{n+s-q} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n+q-2} a_k d_{n+q-2-k} \cdot x^{n+s-2}$.

Desarrollamos la última suma:

$\sum_{n=0}^{q-3}\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} \cdot x^{n+s-q} = a_0 d_0 \cdot x^{s-q} + (a_0 d_1 + a_1 d_0) \cdot x^{s-q+1} + \cdots + \sum_{k=0}^{q-3} a_k d_{q-3-k} \cdot x^{s-3}$.

Como ella es cero y $d_0 \neq 0$ deducimos que de la primera suma $a_0 d_0 = 0$ entonces $a_0 = 0$; sucesivamente

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{q-3} = 0.$$

Deducimos la fórmula de recurrencia igualando a cero los coeficientes correspondientes.

$$(n+s)(n+s-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}(k+s)a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n+q-2} a_k d_{n+q-2-k} = 0, \forall n \geq 0.$$

La fórmula corresponde al monomio x^{n+s-2} de la suma de las series.

Apliquemos el Método de Inducción Matemática. Evaluamos en $n = 0$:

$$s(s-1)a_0 + sa_0 b_0 + \sum_{k=0}^{q-2} a_k d_{q-2-k} = 0.$$

Se anulan los coeficientes de a_k para $0 \leq k \leq q-3$, excepto $a_{q-2}d_0 = 0$; por consiguiente, $a_{q-2} = 0$.

Supongamos que sea verdad $a_k = 0$ para todo $0 \leq k \leq n+q-2$. Veamos la veracidad para $n+1$, es decir, $a_{n+q-1} = 0$. Reemplazamos la fórmula de recurrencia para $n+1$:

$$(n+s+1)(n+s)a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n+1}(k+s)a_k b_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+q-1} a_k d_{n+q-1-k} = 0.$$

Hacemos algunas observaciones a los índices:

- $q \geq 3 > 2$ entonces $n+q-2 > n$ entonces $a_n = 0$;
- también $n+q-2 > n$ implica $n+q-2 \geq n+1$, luego, $a_{n+1} = 0$.

Se anulan todas los coeficientes reduciéndose $a_{n+q-1}d_0 = 0$, por consiguiente $a_{n+q-1} = 0$. Por tanto, todos los coeficientes $a_n = 0$ y la solución de la ecuación diferencial será nula.

Este razonamiento nos lleva a concluir que las soluciones en series generalizadas de la ecuación diferencial (7) con punto singular irreducible, corresponde al caso $p \geq 2, q \geq 0$. Detallemos estas afirmaciones.

La serie generalizada $y = \sum_{n=0} a_n x^{s+n}$ reemplazamos en la ecuación diferencial (7) con las nomenclaturas dadas. Obtenemos $S_1 + S_2 + S_3 = 0$ donde

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2},\\
S_2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_k b_{n-k} x^{n+s-p-1},\\
S_3 &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} x^{n+s-q}.
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de índices a $n+s-q$:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=q-2}^{\infty}(n+2-q+s)(n+2-q+s-1)a_{n+2-q}\cdot x^{n+s-q},\\
S_2 &= \sum_{n=q-p-1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n+p+1-q}(k+s)a_k b_{n+p+1-q-k}\cdot x^{n+s-q},\\
S_3 &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k}\cdot x^{n+s-q}.
\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación trasladada a series generalizadas será:

$$\sum_{n=q-2}^{\infty}(n+2-q+s)(n+2-q+s-1)a_{n+2-q}x^{n+s-q}+\sum_{n=q-p-1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n+p+1-q}(k+s)a_kb_{n+p+1-q-k}x^{n+s-q}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kd_{n-k}x^{n+s-q}=0. \tag{9}$$

Dividimos el caso $p\geq 2, q\geq 0$ en tres subcasos.

Subcaso: $p+1<q, p\geq 2, q\geq 0$ Razonando qué índice será el mayor.

- De $2\leq p$ deducimos $2<p+1$, de ahí $-p-1<-2$, sumándole q concluimos $q-p-1<q-2$.
- También de $p+1<q$ se concluye $0<q-p-1$.

Por tanto, el mayor índice es $q-2$ y sobre ese valor deducimos la fórmula de recurrencia

$$(n+2-q+s)(n+2-q+s-1)a_{n+2-q}+\sum_{k=0}^{n+p+1-q}(k+s)a_kb_{n+p+1-q-k}+\sum_{k=0}^{n}a_kd_{n-k}=0. \tag{10}$$

Se cumple para todo $n\geq q-2$.

Completamos las sumas de (9) con la ecuación indicial

$$\sum_{n=q-p-1}^{q-3}\sum_{k=0}^{n+p+1-q}(k+s)a_kb_{n+p+1-q-k}+\sum_{n=0}^{q-3}\sum_{k=0}^{n}a_kd_{n-k}=0; \tag{11}$$

que observamos es una ecuación lineal ($As+B=0$).

Subcaso: $p+1=q, p\geq 2, q\geq 0$
Tiene validez la fórmula (9). El orden de los índices son dados por $0=q-p-1<q-2$. La fórmula de recurrencia (10)se reduce a

$$(n+2-q+s)(n+2-q+s-1)a_{n+2-q}+\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_kb_{n-k}+\sum_{k=0}^{n}a_kd_{n-k}=0.$$

La ecuación indicial se reduce a

$$\sum_{n=0}^{q-3}\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_kb_{n-k}+\sum_{n=0}^{q-3}\sum_{k=0}^{n}a_kd_{n-k}=0;$$

que tiene la forma lineal $As+B=0$.

Subcaso: $p+1>q, p\geq 2, q\geq 0$
Este último caso la subdividimos en los dos subcasos siguientes:

- $q\geq 2, p\geq 2, p+1>q$. Deducimos la relación de los índices $q-p-1<0\leq q-2$. Obtenemos la fórmula de recurrencia (10) para $n\geq q-2$. La ecuación indicial será (11)

$$\sum_{n=q-p-1}^{q-3}\sum_{k=0}^{n+p+1-q}(k+s)a_kb_{n+p+1-q-k}+\sum_{n=0}^{q-3}\sum_{k=0}^{n}a_kd_{n-k}=0.$$

- $0 \leq q < 2, p+1 > q, p \geq 2$. Las desigualdades $q-2 < 0, q-p-1 < 0$ consideran a cero como el mayor índice de inicio de las series, así, la fórmula de recurrencia es (10), pero para $n \geq 0$.

  La ecuación indicial la deducimos de la igualdad (ver (9))

$$\sum_{n=q-2}^{-1} (n+2-q+s)(n+2-q+s-1)a_{n+2-q} \cdot x^{n+s-q} + \sum_{n=q-p-1}^{-1} \sum_{k=0}^{n+p+1-q} (k+s)a_k b_{n+p+1-q-k} \cdot x^{n+s-q} = 0.$$

En algunas situaciones las ecuaciones diferenciales con el origen como punto singular irregular tienen soluciones:

- idénticamente nulas, por ejemplo, la ecuación $y'' + y'/x^2 + y = 0$;
- analíticas no nulas como $y'' + y'/x^2 + y/x^2 = 0$.

Soluciones analíticas linealmente dependientes ($p \geq 2, q \geq 0$)

Sea el caso que el origen sea un punto singular irregular para la ecuación diferencial (6) dada por $y'' + \frac{P(x)}{x^p}y' + \frac{Q(x)}{x^q}y = 0$ para $p \geq 2, q \geq 0$. Supongamos que tenemos dos soluciones analíticas y_1, y_2 alrededor del origen. El wronskiano de ellos $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ también es una función analítica alrededor del origen, que podemos expresar por $W = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$. Por teoría de las ecuaciones diferenciales para la ecuación diferencial (6) se cumple

$$\frac{dW}{dx} + \frac{P(x)}{x^p}W = 0.$$

Si la función analítica P la representamos por $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ con $b_0 \neq 0$, vamos a probar que el wronskiano es idénticamente nula.

$$\begin{aligned} 0 &= x^p \frac{dW}{dx} + P(x)W \\ &= x^p \sum_{n=0}^{\infty} n w_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n w_n x^{n+p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} w_k x^n \\ &= \sum_{n=p-1}^{\infty} (n-p+1) w_{n-p+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} w_k x^n. \end{aligned}$$

Por hipótesis $p \geq 2$ entonces $p-1 \geq 1$; de ahí $1-p \leq -1$, deduciendo la siguiente relación de índices $n-p+1 \leq n-1 < n$. Por consiguiente tenemos la siguiente relación de coeficientes:

$$(n-p+1)w_{n-p+1} + \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} w_k = 0, \qquad n \geq p-1. \tag{12}$$

Agregando la suma restante:

$$\sum_{n=0}^{p-2} \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} w_k x^n = 0,$$

equivalente al hecho $\sum_{k=0}^{n} = 0$ para todo $n = 0, \ldots, p-2$ y a la solución nula $w_k = 0$ para todo $k = 0, \ldots, p-2$.

Evaluemos en $n = p-1$ en la relación de coeficientes (12), resultando $b_0 w_{p-1} = 0$, cancelando se deduce el valor $w_{p-1} = 0$. Supongamos que se cumple $w_k = 0$ para cualquier $0 \leq k \leq n$ con $n \geq p-1$. Por hipótesis inductiva vamos a probar que se cumple $w_{n+1} = 0$. En esta situación tenemos la relación de coeficientes para $n+1$:

$$(n+2-p)w_{n+2-p} + \sum_{k=0}^{n+1} b_{n+1-k} w_k = 0.$$

Si regresamos a la relación de índices $n - p + 1 < n$ se deduce $n - p + 2 \leq n$, reduciendo la relación de coeficientes a

$$0 = b_{n+1}w_0 + b_n w_1 + \cdots + b_1 w_n + b_0 w_{n+1};$$

por tanto, llegamos al deseo de $w_{n+1} = 0$. Todos estos valores nulos significan que el wronskiano es idénticamente nulo; a su vez decimos que dos soluciones analíticas son linealmente dependientes en una vecindad de un punto singular irregular ($p \geq 2, q \geq 0$) como planteamos al inicio.

Puntos en el infinito

Necesitamos entender la noción de punto en el infinito para la ecuación de segundo orden $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ definida en el intervalo $|x| > r$ para algún $r > 0$ y las funciones P, Q analíticas. Como el infinito no es un número procedemos a usar el cambio de coordenadas $x = 1/z$, ahora, alrededor del origen.

La primera derivadas da $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dz} = -z^2\dfrac{dy}{dz}$, mientras que la segunda derivada es $\dfrac{d^2y}{dx^2} = z^4\dfrac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\dfrac{dy}{dz}$. Al reemplazar en la ecuación diferencial planteada da la ecuación

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{2z - P(z^{-1})}{z^2}\frac{dy}{dz} + \frac{Q(z^{-1})}{z^4}y = 0. \tag{13}$$

Definición 5 *El infinito es un punto regular o singular para $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ si el origen es punto regular o singular para (13), respectivamente.*

Se fija la función analítica $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ y $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ con $b_0 d_0 \neq 0$. Veamos la situación de los coeficientes de ellas en la definición anterior, para lo cual escribimos

$$y'' + \frac{R(z)}{z^p}y' + \frac{S(z)}{z^q}y = 0. \tag{14}$$

donde R, S son funciones analíticas y

$$\frac{2z - P(z^{-1})}{z^2} = \frac{R(z)}{z^p}, \quad \frac{Q(z^{-1})}{z^4} = \frac{S(z)}{z^q}.$$

Se plantean los siguientes casos para el infinito:

Punto regular Los valores son $p = 0, q = 0$, pero se tiene

$$\frac{2z - P(z^{-1})}{z^2} = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2}(b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots),$$

por lo tanto, en ningún caso el infinito es punto regular para la ecuación diferencial planteada.

Punto singular regular Los valores son $p = 1, q = 2$, luego,

$$R(z) = \frac{1}{z}(2z - P(z^{-1})) = 2 - \frac{b_0}{z} - \frac{b_1}{z^2} - \frac{b_2}{z^3} - \cdots$$

que es analítico si $b_n = 0$ para todo $n \geq 0$ con $R(z) = 2$. Además,

$$S(z) = \frac{1}{z^2}(d_0 + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \cdots)$$

que es analítico si $d_n = 0$ para todo $n \geq 0$, entonces $S(z) = 0$.

En esta situación, la ecuación diferencial (en la variable z) se reduce a $y''(z) + (2/z)y'(z) = 0$, donde la solución tiene la forma $y(z) = c/z + d$, es decir, $y = cx + d$ con c, d constantes.

Punto singular irregular Tiene tres situaciones:

1. Para $p = 0, q \geq 3$. No se da este caso porque

$$R(z) = \frac{2z - P(z^{-1})}{z^2} = \frac{2}{z} - \frac{b_0}{z^2} - \cdots$$

no es analítica.

2. Para $p = 1, q \geq 3$ se tiene: $R(z) = \dfrac{2z - P(z^{-1})}{z} = 2 - \dfrac{b_0}{z} - \dfrac{b_1}{z^2} - \cdots$ que es analítico si $b_n = 0$ para todo $n \geq 0$. En este caso, $R(z) = 2$, $P(z) = 0$. La otra condición $\dfrac{S(z)}{z^q} = \dfrac{Q(z^{-1})}{z^4}$ tiene dos subcasos:
   - Si $q = 3$ la serie $S(z) = z^{-1}(d_0 + d_1/z + \cdots)$ es analítica si $d_n = 0$ para todo $n \geq 0$. En esta situación la ecuación se simplifica a

   $$y'' + \frac{2}{z}y'(z) = 0$$

   en la que el origen no es punto singular irregular.
   - $q \geq 4$ se tienen que $S(z) = z^{q-4}(d_0 + d_1/z + d_2/z^2 + \cdots) = d_0 z^{q-4} + \cdots + d_{q-4}$ es analítico y la ecuación

   $$y'' + \frac{2}{z}y' + \frac{S(z)}{z^q}y = 0$$

   tiene al origen como punto singular irregular (dependiendo si $S(z) \not\equiv 0$).

3. Para $p \geq 2, q \geq 0$. Se tiene que

$$R(z) = z^{p-2}(2z - b_0 - \frac{b_1}{z} - \cdots)$$

por ser analítico se reduce a $R(z) = 2z^{p-1} - \cdots - b_{p-2}$. Además, el otro factor $S(z) = z^{q-4}Q(z^{-1})$ tiene dos opciones:
   - Si $0 \leq q \leq 3$ se tiene $S(z) = Q(z) = 0$, aplicaciones nulas y la ecuación diferencial es

   $$y'' + \frac{2z^{p-1} - \cdots - b_{p-2}}{z^p}y' = 0$$

   que tiene al origen como punto singular irregular (dependiendo de $b_{p-2} \neq 0$).
   - Si $q \geq 4$ la expresión reducida

   $$S(z) = z^{q-4}(d_0 + d_1/z + \cdots) = d_0 z^{q-4} + \cdots + d_{q-4}$$

   es analítica y la ecuación diferencial es

   $$y'' + \frac{2z^{p-1} - \cdots - b_{p-2}}{z^p}y' + \frac{d_0 z^{q-4} + \cdots + d_{q-4}}{z^q}y = 0$$

   tiene al origen como punto singular irregular (dependiendo la no nulidad de coeficientes).

3.2. Wronskiano y linealidad

Respecto a la independencia lineal de funciones y sus derivadas.

Proposición 3 *Sean dos funciones diferenciables $y(x), z(x)$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se cumplen:*

1. *Si las derivadas $y'(x), z'(x)$ son linealmente independientes entonces $y(x), z(x)$ son linealmente independientes.*

2. *Recíprocamente, supongamos que para algún $x_0 \in I$ se verifica $y(x_0) = 0, z(x_0) = 0$. Si las funciones $y(x), z(x)$ son linealmente independientes entonces las funciones derivadas $y'(x), z'(x)$ son linealmente independientes.*

Prueba.

1. Supongamos que se verifica la combinación $Cy(x) + Dz(x) = 0$ para todo $x \in I$ tomando la derivada de ellas se tiene $Cy'(x) + Dz'(x) = 0$. Por hipótesis se obtiene los valores $C = 0, D = 0$, garantizando que las funciones y, z son linealmente independientes.

2. Para chequear que $y'(x), z'(x)$ sean linealmente independientes tenemos la ecuación lineal

$$Cy'(x) + Dz'(x) = 0$$

para todo $x \in I$. Por otra parte, se tiene $Cy(x_0) + Dz(x_0) = C \cdot 0 + D \cdot 0 = 0$.

Integramos la ecuación lineal:

$$C \int_{x_0}^{x} y'(t)dt + D \int_{x_0}^{x} z'(t)dt = \int_{x_0}^{x} 0dt.$$

Calculando, $C(y(x) - y(x_0)) + D(z(x) - z(x_0)) = L(x) - L(x_0)$, donde L es cualquier constante real porque $L' = 0$.

Seguimos con los cálculos, $Cy(x) - Cy(x_0) + Dz(x) - Dz(x_0) = L - L = 0$, después tenemos,

$$Cy(x) + Dz(x) = 0$$

para todo $x \in I$, y finalmente, por hipótesis inicial concluimos $C = 0, D = 0$. □

Wronskiano

Deducimos una relación del wroskiano de dos soluciones de la ecuación diferencial homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, con P, Q analíticos. Denotemos por y_1, y_2 las soluciones definidas en la bola $|x| < r$; ellas verifican:

$$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0, \quad y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0.$$

Multiplicamos la primera por y_2' y la segunda por y_1':

$$y_1''y_2' + Py_1'y_2' + Qy_1y_2' = 0, \quad y_2''y_1' + Py_2'y_1' + Qy_2y_1' = 0.$$

Procedemos a restar la segunda ecuación de la primera:

$$y_2''y_1' - y_1''y_2' + Q(y_2y_1' - y_1y_2') = 0.$$

Reordenamos la ecuación e identificamos el wronskiano, por tanto, $W(y_1', y_2') = QW(y_1, y_2)$.

Podemos deducir dos propiedades de ella:

- Si $Q(x) \neq 0$ para todo x se cumple la equivalencia

$$W(y_1', y_2') \neq 0 \Leftrightarrow W(y_1, y_2) \neq 0,$$

  es decir, y_1', y_2' son linealmente independientes si y sólo si y_1, y_2 son linealmente independientes. Ya no necesitamos la condición extra $(y(x_0) = 0 = z(x_0))$

- Por inducción matemática y preliminares se cumplen para todo entero $m \geq 1$

$$W(y_1^{(m)}, y_2^{(m)}) = Q^m(x)W(y_1, y_2) = Q^m(x)W(x_0)\exp(-\int_{x_0}^{x} P(\eta)d\eta).$$

Tenemos el siguiente resultado recíproco.

Teorema 5 *Supongamos que las funciones derivadas y_1', y_2' son linealmente independientes, para y_1, y_2 dos soluciones de la ecuación diferencial $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ en la bola $|x| < r$. Entonces:*

(i) *Las funciones y_1, y_2 son linealmente independientes.*

(ii) *La función Q no es idénticamente nula.*

Prueba. Si las funciones derivadas y_1', y_2' son linealmente independientes entonces existe un valor $|x_1| < r$ tal que $W(y_1', y_2')(x_1) \neq 0$. Reemplazamos en la fórmula:

$$W(y_1', y_2')(x_1) = Q(x_1)W(x_0)\exp(-\int_{x_0}^{x_1} P(\eta)d\eta).$$

Deducimos que $Q(x_1) \neq 0$ y $W(x_0) \neq 0$. Por tanto, $W(y_1, y_2)$ no se anula y las funciones soluciones y_1, y_2 son linealmente independientes, más aún $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $|x| < r$. $\square$

Vamos a considerar el caso de las soluciones y_1, y_2 linealmente dependientes; de esta partida deducimos una interesante deducción.

Una primera afirmación que arribamos es $W \equiv 0$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} k(c_k a_{n-k} - a_k c_{n-k}) = 0$$

para todo $n \geq 1$. Vamos aplicar y aclarar la simbología usada con el Principio de Inducción Matemática a los coeficientes a_n.

Teorema 6 *Supongamos dos soluciones $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ linealmente dependientes de la ecuación diferencial. Si los términos independientes $y_1(0) = 0, y_2(0) \neq 0$ entonces $y_1 \equiv 0$.*

Prueba. Como ya observamos se cumple la igualdad que proviene de $W \equiv 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(c_k a_{n-k} - a_k c_{n-k}) = 0$$

para todo $n \geq 1$.

Evaluamos $n = 1$ y tenemos $c_1 a_0 - a_1 c_0 = 0$; por otro lado, verificamos $0 = y_1(0) = a_0$, también $c_0 = y_2(0) \neq 0$. Reemplazamos en la igualdad anterior $a_1 c_0 = 0$, de ella deducimos $a_1 = 0$.

Supongamos que se cumple $a_k = 0$ para $0 \leq k \leq n$. Probaremos que se cumple $a_{n+1} = 0$. En efecto, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(c_k a_{n+1-k} - a_k c_{n+1-k}) = 0$$

Analicemos los índices:

- $1 \leq k \leq n+1$ deducimos $n \geq n+1-k \geq 0$ entonces $a_{n+1-k} = 0$.
- Para $1 \leq k \leq n$ se cumple $a_k = 0$.

  La suma de la inducción se reduce a $(n+1)(-a_{n+1}c_0) = 0$ y por consiguiente $a_{n+1} = 0$.

Por tanto, todos los coeficientes $a_n = 0$ y de ella $y_1 \equiv 0$. □

4. Conclusiones

Se concluye diciendo que el aporte del presente trabajo es de carácter teórico. Se ha restringido (p, q) de cada ecuación difererencial (7) del tipo singular irregular en el origen y del wronskiano. Se espera que este artículo sirva de referencia para completar analiticamente las soluciones de las ecuaciones diferenciales en los puntos singulares mostrados.

Referencias

[1] Butkov, E., (1973). *Mathematical Physics.* United States of America: Addison-Wesley.

[2] Coddington, E,, Levinson, N.(1955).*Theory of Ordinary Differential Equations.* India, New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd.

[3] Krantz, Steven, Park, H.,(1992).*A Primer of Real Analytic Functions.* Alemania, Berlin: Birkhauser Verlag.

[4] Rainville, E., Bedient, (1981). *Elementary Differential Equations.* United Stated of America: Macmillan Publishing Co., Inc.

[5] Sabbah, C. (1993). *Equations Differentielles a Points Singuliers Irreguliers en Dimension 2.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 43,5, 1619-1688.

[6] Scardua, B., León ,V.,(2019)..On singular Frobenius for Lineal Differential Equations of Second and Third orden, part 1: ordinary differential equations. Recuperado el 07 de marzo de 2021 de *https : //arxiv.org/pdf*/1906,04277.*pdf*.