PESQUIMAT 25(1): 1–6 (2022) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v25i1.21521 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

# Un dominio de integridad que posee elementos no nulos con infinitos divisores primos

***Napoleón Caro Tuesta* [1], *Mario Enrique Santiago Saldaña* [2]**

**Resumen:** Daremos un ejemplo de un dominio de integridad que posee elementos no nulos con infinitos divisores primos.
**Palabras clave:** ultrafiltro, ultrapotencia, ultraproducto, dominio de integridad, divisor primo

## An integral domain that has non-zero elements with infinite prime divisors.

**Abstract:** We give an example of an integral domain which has non-zero elements with infinite prime divisors.
**Keywords:** ultrafilter, ultrapower, ultraproduct, integral domain, prime divisor.

*Recibido:* 04/11/2021. *Aceptado:* 10/03/2022. *Publicado online:* 30/06/2022.



[1]UFPB, Departamento de Matemática, e-mail: napoleon.caro.tuesta@academico.ufpb.br
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: msantiagos@unmsm.edu.pe

# 1. Introducción

Dominios de factorización única o dominios que satisfacen la propiedad de cadena ascendente para sus ideales primos, son ejemplos de dominios cuyos elementos no nulos solo poseen un número finito de divisores primos (ver e.g. [2]). Queremos dar un ejemplo de un dominio de integridad que posea elementos no nulos con infinitos divisores primos.

# 2. Ultrafiltros y Ultrapotencias

## 2.1. Filtros y Ultrafiltros

**Definición 2.1.** Sea $\mathcal{I}$ un conjunto no vacío. Una familia no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathcal{I}$ es un **filtro sobre** $\mathcal{I}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

(F1) $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

(F2) Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(F3) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Si además se cumple

(F4) Para todo $A \subseteq \mathcal{I}$, o bien $A \in \mathcal{F}$, o bien $\mathcal{I} - A \in \mathcal{F}$,

diremos que $\mathcal{F}$ es un **ultrafiltro** sobre $\mathcal{I}$.

**Ejemplo 2.1.** Sea $\mathcal{I}$ un conjunto infinito, la familia

$$\mathcal{F}_{\text{cof}} = \{A \subseteq \mathcal{I} : \ \mathcal{I} - A \ \text{ es finito}\}$$

es un filtro sobre $\mathcal{I}$, llamado **filtro cofinito**.

**Ejemplo 2.2.** Sea $\lambda$ un elemento fijo de $\mathcal{I}$, la familia

$$\mathcal{F}_\lambda = \{A \subseteq \mathcal{I} : \lambda \in A\}$$

es un ultrafiltro sobre $\mathcal{I}$, llamado **filtro principal** o **filtro anclado en** $\lambda$.

**Proposición 1.** *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

Prueba. Ver [1, Theorem 1.5.2] ■

## 2.2. Ultraproductos y Ultrapotencias

Construiremos nuevos anillos y dominios introduciendo los conceptos de ultraproductos y ultrapotencias, para esto seguiremos las referencias [1] y [3].

Sea $\mathcal{I}$ un conjunto no vacío y sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{I}}$ una familia de conjuntos no vacíos indexada por $\mathcal{I}$. Por el Axioma de Elección, el producto cartesiano $\Gamma := \prod\limits_{\lambda\in\mathcal{I}} A_\lambda$ es un conjunto no vacío. Cada elemento de $\Gamma$ es una familia $(a_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{I}}$ tal que $a_\lambda \in A_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathcal{I}$.

Dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{I}$, considere en $\Gamma$ la relación $\sim$ definida por:

$$(a_\lambda) \sim (b_\lambda) \ \text{ si } \ \{\lambda \in \mathcal{I} : a_\lambda = b_\lambda\} \in \mathcal{U}. \tag{1}$$

Esta relación es de equivalencia. En efecto, veamos solo la transitividad. Supongamos que

$$(a_\lambda) \sim (b_\lambda) \ \text{ y } \ (b_\lambda) \sim (c_\lambda).$$

Por (1) tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \{\lambda \in \mathcal{I} : a_\lambda = b_\lambda\} \in \mathcal{U} \\ B &= \{\lambda \in \mathcal{I} : b_\lambda = c_\lambda\} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Desde que $A \cap B \in \mathcal{U}$ por (F2) y $\{\lambda \in \mathcal{I} : a_\lambda = c_\lambda\} \supseteq A \cap B$, concluimos, por (F3), que $\{\lambda \in \mathcal{I} : a_\lambda = c_\lambda\} \in \mathcal{U}$. Esto demuestra que $(a_\lambda) \sim (c_\lambda)$.

**Definición 2.2.** El conjunto cociente $\Gamma/\sim$ es llamado **ultraproducto de la familia** $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{I}}$ **módulo el ultrafiltro** $\mathcal{U}$.

Denotemos con $[(a_\lambda)]$ la clase de equivalencia de un elemento $(a_\lambda)$ de $\Gamma$.

**Proposición 2.** *El ultraproducto de una familia arbitraria de anillos conmutativos con identidad, es un anillo conmutativo con identidad. Más aún, si cada anillo es un dominio de integridad, entonces el ultraproducto también es un dominio de integridad.*

Prueba. Sea $A_\lambda$ un anillo conmutativo con identidad para cada $\lambda \in \mathcal{I}$. Equipamos el ultraproducro $\Gamma/\sim$ con las operaciones

$$\begin{aligned} [(a_\lambda)] + [(b_\lambda)] &= [(a_\lambda + b_\lambda)] \\ [(a_\lambda)] \cdot [(b_\lambda)] &= [(a_\lambda b_\lambda)] \end{aligned}$$

Vamos verificar que estas operaciones están bien definidas. Supongamos que

$$[(a_\lambda)] = \left[(a'_\lambda)\right] \quad \text{y} \quad [(b_\lambda)] = \left[(b'_\lambda)\right],$$

entonces

$$A = \{\lambda \in \mathcal{I} : a_\lambda = a'_\lambda\} \in \mathcal{U}$$

y

$$B = \{\lambda \in \mathcal{I} : b_\lambda = b'_\lambda\} \in \mathcal{U}.$$

Como $a_\lambda + b_\lambda = a'_\lambda + b'_\lambda$ para todo $\lambda \in A \cap B$ y $A \cap B \in \mathcal{U}$ por (F2), obtenemos, por (F3), que

$$\{\lambda \in \mathcal{I} : a_\lambda + b_\lambda = a'_\lambda + b'_\lambda\} \in \mathcal{U}.$$

Así, $(a_\lambda + b_\lambda) \sim (a'_\lambda + b'_\lambda)$. Esto demuestra que la suma está bien definida. De manera análoga se prueba la buena definición del producto.

Claramente $0 := [(0_\lambda)]$, donde $0_\lambda$ es el cero de $A_\lambda$, es el elemento cero para el ultraproducro $\Gamma/\sim$ y $1 := [(1_\lambda)]$, donde $1_\lambda$ es el uno de $A_\lambda$, es el elemento identidad. Es de rutina mostrar que $\Gamma/\sim$ con estas operaciones es un anillo conmutativo con identidad.

Asumamos ahora que $A_\lambda$ es un dominio de integridad para todo $\lambda \in \mathcal{I}$. Primero notemos que si $a = [(a_\lambda)]$ es un elemento no nulo de $\Gamma/\sim$, entonces $\{\lambda \in \mathcal{I} : a_\lambda = 0_\lambda\} \notin \mathcal{U}$. Por lo tanto, gracias a la condición (F4), $\{\lambda \in \mathcal{I} : a_\lambda \neq 0_\lambda\} \in \mathcal{U}$.

Ahora sean $a = [(a_\lambda)]$, $b = [(b_\lambda)] \in \Gamma/\sim$ dos elementos diferentes de cero. Entonces,

$$A = \{\lambda \in \mathcal{I} : a_\lambda \neq 0_\lambda\} \in \mathcal{U}$$

y

$$B = \{\lambda \in \mathcal{I} : b_\lambda \neq 0_\lambda\} \in \mathcal{U}.$$

En consecuencia, para $\lambda \in A \cap B$ se tiene que $a_\lambda b_\lambda \neq 0_\lambda$, de donde, por (F3)

$$\{\lambda \in \mathcal{I} : a_\lambda b_\lambda \neq 0_\lambda\} \in \mathcal{U}.$$

Por lo tanto, $ab \neq 0$. Concluimos así, que $\Gamma/\sim$ es un dominio de integridad. ■

**Definición 2.3.** Sea $D$ un conjunto no vacío. Si $A_\lambda = D$, para todo $\lambda \in \mathcal{I}$, el ultraproducto $\Gamma / \sim$ es llamado la **ultrapotencia de** $D$ **módulo el ultrafiltro** $\mathcal{U}$, y es denotado por $D^*$.

**Corolario 1.** *Si* D *es un dominio de integridad,* $D^*$ *también lo es. Además la aplicación*

$$D \ni a \longmapsto [(a_\lambda)] \in D^*,$$

*donde* $a_\lambda = a$ *para todo* $\lambda \in \mathcal{I}$*, es un monomorfismo de anillos.*

# 3. El ejemplo

En todo lo que sigue el conjunto de índices será $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales. Además, $\mathcal{U}$ indicará un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ que contiene al filtro cofinito $\mathcal{F}_{\text{cof}}$, y trabajaremos en el dominio $\mathbb{Z}^*$. Por el monomorfismo establecido en el Corolario 1, podemos identificar $\mathbb{Z}$ con un subanillo de $\mathbb{Z}^*$.

**Observación**. Establezcamos bien, en este contexto, que significa "$a$ divide a $b$ " en $\mathbb{Z}^*$.

Sean $a = [(a_n)]$ y $b = [(b_n)]$ dos elementos de $\mathbb{Z}^*$, entonces

$$\begin{aligned} a \mid b &\Leftrightarrow b = ac, \text{ para algún } c = [(c_n)] \in \mathbb{Z}^* \\ &\Leftrightarrow [(b_n)] = [(a_n c_n)] \\ &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \ b_n = a_n c_n\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \ a_n | b_n\} \in \mathcal{U} \end{aligned} \tag{2}$$

Por lo tanto,

$$a \nmid b \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \ a_n | b_n\} \notin \mathcal{U}.$$

De donde, por (F4)

$$a \nmid b \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n \nmid b_n\} \in \mathcal{U}. \tag{3}$$

Recuerde que si $p \in \mathbb{Z}$, entonces $p$ también denota el elemento $[(p, p, p, ...)]$ en $\mathbb{Z}^*$.

**Proposición 3.** *Si* $p$ *es primo en* $\mathbb{Z}$*, entonces,* $p$ *es primo en* $\mathbb{Z}^*$*.*

Prueba. Sean $a = [(a_n)]$ y $b = [(b_n)]$ dos elementos de $\mathbb{Z}^*$ tales que $p \nmid a$ y $p \nmid b$. Por (3) tenemos que

$$A = \{n \in \mathbb{N} : p \nmid a_n\} \in \mathcal{U} \text{ y } B = \{n \in \mathbb{N} : p \nmid b_n\} \in \mathcal{U}$$

luego para cada $n \in A \cap B$, $p \nmid a_n b_n$ (pues $p$ es primo en $\mathbb{Z}$). Así, por (F3)

$$\{n \in \mathbb{N} : p \nmid a_n b_n\} \in \mathcal{U},$$

de donde $p \nmid ab$ en $\mathbb{Z}^*$, lo que muestra que $p$ es primo en $\mathbb{Z}^*$ ■

**Teorema.** $\mathbb{Z}^*$ *posee elementos no nulos con infinitos divisores primos.*

Prueba. Bastará exhibir uno de tales elementos. Listemos los números primos de $\mathbb{Z}$ en orden cresciente,

$$p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$$

Consideremos el elemento

$$a = [(a_n)] \in \mathbb{Z}^*, \quad \text{donde} \quad a_n = \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

Afirmamos que $p_k|a$ en $\mathbb{Z}^*$ para todo $k \geq 1$. En efecto, para cada $k \geq 1$, el complemento del conjunto

$$\begin{aligned} A :&= \{n \in \mathbb{N} : \ p_k|a_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : \ n \geq k\} \end{aligned}$$

en $\mathbb{N}$, es un conjunto finito. Esto implica que $A \in \mathcal{F}_{\text{cof}}$ y consecuentemente, $A \in \mathcal{U}$. Por la caracterización dada en (2), concluimos que $p_k|a$.

Pero por la Proposición 3, $p_k$ es un elemento primo de $\mathbb{Z}^*$ para cualquier $k \geq 1$. De esa forma, hemos probado que $a$ posee infinitos divisores primos. ■

**Observación**. Es claro que a partir del elemento $a$ de la prueba anterior, se pueden construir infinitos elementos de $\mathbb{Z}^*$ que poseen infinitos divisores primos, otro de tales elementos sería, por ejemplo

$$a' = \left[(p_1, p_1p_2^2, p_1p_2^2p_3^3, ...)\right].$$

## Referencias bibliográficas

[1] Cohn, P.M. (2003). *Further Algebra and Applications.* Springer, London.

[2] Gilmer, R. (1992). *Multiplicative Ideal Theory.*, Queen's Papers in Pure and Applied Algebra, vol 90, Queen's University.

[3] Goldblatt, R. (1998). *Lectures on the Hyperreals.*, Springer-Verlag New York.