PESQUIMAT 24(2): 34–44 (2021) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v24i2.21562 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

El Núcleo del Operador Trazo de Orden m

Hubert Roman Tello [1] ***y Yolanda Santiago Ayala*** [2]

Resumen:
En este trabajo estamos interesados en demostrar que el núcleo del operador Trazo de orden m, es el espacio $H_0^m(\Omega)$ con Ω abierto acotado bien regular, inspirados por los resultados mostrados por M. Cavalcanti [11]. Finalmente, damos algunos comentarios.
Palabras clave: Operador Trazo, Núcleo de un operador, espacios de Sobolev, soporte compacto de una distribución, conjunto abierto bien regular.

The kernel of the m-order trace operator.

Abstract:
In this work, we are interested in prove that the kernel of the trace operator of m-order, is the space $H_0^m(\Omega)$ with Ω bounded open well-regular, inspired by the results shown by M. Cavalcanti [11]. Finally, we give some comments.

Keywords: Operator Trace, Kernel of an operator, Sobolev spaces, compact support of a distribution, well-regular open set.

Recibido: 15/11/2021. *Aceptado:* 02/12/2021. *Publicado online:* 30/12/2021.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: hroman@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:ysantiagoa@unmsm.edu.pe

1. Introducción

El operador $\gamma : H^m(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, denominado trazo de orden m, realiza un seguimiento dialéctico de las funciones $u \in H^m(\Omega)$ con $m \in \mathbb{Z}^+$ en el marco teórico de los espacios de Sobolev de orden fraccionario, donde la función u pierde una parte de su derivada pero gana un valor en la frontera de Ω denotado como $\Gamma = \partial\Omega$, realizando las restricciones necesarias en condición de regularidad, se tiene $\gamma(u) = (\gamma_0(u), ..., \gamma_{m-1}(u))$ donde $\gamma_j(u) = \left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_\Gamma$ para $j = 1, ..., m-1$, siendo ν la derivada normal de orden j y $\gamma_0(u) = u\big|_\Gamma$.
El operador trazo se aplica en la prueba de existencia y unicidad de soluciones no singulares como por ejemplo en los problemas de Dirichlet(PD) y de Newman(PN) respectivamente (para esto citamos [10]):

$$(PD) \quad \left| \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f \text{ en } \Omega \\ u|_\Gamma & = & h \text{ sobre } \Gamma \end{array} \right. \qquad (PN) \quad \left| \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f \text{ en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma & = & h \text{ sobre } \Gamma \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$; ν : vector normal unitario exterior
El problema de Dirichlet equivale a resolver el problema de minimización $\underset{u=0\,\text{en}\,\Gamma}{min} J(u)$, si $u\big|_\Gamma = u_0 = 0$, ambos problemas son equivalentes a $\underset{u\in H_0^1(\Omega)}{min} J(u)$, en esta formulación esta presente el espacio $H_0^m(\Omega)$ ¿ como se caracteriza el espacio $H_0^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{Z}^+$?.
El concepto de singularidad explica el concepto de turbulencia conjeturado por Leray al tratar de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes (ENS) para el caso tridimensional, que hasta hoy no ha sido resuelto. Intuitivamente las turbulencias se desarrollan de escalas energéticas con frecuencias bajas hacia escalas energéticas con frecuencias altas, disipándose debido a la viscosidad de algún fluido. El termino convectivo caracteriza la no linealidad de las ENS formuladas de la siguiente forma (para esto citamos [5], [13], [7]):

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma (u.\nabla) u - \sigma f + \nabla p - \nu \triangle u = 0 \quad \text{en} \quad [0, +\infty\rangle \times \mathbb{R}^n \tag{2}$$

$$\nabla . u = 0 \tag{3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{4}$$

Donde t es el tiempo, σ es la densidad constante del fluido, $f(x,t)$ es la fuerza externa actuando sobre el fluido, $\sigma(x,t)$ y $u(x,t)$ son la presión y el campo de velocidades respectivamente, ambas magnitudes físicas son desconocidas y ν describe la viscosidad cinemática del fluido. El movimiento de un cuerpo esta subordinada a una cierta variación temporal de la velocidad respecto de alguna posición que ocupa en el espacio; la aceleración esta dada por la formula $(u.\nabla) u + \frac{\partial u}{\partial t}$, donde $(u.\nabla) u$ es la aceleración convectiva. En esta formulación esta implícito el seguimiento $\gamma_1(u)$ y $\gamma_2(u)$ en forma de velocidad y aceleración respectivamente.
Considerando que, en investigaciones en el campo de la física de fluidos se usa condiciones de contorno tipo Dirichlet y Newman, en las ENS subyace un proceso dialéctico entre lo abstracto y concreto, en el sentido de que la naturaleza no se subordina a nosotros, el presente trabajo lo realizamos en el contexto principalmente matemático con el objetivo de caracterizar el espacio $H_0^m(\Omega)$. Si en la ecuación 2 la expresión no lineal $(u.\nabla) u$ se anula, la energía se puede controlar localmente , estaríamos en el caso del flujo laminar, pero si $(u.\nabla) u$ no se anula estaríamos ante el caso de un flujo turbulento, hasta hoy (inicio de Siglo XXI) no conocemos una explicación matemática formal de la transición de un flujo regular a un flujo turbulento. La evolución espacio-temporal de las escalas energéticas, en la cual la energía promedio unido a la temperatura generan calor disipado, es decir existe un potencial energético, que bajo ciertas condiciones

dicha evolución sucedida se anula producto de la aparición de una singularidad, lo que causa la disipación del proceso turbulento (para esto citamos [8], [15], [6]).
Si consideramos en las ENS:

$$\sigma = 1\,; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0\,; \quad (u.\triangledown)\, u = 0\,; \quad \triangledown p = 0\,; \quad \nu = 1.$$

Obtenemos (PD) de la ecuación 1, el cual en particular describiría el estado de equilibrio (en tiempo infinito) de una solución de la ecuación del calor que no depende del tiempo en el contorno del dominio de trabajo. La existencia y unicidad de solución esta probada usando el análisis funcional. Las escalas energéticas nos permite una intuición geométrica en el sentido del seguimiento del operador trazo en la dirección de la tangente del contorno del dominio de trabajo. Por la Hipótesis del continuo físico trabajaremos sobre un dominio abierto acotado bien regular cuya frontera este del mismo lado.
La completez del espacio $C^k(\Omega)$ nos permite diferenciar en el sentido débil y así evitar las singularidades. Una caracterización conocida del espacio que contiene a las funciones que se anulan en la frontera ($\gamma(u) = u\big|_\Gamma = 0$) esta dada por la relación $H_0^m(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$.
Los espacios de Sobolev permite medir el grado de regularidad en norma, la restricción en la condición de frontera (Γ como una variedad de clase C^∞, $n-1$ dimensional, de medida nula) exige trabajar con el operador Trazo de orden m, que es un operador de extension continuo y nos permitirá caracterizar el espacio $H_0^m(\Omega)$ como el Núcleo del operador Trazo expresado en la relación $Ker(\gamma) = H_0^m(\Omega)$ que es el resultado principal del presente trabajo.(Para la prueba del caso $Ker(\gamma) = H_0^m\left(\mathbb{R}_+^n\right)$. (para esto citamos [11])).

2. Preliminares

En esta sección enunciamos los resultados que usaremos para probar nuestro resultado principal sobre el Núcleo del Trazo de Orden m, para mayor detalle, el lector interesado puede consultar [11] así como [1, 2, 16].

El espacio de las funciones prueba dotado de la topología del límite inductivo $\mathcal{L}$, lo denotaremos por

$$\mathcal{D}(\Omega) = \left(C_0^\infty(\Omega)\,, \mathcal{L}\right). \tag{5}$$

Definición 1 *Se representa por $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ el conjunto formado por las restricciones a $\overline{\Omega}$ de todas las funciones prueba en $\mathbb{R}^n$, es decir:*

$$\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ \varphi\big|_{\overline{\Omega}} / \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \right\}. \tag{6}$$

El espacio normado $\left(W^{m,p}, \|.\|_{m,p}\right)$ es denominado espacio de Sobolev. En particular para $p = 2$ tenemos el espacio

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\,, \forall\alpha : |\alpha| \leq m\right\} \tag{7}$$

con norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \tag{8}$$

Proposición 1 *Si* $u \in W^{m,p}(\Omega)$ *y posee soporte compacto contenido en* Ω *entonces* $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

Si $p = 2$,
$$H_0^m(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^m(\Omega)}. \tag{9}$$

Teorema 1 *Sea* Ω *un subconjunto abierto acotado bien regular en* $\mathbb{R}^n$. *Entonces* Ω *tiene la propiedad de* $(m-p)$*-prolongamiento en relación a todo* $m \geq 1$ *y* $p \geq 1$.
para $p = 2, \Omega$ *tiene la propiedad* $(m-2)$ *prolongamiento.*

Lema 1 *Sea* $v \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$ *y* $S(v) \subset Q^+ \cup \sum$. *Entonces* $v \in H_0^1(Q^+)$ *y además satisface*
$$u_j = v \circ \varphi_j \in H_0^1(U_J^+); \quad \forall j \in \{1, ...k\}.$$

Lema 2 *Sea* $u \in H^1(\Omega)$ *tal que* $S(u) \subset U_j^+ \cup \Gamma_j$, *donde* $\Gamma_j = \Gamma \cap U_j$. *Definiendo:*
$$v_j(y) = \begin{cases} \left(u \circ \varphi_j^{-1}\right)(y) & ; y \in Q^+ \\ 0 & ; y \in \mathbb{R}_+^n \setminus Q^+ \end{cases}$$

tenemos que $v_j \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ y además :
$$(\gamma_0 v_j)(y) = \begin{cases} (\gamma_0 u)\left(\varphi_j^{-1}(y)\right) & ; c.t.p \text{ en} \sum \\ 0 & ; c.t.p \text{ en} \, \mathbb{R}^{n-1} \setminus \sum \end{cases}$$

Proposición 2 *Sean* $u \in H^1(\Omega)$ *y* $\theta \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. *Entonces* $\theta u \in H^1(\Omega)$ *y además satisface :*
$$\gamma_0(\theta u) = \gamma_0(\theta)\gamma_0(u).$$

Teorema 2 (Rellic-Kondrachov) *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado con frontera de clase* C^1. *Entonces la inclusión* $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ *es compacta.*

Definimos para todo $s \in \mathbb{R}$.
$$H^s(\Gamma) = \left\{u / \phi_i(u) \in H^s\left(\mathbb{R}^{n-1}\right), \, i = 1, ..., k\right\} \tag{10}$$
dotado de la norma
$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{i=1}^k \|\phi_i(u)\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}^2\right)^{1/2}. \tag{11}$$

2.1. Resultados del Teorema del Trazo

En este apartado daremos resultados probados en [11].

Teorema 3 *Existe una única aplicación lineal y continua:*
$$\gamma: \quad H^m(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Con núcleo $\gamma^{-1}(\{0\}) = H_0^m(\Omega)$, *que verifica la siguiente condición:*
$$\gamma\xi = \left(\xi|_\Gamma, \left.\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\right|_\Gamma, \ldots, \left.\frac{\partial^{m-1}\xi}{\partial\nu^{m-1}}\right|_\Gamma\right), \quad \forall\xi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Tal aplicación admite una inversa a la derecha lineal y continua.

En consecuencia $Im\,(\gamma) = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, donde ν es el vector normal unitario exterior a Ω abierto acotado bien regular.
Para el caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$

$$\gamma : \quad H^m(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

con núcleo $\gamma^{-1}(\{0\}) = H^m_0(\mathbb{R}^n_+))$, que verifica la siguiente condición:

$$\gamma\xi = \left(\xi|_{\mathbb{R}^{n-1}}\,, \left.\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\right|_{\mathbb{R}^{n-1}}, \ldots, \left.\frac{\partial^{m-1}\xi}{\partial x_n^{m-1}}\right|_{\mathbb{R}^{n-1}} \right), \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}).$$

Tal aplicación admite una inversa a derecha lineal y continua.
Tenemos probado que $Ker\,(\gamma) = H^m_0\left(\mathbb{R}^n_+\right)$.
Estamos interesados en probar el caso $Ker\,(\gamma) = H^m_0\,(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado bien regular es decir con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ como una variedad de clase C^∞ de dimension $n-1$ estando localmente del mismo lado de Γ.

3. El Núcleo del operador Trazo de Orden m

En esta sección demostraremos el resultado principal del presente trabajo, esto es, probaremos que el núcleo de la aplicación Trazo de orden m es el espacio $H^m_0\,(\Omega)$ para el caso Ω abierto, acotado bien regular.

Teorema 4 *Sea Ω un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ bien regular. Entonces la aplicación Trazo de Orden m posee $Ker\,(\gamma) = H^m_0\,(\Omega)$.*

Demostración. Sea $u \in H^m_0\,(\Omega)$, por definición (5) y (7)

$$\exists\,(\varphi_\nu) \subset \mathcal{D}\,(\Omega)\,/\varphi_\nu \to u \quad \text{en} \quad H^m\,(\Omega)\,. \tag{12}$$

Definamos:

$$\widetilde{\varphi}\,(x) = \begin{cases} \varphi_\nu\,(x) & ; x \in \Omega \\ 0 & ; x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{13}$$

De (13) tenemos $\widetilde{\varphi}\,(x) \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n)$ luego por (6) $\left.\varphi_\nu\right|_{\overline{\Omega}} \in \mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ para algún soporte compacto K tal que $K \subset \Omega$, $supp\,(\widetilde{\varphi_\nu}) \subset \Omega$. También

$$\left.\widetilde{\varphi}_\nu\right|_{\overline{\Omega}} = \varphi_\nu \to u \quad \text{en} \quad H^m\,(\Omega)\,,$$

de donde

$$\left.\widetilde{\varphi}_\nu\right|_{\overline{\Omega}} \to u \quad \text{en} \quad H^m\,(\Omega)\,. \tag{14}$$

Resulta de la convergencia en (14) que

$$\gamma\,(\widetilde{\varphi_\nu}) \to \gamma u \quad \text{en} \quad \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma). \tag{15}$$

Como $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ y por el hecho de que $\gamma\,(\widetilde{\varphi_\nu}) = \left.\widetilde{\varphi_\nu}\right|_\Gamma = 0$ y por unicidad de límite resulta que $\gamma\,(u) = 0 \quad \text{en} \quad \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, luego por definición del teorema del Trazo de orden m

$$\gamma\,(u) = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, ..., \gamma_{m-1} u) = (0, 0, ..., 0)\,.$$

Luego

$$u \in H^m(\Omega) / \gamma_0 u = \gamma_1 u = ... = \gamma_{m-1} u = 0$$

entonces $u \in Ker\gamma$.
Recíprocamente, sea $u \in Ker\gamma$ entonces

$$u \in H^m(\Omega) / \gamma_0 u = \gamma_1 u ... = \gamma_{m-1} u = 0. \tag{16}$$

Como Ω es abierto acotado bien regular, su frontera Γ es un compacto de $\mathbb{R}^n$ y por consiguiente, existirá un sistema finito de cartas locales $\{(U_i, \varphi_i)\}_{1 \le i \le k}$ para la frontera $\Gamma = \partial\Omega$. A partir de estas cartas locales construimos una partición C^∞ de la unidad subordinada al cubrimiento abierto $(U_i \cup \Omega)$ del abierto $\bigcup_{i=1}^{k} U_i \cup \Omega$ como $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, dichos abiertos contienen $\overline{\Omega}$. Denotaremos por $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_k$ las funciones de esa partición. Donde

$$\theta_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \forall i = 0, 1, ..., k \tag{17}$$

$$supp(\theta_0) \subset \Omega, \quad supp(\theta_i) \subset U_i, \forall i = 1, ..., k \tag{18}$$

$$0 \le \theta_i \le 1, \quad \forall i = 0, 1, ..., k \tag{19}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \theta_i = 1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{20}$$

Sea $u : \Omega \to \mathbb{K}$, representemos por $S(u) = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}$ en $\mathbb{R}^n$. Así,

$$x \notin S(u) \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (\mathbb{R}^n \setminus S(u)) \cap \Omega \subset \mathcal{O} \quad \text{tq} \quad \mathcal{O} \subset \Omega, \tag{21}$$

donde $\mathcal{O}$ es el mayor abierto para el cual u se anula casi siempre. Como $u(x) = 0$ cs en $\mathcal{O}$

$$(\mathbb{R}^n \setminus S(u)) \cap \Omega \subset \mathcal{O} \leftrightarrow \Omega \setminus \mathcal{O}. \tag{22}$$

Afirmación 3.1 $\quad$ *$supp(u) \subset S(u)$.*
Por (22) bastará probar que:

$$(\mathbb{R}^n \setminus S(u)) \cap \Omega \subset \mathcal{O}. \tag{23}$$

Sea $x \in (\mathbb{R}^n \setminus S(u)) \cap \Omega$. Entonces $x \in \Omega \wedge x \notin S(u)$. Luego, $\exists r > 0$ tal que:

$$B_r(x) \cap \{x \in \Omega / u(x) \neq 0\} = \emptyset \tag{24}$$

lo que implica que $u(y) = 0, \quad \forall y \in B_r(x)$. En particular, $(B_r(x) \cap \Omega)$ es un abierto para el cual u se anula lo que nos lleva a concluir que $(B_r(x) \cap \Omega) \subset \mathcal{O}$ y por consiguiente que $x \in \mathcal{O}$, lo que probaría (24).

Consideremos $u \in H^m(\Omega)$. Entonces $u = u\theta_0 + \sum_{i=1}^{k} u\theta_i$ en $\overline{\Omega}$. Por las cartas locales anteriormente definidas, definamos , para cada $i = 1, ..., k$:

$$\begin{array}{rcl} w_i : \Omega & \longrightarrow & K \\ x & \mapsto & u(x)\,\theta_i(x) \end{array}. \tag{25}$$

De las condiciones de la partición de la unidad (19), (20), definidas anteriormente se tiene $D^\alpha(\theta_i) = 0, \quad \forall i = 0, 1, ..., k$ y de la formula de Lebnitz obtenemos

$$\|D^\alpha(u\theta_i)\| \le \|D^\alpha u\| \, \|\theta_i\| \le \|D^\alpha u\|. \tag{26}$$

De (26) obtenemos que

$$\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}(u\theta_i)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}u\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{27}$$

de donde obtenemos que $\omega_i = u\theta_i \in H^m(\Omega)$.
Además,

$$x\in S(\theta_i)\Rightarrow x\in\Gamma/\theta_i(x)\neq 0$$

luego

$$x\in\Gamma\subset\bigcup_{i=0}^{k}U_i\,/\,\theta_i(x)\neq 0$$

entonces $x\in U_i$ para algun $i\neq 0$ es decir $x\in U_i\,/\,\theta_i(x)\neq 0\Rightarrow x\in supp(\theta_i)$.
por tanto se tiene que $S(\theta_i)\subset supp(\theta_i)$. Luego

$$S(u\theta_i)=\overline{\{x\in\Gamma/(u\theta_i)\neq 0\}}\subset S(u)\cap S(\theta_i)\subset\Gamma\cap supp(\theta_i)\subset\Gamma\cap U_i$$

posee soporte compacto de $\mathbb{R}^n$ contenido en U_i. También tenemos que:

$$u\frac{\partial(\theta\varphi)}{\partial x_i}=(u\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+(u\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \tag{28}$$

$$-(u\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-u\frac{\partial(\theta\varphi)}{\partial x_i}+(u\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}. \tag{29}$$

Aplicando (29) en la siguiente definición:

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial(\theta u)}{\partial x_i},\varphi\right\rangle&=\int_\Omega\frac{\partial(\theta u)}{\partial x_i}\varphi dx=-\int_\Omega(\theta u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx\\&=\int_\Omega -u\frac{\partial(\theta\varphi)}{\partial x_i}dx+\int_\Omega(u\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\\&=\int_\Omega\theta\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi dx+\left\langle u\frac{\partial\theta}{\partial x_i},\varphi\right\rangle\\&=\left\langle\theta\frac{\partial u}{\partial x_i},\varphi\right\rangle+\left\langle u\frac{\partial\theta}{\partial x_i},\varphi\right\rangle\\&=\left\langle\theta\frac{\partial u}{\partial x_i}+u\frac{\partial\theta}{\partial x_i},\varphi\right\rangle\end{aligned} \tag{30}$$

por tanto

$$\frac{\partial(\theta u)}{\partial x_i}=\theta\frac{\partial u}{\partial x_i}+u\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\in L^2(\Omega). \tag{31}$$

Entonces de (31) y el hecho de que $supp(u\theta_0)\subset supp(\theta_0)$ posee soporte compacto contenido en Ω por (18), entonces $u\theta_0\in H_0^m(\Omega)$ por proposición 1
Afirmación 3.2 $\quad u\theta_j\in H_0^m(\Omega)\quad\forall j=1,...,k$.
En efecto, de (28) tenemos que $u\theta_j\in H^m(\Omega)$. Como el dominio de definición Ω es abierto limitado bien regular, podemos considerar un punto genérico $x\in\Gamma$ para el cual existe una vecindad abierta limitada U_x en $\mathbb{R}^n$ de x y una aplicación $\varphi_x:U_x\to Q$ que es un difeomorfismo de clase C^∞ y que satisface la condición de compatibilidad, donde Q es un rectángulo abierto. Podemos definir ahora para cada $i=1,...,k$ la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl}v_i:Q^+&\longrightarrow&\mathbb{K}\\ y&\mapsto&\omega_i\left(\varphi_i^{-1}(y)\right)\end{array}. \tag{32}$$

Como $S(\omega_i) = S(u\theta_i)$ es un compacto de $\mathbb{R}^n$ contenido en U_i entonces $d(S(\omega_i), \mathbb{R}^n \setminus U_i) > 0$ lo que implica que $S(\omega_i)$ no intercepta a $\Gamma = \partial U_i$, de la afirmación 3.1 $supp(\omega_i)$ también no intercepta a $\Gamma = \partial U_i$.
Afirmación 3.3 $\quad S(v_i) = \varphi_i(S(\omega_i))$.
En efecto, sea $y \in S(v_i)$. Entonces existe $(y_\nu) \subset Q^+$ tal que $y_\nu \to y$, luego existe $x \in U_i$ tal que $y = \varphi_i(x)$.
Afirmación 3.4: $\quad x \in S(\omega_i)$.
En efecto, tenemos :

$$\begin{aligned} y \in S(v_i) &= \overline{\left\{y \in \sum / v_i(y) \neq 0\right\}} \\ v_i(y) &= (w_i)\left(\varphi_i^{-1}(y)\right) \neq 0 \\ w_i(x) &\neq 0 / x = \varphi_i^{-1}(y) \in \Gamma \\ x &\in S(w_i). \end{aligned}$$

así como

$$x_\nu = \varphi_i^{-1}(y_\nu) \to \varphi_i^{-1}(y) = x, \quad x_\nu \in U_i \cap \Omega$$

además $\omega_i(x_\nu) = \omega_i\left(\varphi_i^{-1}(y_\nu)\right) = v_i(y_\nu) \neq 0$. Luego, $y \in \varphi(S(\omega_i))$.
Recíprocamente, sea $y \in \varphi_i(S(\omega_i))$. Entonces, $y = \varphi_i(x)$ para algún $x \in S(\omega_i)$.
Afirmación 3.5: $\quad y \in S(v_i)$
En efecto, existe una sucesión $(x_\nu) \subset U_i$ tal que $x_\nu \to x$ con $\omega_i(x_\nu) \neq 0$. Así mismo,

$$y_\nu = \varphi_{i(x_\nu)} \to \varphi_{i(x)} = y, \quad y_\nu \in Q^+$$

además ,

$$v_i(y_\nu) = \omega_i\left(\varphi_i^{-1}(y_\nu)\right) = \omega_i(x_\nu) \neq 0.$$

Por tanto $y \in S(v_i)$ lo que prueba la afirmación 3.3.
Siendo $\varphi_i : U_i \to Q$ una función continua y $S(\omega_i)$ un compacto contenido en U_i establecido anteriormente se sigue de la afirmación 3.3 que $S(v_i)$ es un compacto contenido en Q. Luego, $d(S(v_i), \mathbb{R}^n \setminus Q) > 0$ lo que prueba que $S(v_i)$ no intercepta $\Gamma = \partial Q$.
De (32) podemos definir

$$v_j(y) = \begin{cases} (u\theta_j)\left(\varphi_j^{-1}(y)\right) & ; y \in Q^+ \\ 0 & ; y \in \mathbb{R}^n_+ \setminus Q^+ \end{cases} \tag{33}$$

Como $S(u\theta_j) \subset U_j \cap \overline{\Omega}$ tenemos que

$$S(v_j) = \varphi_j(S(u\theta_j)) \subset \varphi_j\left(U_j \cap \overline{\Omega}\right) = Q^+ \cup \sum \quad / \sum = Q \cap \{y_n = 0\} \tag{34}$$

además

$$S(u\theta_j) \subset S(u) \cap supp(\theta_j) \subset \Gamma \cap U_j$$

de donde obtenemos

$$S(u\theta_j) \subset S(u) \cap supp(\theta_j) \subset \overline{\Omega} \cap U_j$$

en consecuencia se tiene la relación

$$S(u\theta_j) \subset \overline{\Omega} \cap U_j = (\Omega \cup \Gamma) \cap U_j = U_j^+ \cup \Gamma_j \quad / \quad \Gamma_j = \Gamma \cap U_j$$

entonces por el lema 2, $v_j \in H^m\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, y además se tiene lo siguiente

$$(\gamma v_j)(y) = \begin{cases} \gamma(u\theta_j)\left(\varphi_j^{-1}(y)\right) & ; c.s \quad y \in \sum \\ 0 & ; c.s \quad y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \sum \end{cases} \tag{35}$$

Por la proposición 2 y de (16) se verifica

$$\gamma_i(u\theta_j) = \gamma_i(u)\,\gamma_i(\theta_j) = 0 \quad \forall j = 1, ..., k; \forall i = 0, 1, ..., m-1 \tag{36}$$

luego de (35) y (36)

$$(\gamma v_j)(y) = 0 \quad c.s. \quad \text{en} \quad \sum$$

en consecuencia

$$(\gamma v_j)(y) = 0 \quad c.s. \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^{n-1}; \quad \forall j = 1, ..., k. \tag{37}$$

Resulta de (37) y del hecho de que el $Ker\gamma = H^m_0\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ de la aplicación Trazo de orden m dada en la sección 2.1

$$\gamma: \quad H^m(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

de donde obtenemos que $v_j \in H^m_o\left(\mathbb{R}^n_+\right); \quad \forall j = 1, ..., k.$
Ademas de eso, por (34) $S(v_j) \subset Q^+ \cup \sum$. Luego, por Lema 1 tenemos que $\omega_j = v_j \circ \varphi_j \in H^m_0\left(U^+_j\right)$ en consecuencia podemos realizar la siguiente extension por cero

$$\widetilde{\omega_j}(x) = \widetilde{v_j \circ \varphi_j}(x) = \begin{cases} v_j \circ \varphi_j(x) & ; x \in U^+_j \\ 0 & ; x \in \Omega \setminus U^+_j \end{cases} \tag{38}$$

De aquí y de las afirmaciones 3.2, 3.3 y de (33) obtenemos

$$\widetilde{\omega_j}(x) = \widetilde{v_j \circ \varphi_j}(x) = \begin{cases} v_j(\varphi_j(x)) = v_j(y) = (u\theta_j)\left(\varphi^{-1}(y)\right) = (u\theta_j)(x) & ; x \in U^+_j \\ 0 & ; x \in \Omega \setminus U^+_j \end{cases} \tag{39}$$

de (39) obtenemos también

$$\widetilde{\omega_j}(x) = \widetilde{v_j \circ \varphi_j}(x) = \begin{cases} (u\theta_j)(x) & ; x \in U^+_j \\ 0 & ; x \in \Omega \setminus U^+_j \end{cases} \tag{40}$$

y de (40) $\widetilde{\omega_j}(x) \in H^m_0(\Omega)$. Como $\widetilde{\omega_j}(x) = 0$ en $\Omega \setminus U^+_j$ vemos de (39) y (40) que

$$v_j \circ \varphi_j = u\theta_j \quad \text{en} \quad \Omega. \tag{41}$$

Por tanto, $u\theta_j \in H^m_0(\Omega); \forall j = 1, ..., k$, conforme a lo que queríamos demostrar.

4. Conclusiones

1. La importancia de este trabajo radica en el hecho de poder formalizar las restricciones de los valores de funciones en la frontera que esta del mismo lado del dominio de estudio de un cierto espacio de Sobolev, que al anularse ahí, dichas funciones están en el núcleo generado por el operador trazo de algún orden natural.

2. Consideramos que esta importancia trasciende al campo de la física y la tecnología, como por ejemplo el estudio de la tomografía de Impedancia eléctrica, la liberación controlada de drogas, trabajos en los cuales esta presente el concepto de nulidad en la frontera.

3. Intuitivamente el encuentro entre una partícula que se mueve en el interior de algún sistema con borde definido y una partícula que logre transportarse desde el exterior hasta el borde de dicho sistema, puedan ahí anularse bajo ciertas condiciones, sugiere asociarla con la ecuación $\gamma(u) = u = v\big|_{\partial\Omega} = 0$, un ejemplo en abstracto serian las denominadas vacunas vectoriales que construyen los laboratorios de avanzada tecnología para neutralizar el virus del SARS-Cov-2 (para esto citamos [9] y [12]).

4. Probamos una caracterización del espacio $H_0^m(\Omega)$ como el núcleo de la aplicación Trazo

$$\gamma: \quad H^m(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

   esto es,

$$Ker\gamma = H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) / \gamma_0 u = ... = \gamma_{m-1} u = 0\} \tag{42}$$

5. En particular si en la ecuación (13) consideramos

$$u(x,0) = u\big|_{\mathbb{R}^{n-1}}(x) = u_0(x) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma,$$

   esta restricción del valor en la frontera de los problemas de Dirichlet implica que dada algún $u \in H_0^m(\Omega)$, donde por la conclusión 4, observamos que $H_0^m(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones que son limites en $H^m(\mathbb{R}^n)$ de funciones diferenciables de algún orden dado y que se anulan fuera de Ω.

6. Así podemos concluir que el Teorema del Trazo de Orden m y su núcleo pueden dar una visión geométrica a través de los espacios Hilbertianos de orden entero y fraccionario en relación a las escalas energéticas . El núcleo podría ser el espacio donde exista la probabilidad de que ahí se disipe la turbulencia en forma de calor. Creemos que dicha visión geométrica trasciende el concepto de frontera con el que hemos trabajado en el sentido de la curvatura del espacio , es decir cabe la posibilidad de trabajar en una nueva escala energética que nos permita retestear para poder controlar la energía en tiempo infinito.

Referencias bibliográficas

[1] Adams, R. (1975). *Sobolev Spaces.* United States of America, New York: Academic Press.

[2] Claude Zuily (2002). *Éléments de distributions et D'équations Aux Dérivées partielles Cours et problemes résolus* Dunos, Master. E'coles d'ingenieurs. París.

[3] Fredéric Rousset (2016)*Solutions Faibles de L'Equation de Navier-Stokes Des Fluides Compressibles* (dápres A. Vasseur et C. Yu).Séminaire BOURBAKI. 69éme année, n° 1135.

[4] Irene Marín Gayte (2016) *Solutions Faibles de L'Equation de Navier-Stokes Des Fluides Compressibles* (dápres A. Vasseur et C. Yu).Séminaire BOURBAKI. 69éme année, n° 1135.

[5] J.L.Lions (1960) *Sur la régularité et l'unicité des solutions turbulentes des e´quations de Navier Stokes* (Rendiconti del Seminario Matematico della Universita Di Padova).

[6] J.L.Vasquez, (2003) *Fundamentos matematicos de la Mecánica de Fluidos.* Notas Curso Doct.)Universidad Autónoma de Madrid. España.

[7] Juan Luis Vásquez (2004). *La ecuacion de Navier-Stokes. Un reto físico-matemático para el siglo XXI.* Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza,26:31-56. Dpto. de Matematicas. Univ. Autonoma de Madrid.

[8] Jose I. Cardesa, Alberto Vela-Martín and Javier Jimenez (2017). *The turbulent cascade in five dimensions.* Science 357(6353),782-784. doi: 10.1126/Science.aan7933originally published online August 17,2017.

[9] Logunov DY. Dolzhikova IV. Shcheblyakov DV.et al.(2021) *Seguridad y eficacia de una vacuna COVID-19 heterologa prime-boost basada en vectores rAd26 y rAd5: un analisis intermedio de un ensayo de fase 3 controlado aleatorio en Rusia.* Lanceta.2021.

[10] L.A.Medeiros, M.Milla Miranda (2000) *Espaços de Sobolev. Iniciação aos Problemas Eliticos não homogeneos* (Vol.3) Instituto de Matematica-UFRJ. ISBN:85-87674-03-X.

[11] Marcelo M. Cavalcanti (2015). *Introduction to the Theory of distributions and to Sobolev Spaces.* Universidad Estadual de Maringá, New York: Academic Press.

[12] María Jimenez-Valera, Alfonso Ruiz-Bravo(2020) *SARS-COV-2 y pandemia de síndrome respiratorio agudo (COVID-19)* (Vol.3). Universidad de Granada, Facultad de Farmacia, Departamento de Microbiologia, Granada, España.Aes Pharm.2020;61(2);63-79.

[13] O.A. Ladyzhenskaya (1963). *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow* (Revised Second Edition-Translated from the Russian by Richard A. Sailverman). Mathematics and Its Applications. A series of Monographs and Texts VOLUME 2. gordon and breach science publishers.

[14] Rafael Ballesteros Tajadura (2004-2005). *Turbulencia* (Curso 2004-2005)). Universidad de Oviedo. Área de Mecánica de Fluidos.

[15] Salvador de las Heras (2012) *Mécanica de Fluidos en Ingenieria* . 08820 El Prat de Llobregat(Barcelona).Universitat Politecnica de Catalunya. 1997-2011.

[16] Tartar, L.(2007) *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces* (Vol.3) Springer Science Business Media.