

## Solución de problemas de optimización topológica usando el método de gradiente espectral proyectado no monótono

*Darwin Castillo Huamaní*<sup>1</sup> y *Edinson Raúl Montoro Alegre*<sup>2</sup>

**Resumen:** En este trabajo, proponemos el método de gradiente espectral proyectado no monótono para resolver el problema de la minimización de la flexibilidad de una estructura estática, problema clásico en optimización topológica. El presente método tiene prueba de convergencia global y es fácil de implementar. El desempeño del método propuesto es estudiado a través de ejemplos numéricos en dos dimensiones.

**Palabras clave:** Optimización topológica; elementos finitos; gradiente espectral proyectado no monótono.

## Solving topology optimization problems using nonmonotone spectral projected gradient method

**Abstract:** In this work, we propose the nonmonotone projected spectral gradient method to solve the problem of minimizing compliance of a static structure, classic problem in topology optimization. The present method has proof of global convergence and is easy to implement. The performance of the proposed method is studied through numerical examples in two dimensions.

**Keywords:** Topology optimization; finite elements; nonmonotone spectral projected gradient method.

*Recibido:* 15/11/2021.    *Aceptado:* 18/12/2021.    *Publicado online:* 30/12/2021.

<sup>1</sup>UTP, e-mail: [c18031@utp.edu.pe](mailto:c18031@utp.edu.pe)

<sup>2</sup>UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: [montoroa@unmsm.edu.pe](mailto:montoroa@unmsm.edu.pe)

## 1. Introducción

Optimización topológica (OT) es un método computacional que busca la distribución óptima de un material dentro de un dominio, considerando condiciones de frontera, restricciones del proyecto y las propiedades del material. Un problema clásico en OT es la minimización de la flexibilidad de una estructura estática sujeta a una fuerza externa, con condiciones de frontera y una restricción de volumen. Después de obtener la discretización del dominio, usamos una función binaria para representar la selección de material. Si el valor de la función es uno, colocamos material y si el valor de la función es cero, retiramos material. Tomando como base esa idea, el problema de OT se convierte en un problema de optimización con variables discretas. Sin embargo, dada la dificultad de resolver problemas de OT con variables discretas, la función binaria es reemplazada por una función de variable continua con valores entre 0 y 1, y el problema de OT es transformado en un problema de optimización no lineal, donde los valores intermedios,  $0 < x_e < 1$ , no representan el material.

Bendsøe [3], presento el método de las densidades, o Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP), en el que se sustituye la función binaria por una función potencia  $x_e^p$  continua, con valores adecuados de  $p$  [7], para penalizar los valores intermedios de las variables, denominadas densidades.

Para resolver el problema de OT, que generalmente es un problema de optimización de gran escala, se emplea métodos de optimización de primera orden para evitar el alto costo de calcular la segunda derivada del problema. La mayoría de los métodos de optimización que se utilizan para resolver problemas de OT carecen de la prueba de convergencia global, por ejemplo, el método de las asíntotas móviles, o The Method of Moving Asymptotes (MMA) que fue introducido por Svanberg [8].

Birgin, Martinez y Raydan [4] presentaron el método de gradiente espectral proyectado no monótono, o Nonmonotone Spectral Project Gradient (SPG), que es la combinación del paso de Barzilai-Borwein [2] con búsqueda lineal no monótona de Grippo, Lampariello, y Lucidi [6]. La principal ventaja del método SPG radica en la aproximación de la Hessiana de la función objetivo del problema y la forma de proyectar un punto arbitrario en el conjunto viable del problema. En este trabajo, proponemos el método SPG para resolver el problema de la minimización de la flexibilidad de una estructura estática. Escogimos el método SPG por el cálculo simple de la proyección de un punto sobre la restricción lineal y de caja del problema. Además, el método SPG tiene prueba de convergencia global.

## 2. Formulación del problema

El objetivo del problema de la minimización de la flexibilidad de una estructura estática es encontrar los puntos del dominio que serán llenados de material, satisfaciendo las condiciones de frontera y la restricción de volumen. Después de la discretización del dominio, la formulación del problema es dado por

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\ &\text{s a} && \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ &&& \sum_{e=1}^{nel} x_e v_e - \eta \mathbf{V} \leq 0 \\ &&& 0 \leq x_e \leq 1, \quad \forall e \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $\mathbf{C}$  es la flexibilidad de la estructura,  $nel$  es el número de elementos del dominio discretizado,  $x_e$  representa la densidad,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez global,  $v_e$  es el volumen del elemento  $e$ ,  $\mathbf{V}$  es el volumen total de la estructura,  $\eta$  es la fracción del volumen total,  $\mathbf{F}$  es el vector de fuerzas nodales asociadas al cargamento externo.

El método SIMP fue empleado en la formulación del problema (1). Este método utiliza la siguiente función para cada elemento  $e$  del dominio discretizado

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 + x_e^p (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) \tag{2}$$

donde  $\mathbf{E}$  es el módulo de Young del material,  $\mathbf{E}_0$  un valor positivo muy pequeño (módulo artificial) y  $p$  es el parámetro de penalización de las densidades intermediarias. La matriz de rigidez global para el problema (1) es definida como

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{E}_e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{K}}_e \tag{3}$$

donde  $\hat{\mathbf{K}}_e$  es la matriz de rigidez del elemento  $e$ . En el problema (1), podemos eliminar la variable  $\mathbf{U}$  reemplazando por  $\mathbf{U} = \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{F}$ , debido a que la matriz  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  es definida positiva. Así, obtenemos el siguiente problema reducido

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{F} \\ &\text{s a} && \sum_{e=1}^{nel} x_e v_e - \eta \mathbf{V} \leq 0 \\ &&& 0 \leq x_e \leq 1, \quad \forall e \end{aligned} \tag{4}$$

donde solo aparecen la restricción del volumen y las restricciones de caja.

## 3. Tablero de ajedrez

Un fenómeno típico que ocurre en los métodos de OT es la distribución heterogénea del material en la topología óptima, o sea la topología contiene regiones con elementos vacíos y con elementos totalmente rellenos, dispuestos de manera alternada, semejante a un tablero de ajedrez, véase Figura 1. Según Sigmund [5], la posible causa de esa formación del tablero de ajedrez se debe al uso de elementos finitos rectangulares [1]. Para hacer frente a este fenómeno, utilizamos el siguiente filtro.

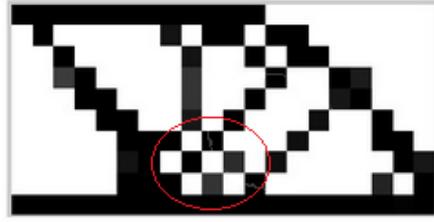


Figura 1: La región de la circunferencia de color rojo contiene el tablero de ajedrez.

### 3.1. Filtro de la media ponderada de las densidades

Este filtro se aplica a los elementos del dominio que se sustituyen por la media ponderada de los elementos contenidos en una vecindad, es decir, se sustituye  $x_e$  por

$$\hat{x}_e = \frac{1}{\sum_{i \in N_e} H_{ei}} \sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i$$

donde  $N_e$  es el conjunto de elementos  $i$  para los cuales la distancia  $\Delta(e, i)$  entre los centros de los elementos  $e$  e  $i$  es menor que el radio del filtro  $r_{\min}$ . Los pesos que se utilizan en esta media ponderada se definen como  $H_{ei} = r_{\min} - \Delta(e, i)$ .

## 4. Método de gradiente espectral proyectado no monótono

El método SPG se aplica al problema:

$$\min_{x \in \Omega} C(x)$$

donde  $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continuamente diferenciable y  $\Omega$  es un conjunto convexo.

El paso espectral es calculado resolviendo el siguiente problema de mínimos cuadrados

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2} \|B_k(\alpha) s_{k-1} - y_{k-1}\|^2, \quad (5)$$

donde  $s_{k-1} = x_k - x_{k-1}$ ,  $y_{k-1} = \nabla C(x_k) - \nabla C(x_{k-1})$  y  $B_k(\alpha) = \alpha^{-1} \mathbf{I}$  es la matriz diagonal que representa la aproximación de la matriz Hessiana de la función objetivo. De acuerdo con Birgin, Martinez y Raydan [4], la solución del problema (5) corresponde al “cociente inverso de Rayleigh”,

$$\alpha_k = \frac{s_{k-1}^T s_{k-1}}{s_{k-1}^T y_{k-1}}.$$

La búsqueda lineal monótona de Armijo, que exige un decrecimiento suficiente en cada iteración, puede no poseer un buen desempeño. Para amenizar esto, Grippo, Lampariello, y Lucidi [6] introdujeron la búsqueda lineal no monótona, que exige un decrecimiento en cada  $M$  iteraciones, lo que permite que la función objetivo aumente en algunas iteraciones. Estas iteraciones del método SPG son de la forma  $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$  donde  $d_k = P_{\Omega}(x_k - \alpha_k \nabla C(x_k)) - x_k$  y  $\lambda_k > 0$  tal que  $x_{k+1}$  verifica la condición de Armijo no monótono dada por

$$C(x_{k+1}) \leq C_{\max} + \lambda_k \gamma_{arm} \nabla C(x_k)^T d_k$$

donde  $C_{\max} = \max\{C(x_{k-j}) \mid 0 \leq j \leq \min\{k, M-1\}\}$ .

En el Algoritmo 1, describimos como calcular en cada iteración el paso espectral, considerando las salvaguardas,  $\alpha_{\min}$  y  $\alpha_{\max}$ , que evitan valores cerca de cero o valores muy grandes, respectivamente. Supongamos que sean dados  $x_0 \in \Omega$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $\alpha_0 \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ ,  $0 < \alpha_{\min} < \alpha_{\max} < +\infty$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $M \geq 1$ ,  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ .

---

**Algoritmo 1:** Gradiente Espectral Proyectado no monótono

---

**Paso 1:** Detectar si el punto actual es estacionario.

Si  $\|P(x_k - \nabla C(x_k)) - x_k\| = 0$ , parar, declarando que  $x_k$  es estacionario.

**Paso 2:** Búsqueda lineal no monótona

**Paso 2.1** Calcule  $d_k = P(x_k - \alpha_k \nabla C(x_k)) - x_k$ . Hacer  $\lambda \leftarrow 1$ .

**Paso 2.2** Hacer  $x_+ = x_k + \lambda d_k$ .

**Paso 2.3** Si

$$C(x_+) \leq \max_{0 \leq j \leq \min\{k, M-1\}} C(x_{k-j}) + \gamma \lambda \langle d_k, \nabla C(x_k) \rangle, \quad (6)$$

entonces, definimos

$$\lambda_k = \lambda, x_{k+1} = x_+, s_k = x_{k+1} - x_k, y_k = \nabla C(x_{k+1}) - \nabla C(x_k),$$

ir al **Paso 3**.

Si (6) no es verificada, defina

$$\lambda_{new} \in [\sigma_1, \sigma_2 \lambda],$$

Hacer  $\lambda \leftarrow \lambda_{new}$ , ir al **Paso 2.2**

**Paso 3.** Calcule  $b_k = \langle s_k, y_k \rangle$ .

Si  $b_k \leq 0$ , hacer  $\alpha_{k+1} \leftarrow \alpha_{\max}$ ,

caso contrario,

calcule  $a_k = \langle s_k, s_k \rangle$  y  $\alpha_{k+1} = \min\{\alpha_{\max}, \max\{\alpha_{\min}, a_k/b_k\}\}$ .

---

Para obtener  $\lambda_{new}$ , calculamos el mínimo de la función interpoladora cuadrática de una dimensión  $q(w)$  tal que  $q(0) = C(x_k)$ ,  $q(\lambda) = C(x_k + \lambda d_k)$  e  $q'(0) = \nabla C(x_k)^T d_k$ . Observe que el proceso de salvaguarda emplea el intervalo  $[\sigma_1, \sigma_2 \lambda]$ . Esto significa que, cuando  $\lambda_{new}$  no pertenece a ese intervalo, se juzga que la interpolación no es confiable y el proceso más conservador de bisección es utilizado. En ese caso, hacemos  $\lambda \leftarrow \lambda/2$ .

## 5. Resultados numéricos

En esta sesión mostramos los resultados de las implementaciones del método de las asíntotas móviles y el método de gradiente espectral proyectado no monótono que fueron aplicados a los problemas clásicos de optimización topológica como la viga en voladizo, la viga *Messerschmitt-Bölkow-Blohm* (MBB) y la estructura de puente. Cada uno de estos problemas de OT fueron modelados con el método SIMP. En todos los problemas, los dominios fueron discretizados en elementos finitos rectangulares de 4 nodos, con dos grados de libertad.

La metodología aquí propuesta y todas las rutinas necesarias para la aplicación del método de los elementos finitos fueron implementados en Matlab. Todos los resultados fueron obtenidos en un ordenador Intel CORE 2 2.40 GHz, con 4 GB de memoria RAM.

De la Figura 2, *la viga en voladizo* tiene un apoyo (engaste), impidiendo los desplazamientos nodales tanto en la horizontal como en la vertical, así como un fuerza  $F = 1N$  aplicada en el punto inferior de la arista lateral derecha. La longitud y ancho del dominio son, respectivamente, 300 cm y 150 cm. El dominio es discretizado en  $300 \times 150 = 45000$  elementos finitos.

*La viga MBB* es apoyada en los cantos inferiores, de tal forma que apenas los desplazamientos horizontales son permitidos en el canto derecho, y los desplazamientos horizontales y verticales del canto izquierdo son impedidos. Una carga externa  $F = 1N$  es aplicado para abajo en el centro de borde superior. El largo y ancho del dominio son, respectivamente, 840 cm y 140 cm.

Debido a la simetría, consideramos apenas la mitad derecha de la estructura, que es discretizada en  $420 \times 140 = 58800$  elementos finitos.

La estructura del puente es apoyada en los cantos inferiores, de tal forma que apenas los desplazamientos horizontales son permitidos en el canto derecho, y los desplazamientos horizontales y verticales del canto izquierdo son impedidos. La estructura tiene una fuerza de magnitud  $2F$  aplicada para abajo en el centro del borde inferior y dos fuerzas de magnitud  $F$  aplicadas en el borde inferior, con distribución simétrica. En nuestros experimentos, usamos  $F = 1N$ . El largo y ancho del dominio son, respectivamente, 480 cm y 240 cm. Debido a la simetría, consideramos apenas la mitad de la estructura, que es discretizada en  $240 \times 240 = 57600$  elementos finitos.

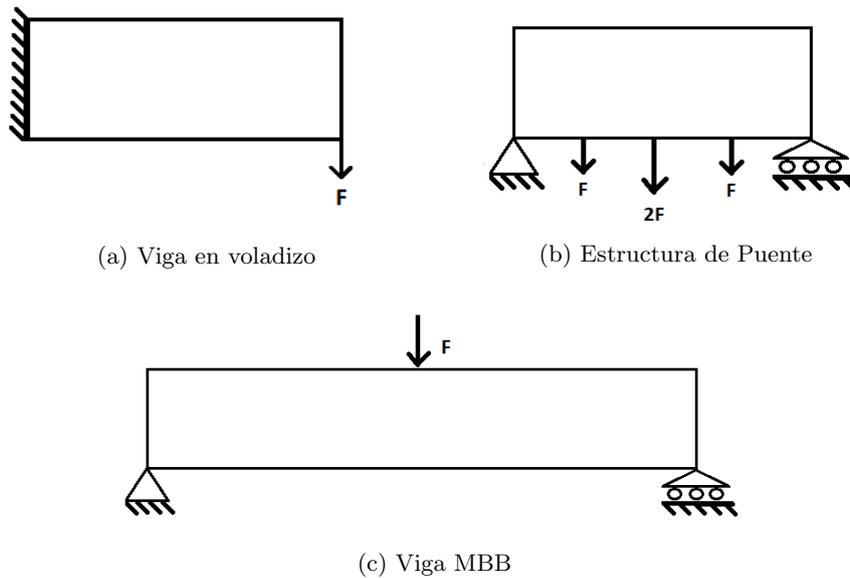


Figura 2: Problemas de optimización topológica

Los radios del filtro para la viga en voladizo, viga MBB y estructura de puente son 12,6 , 10,5 y 9,9, veces la longitud de la arista de los elementos, respectivamente. Además, definimos un punto de inicio viable como  $x_e = 0,4, \forall e$ . Tener en cuenta que el filtro de media ponderada  $\tilde{x}$  se aplica sólo en la función objetivo y en la restricción del volumen.

En todos los problemas, supondremos que la estructura tiene 1 cm de espesura, que el coeficiente de Poisson es igual a 0,3 y que el módulo de Young del material es  $E = 1 N/cm^2$ , representado en la topología óptima con el color negro, el módulo de Young artificial  $E_0 = 10^{-3}$  es representado en la topología óptima con el color blanco, las estructuras deben contener, como máximo, el 40 % del volumen total del dominio, el volumen fraccionario del material que la compone es  $\eta = 0,4$  y el número máximo de iteraciones es 100.

Los valores de los parámetros del algoritmo de SPG son  $\alpha_{\min} = 10^{-30}$ ,  $\alpha_{\max} = 10^{30}$ ,  $\sigma_1 = 0,1$ ,  $\sigma_2 = 0,9$ ,  $\gamma_{arm} = 10^{-4}$  y  $M = 10$ . La Tabla 1 muestra los resultados de las implementaciones de los métodos MMA y SPG. Las estructuras obtenidas se presentan en la Figura 3.

El criterio de parada de los algoritmos es basado en el decrecimiento relativo de la función objetivo  $\frac{|C(x^{(k+1)}) - C(x^k)|}{|C(x^{(k+1)})|} \leq 5 \times 10^{-5}$  por tres veces seguidas.

Viga en voladizo: Observamos en la Tabla 1 que el método SPG obtuvo el menor valor de la función objetivo y el menor tiempo de ejecución. La topología óptima de la viga obtenida cuando aplicamos el método SPG, posee menos barras. La eliminación de algunas barras, hace que la estructura sea más rígida, además de facilitar su producción.

Viga MBB: Observando la Tabla 1, constatamos que el método MMA obtuvo el menor valor

Problemas	Método	Iter.	Val. opt.	Tiempo (s)
Viga en Voladizo	SPG	76	<b>111,65</b>	<b>183,26</b>
	MMA	100	112,15	531,63
Viga MBB	SPG	88	277,17	<b>183,26</b>
	MMA	100	<b>276,82</b>	736,44
Estructura de Puente	SPG	31	<b>302,49</b>	<b>93,28</b>
	MMA	100	304,44	687,46

Tabla 1: Resultados de las estructuras óptimas usando los métodos de optimización

de la función objetivo. Sin embargo, el menor tiempo de ejecución fue alcanzado por el método SPG. Las topologías óptimas obtenidas por los métodos fueron bastante semejantes.

Estructura de Puente: En la Tabla 1, el menor valor de la función objetivo de la estructura de puente es obtenida por el método SPG. Además, el método SPG consumió menos tiempo que el método MMA. Notamos también que los formatos de la topologías óptimas encontradas por los métodos de optimización fueron semejantes.

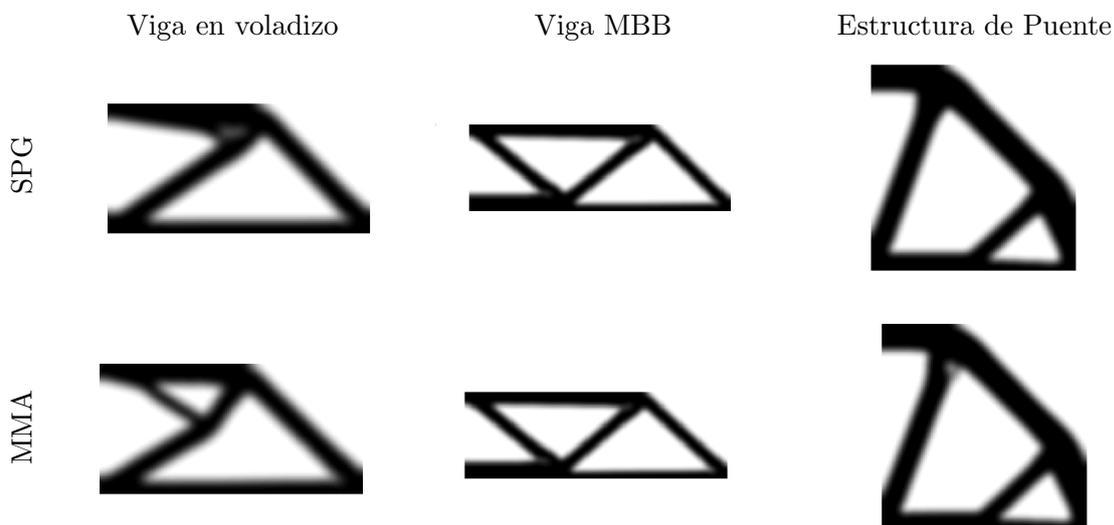


Figura 3: Estructuras óptimas obtenidas por los métodos de optimización

## 6. Conclusión

En este trabajo, implementamos el método SIMP en conjunto con el método SPG para resolver el problema de la minimización de la flexibilidad de una estructura estática. En el análisis de los resultados, se verificó que el método SPG tuvo un desempeño superior que el método MMA, obteniendo estructuras similares en menor tiempo.

## Referencias bibliográficas

- [1] Assan A. E. (2003). *Métodos dos elementos finitos: Primeiros passos. Editora Unicamp, são paulo, 2 edition.*
- [2] Barzilai J. and Borwein J. M. (1988). *Two point step gradient method. IMA J. Number. Anal., 8, 141-148*

- [3] Bendøe M. P. (1989). *Optimal shape design as a material distribution problem*. *Struct. Optim.*, 1, 193-202.
- [4] Birgin E. G., Martinez J. M. and Raydan M. (2000). *Nonmonotone spectral projected gradient methods on convex sets*, *SIAM J. optim.*, v. 10, p.1196-1211.
- [5] Diaz A. R. (1995). Sigmund O., *Checkerboard pattern in layout optimization*, *Struct. Optim.*, 10, 40-45.
- [6] Grippo L., Lampariello F. and Lucidi S. (1986). *A monotone line search technique for newton's method*. *SIAM J. on Number. Anal.*, 23, 707-716.
- [7] Rietz A. (2001). *Sufficiency of a finite exponent in simp (power law) Methods*. *Struct. Multidisc. Optim.*, v. 21, p. 159-163.
- [8] Svanberg K. (1987). *The method of moving asymptotes-a new method for structural optimization*. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24, 359-373.