PESQUIMAT 25(1): 36–49 (2022) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v25i1.22462 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Existencia de un atractor exponencial para un modelo de $p-$Kirchhoff con memoria infinita

***Pablo Fernando Noel Figueroa*[1] *y Yony Raúl Santaria Leuyacc*[2]**

Resumen: El presente trabajo tiene por objetivo principal estudiar la dinámica a largo plazo de un modelo de $p-$Kirchhoff con memoria infinita expuesto a fuerzas estructurales sobre un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. En particular se muestra la existencia de un atractor global con tasa de atracción exponencial y dimensión fractal finita, es decir, se prueba la existencia de un atractor exponencial.
Palabras clave: Ecuación de $p-$Kirchhoff, memoria infinita, atractores globales, atractores exponenciales.

Existence of an exponential attractor for a $p-$Kirchhoff model with infinite memory

Abstract: The main objective of this work is to study the long-term dynamics of a $p-$Kirchhoff model with infinite memory exposed to structural forces on a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In particular, the existence of a global attractor with exponential attraction rate and finite fractal dimension is shown, that is, the existence of an exponential attractor is proved.
Keywords: $p-$Kirchhoff equation, infinite memory, global attractors, exponential attractors.

Recibido: 05/03/2022. *Aceptado:* 16/04/2022. *Publicado online:* 30/06/2022.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: pablo.noel@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: ysantarial@unmsm.edu.pe

1. Introducción

En los últimos años diversos estudios sobre las ecuaciones de ondas (de segundo orden) y ecuaciones de placa (de cuarto orden) han sido desarrolladas por investigadores dentro del contexto del estudio de la dinámica asintótica a largo plazo. Más específicamente, ecuaciones de placas con perturbación no lineal de tipo $\phi-$Laplaciano

$$u_{tt} + \Delta_x^2 u - \mathrm{div}_x(\phi(\nabla_x u)) = \mathcal{F}(x, u, u_t), \tag{1}$$

donde $\phi(z) \approx |z|^{(p-2)}z,\ p \geq 2,$ y $\mathcal{F}(x, u, u_t)$ representa una fuerza externa y/o una disipación lineal(es) o no lineal(es), ha llamado la atención de varios autores sobre la existencia y comportamiento asintótico de sus soluciones. En este caso, podemos decir que el operador $\mathrm{div}_x(\phi(\nabla_x u))$ surge como una perturbación no lineal de menor orden del operador biarmónico $\Delta_x^2 = \Delta_x(\Delta_x)$ en la ecuación (1).

En el caso de ecuaciones de onda regida por el operador $\phi-$Laplaciano con disipación viscosa $-\Delta_x u_t$, hay algunos trabajos pioneros como los desarrollados por Greenberg [17, 18] en dimensión 1. En dimensiones mayores, podemos citar los trabajos de Tsutsumi [42] y Clements [8]. Después de eso, surgieron varios otros autores que abordaron problemas relacionados [2, 3, 4, 10, 11, 12, 30, 31, 33, 36, 39].

La ecuación (1) es un prototipo de diversos modelos importantes que se aplican en el mundo real con respecto a las perturbaciones de la ecuación de placa. Para ejemplificar esto, veamos los siguientes casos:

En el caso bidimensional, la siguiente ecuación de placa,

$$u_{tt} + ku_t + \Delta^2 u = \mathrm{div}\{|\nabla u|^2 \nabla u\} + \sigma\Delta\{f_1(u)\} - f_2(u),$$

coincide con el modelo de Kirchhoff$-$Boussinesq definida sobre un domínio acotado de $\mathbb{R}^2$. Por otro lado, considerando tres condiciones de frontera, libre, fija y soportada, Chueshov [5, 7] mostró la existencia de un atractor global, considerando apenas una disipación débil de tipo friccional ku_t. Es importante resaltar, que el modelo anterior aparece naturalmente como un caso límite de las ecuaciones de Mindlin-Timoshenko que describen la dinámica de una placa sometida a efectos de cizallamiento transversal (ver Lagnese [25, 26] para mayores detalles).

En el caso $N-$dimensional, Yang [44, 48] trató una clase de Modelos de Kirchhoff por medio de la ecuación

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \mathrm{div}\{|\nabla u|^{m-1}\nabla u\} - \Delta u = h(x, u, u_t),$$

definida sobre un domínio acotado de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 1$ natural y $m \geq 1$ delimitado por una constante que depende de N en dimensiones mayores, considerando condiciones de frontera fijas o soportadas. Los principales resultados presentados por el autor, fueron mostrar la existencia global y el comportamiento asintótico de soluciones débiles y más regulares (existencia de un atractor global), donde se consideró una disipación fuerte de tipo viscosa Δu_t. Recientemente, Yang [45, 46] estudio cuestiones relativas a dimensionalidad de tales atractores, como por ejemplo, las dimensiones de Hausdorff y fractal.

Para completar el razonamiento, recordemos que un modelo correspondiente al flujo de microestructuras elastoplásticas de la forma

$$u_{tt} + u_{xxxx} + a(|u_x|^2)_x = 0,$$

fue introducido por An [1, 4] en el caso unidimensional, donde el coeficiente de elasticidad a es positivo. Entonces, considerando el término $a(|u_x|^2)_x$ como un operador de tipo $p-$Laplaciano, notamos que este último modelo difiere de los dos anteriores por el signo de la perturbación proveniente del operador $p-$Laplaciano.

De los trabajos mencionados anteriormente podemos percibir que en dimensiones mayores ($N \geq 3$) la disipación fuerte, $-\Delta u_t$, juega un importante papel en el modelo de placas con perturbación de menor orden de tipo $p-$Laplaciano

$$u_{tt} + \alpha\Delta^2 u - \Delta_p u = \mathcal{F}(x, u, u_t), \tag{2}$$

donde

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad p \geq 2,$$

y $\alpha > 0$ es una constante. De hecho, para $\alpha = 1$ la existencia global y unicidad de soluciones pueden ser verificadas adicionando una disipación fuerte $-\Delta u_t$, como puede observarse en [44, 48]. Aún, si consideramos apenas una disipación débil u_t, entonces parece ser difícil de obtener unicidad y la continuidad de soluciones globales en el caso $N-$dimensional, para $N \geq 3$. Por otro lado, para dimensiones menores, $N = 1$ o $N = 2$, la buena colocación del problema (2) implementando apenas una disipación débil ya es bien conocido (véase [5, 43]).

Motivados por las obras anteriormente citadas, el presente trabajo busca brindar resultados relacionados con la existencia de regiones compactas de estabilidad, a partir del estudio de un atractor global donde la tasa de atracción es exponencial, considerando un semigrupo de soluciones para la ecuación (2) bajo la influencia de un término de memoria.

La relevancia del presente trabajo se debe al hecho de que, además de tomar un cierto cuidado con las herramientas al trabajar con el problema viscoelástico para el caso $N-$dimensional, debemos evaluar la interacción del término de memoria con los operadores $p-$Laplaciano y biarmónico. De un modo más conciso: las contribuciones presentes en este artículo se puede resumir de la siguiente manera:

1. Se estudiará el sistema:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} u_{tt} + \alpha(0)\Delta^2 u - \Delta_p u + \displaystyle\int_0^\infty \alpha'(s)\Delta^2 u(t-s)ds - \Delta u_t + f(u) = h \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = \Delta u = 0 \text{ sobre } \Gamma \times \mathbb{R}, \\ u(x,\tau) = u_0(x,\tau) \text{ y } u_t(x,\tau) = \partial_t u_0(x,\tau), \quad (x,\tau) \in \Omega \times (-\infty, 0], \end{cases}$$

   donde Ω es un domínio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave $\Gamma = \partial\Omega$, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ y Δ_p representa el operador $p-$Laplaciano, $f(u)$ es una fuerza estructural no lineal Lipschitz local y $h := h(x)$ representa una fuerza externa. Además, se considerará: $\alpha(0) > 0$ y $\alpha'(s) \leq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}^+$. Aquí la función $u_0 : \Omega \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, es caracterizada como la *historia* de u, siendo conocida para valores negativos con respecto a la variable t correspondiente al tiempo. Este sistema es un tipo particular de modelo (2) cuando se considera efectos de memoria. En particular este modelo fue abordado por Jorge Silva y Ma [21], donde los autores garantizan la buena colocación del modelo y la existencia de un atractor global.

2. A partir del sistema (I), se rescatará los resultados más importantes presentes en [21] con la finalidad de conseguir buenas estimativas para mostrar la existencia de un atractor exponencial.

3. Dada la definición de un atractor exponencial para el semigrupo $(\mathcal{H}, S(t))$, es decir, un conjunto $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ compacto, positivamente invariante, con dimensión fractal finita y que atrae exponencialmente los conjunto acotados de $\mathcal{H}$. En este artículo, se mostrará la existencia de un atractor exponencial $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ en el sentido de Chueshov & Lasiescka [6], al considerar la dimensión fractal de $\mathcal{M}$ sobre un espacio $\widetilde{\mathcal{H}}$ conteniendo a $\mathcal{H}$.

2. Hipótesis y entorno funcional

Para abordar el problema (I) vamos a usar la idea introducida por [9], acoplando una nueva variable al problema, conocida como *historia de desplazamiento relativo* (ver también [13, 14, 15]). Más precisamente, definamos

$$\eta = \eta^t(x,s) = u(x,t) - u(x,t-s), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad t \leq 0. \tag{3}$$

Derivando (3) con respecto a t y s, obtenemos

$$\eta_t^t(x,s) = -\eta_s^t(x,s) + u_t(x,t), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad t \leq 0.$$

Además, observe que para $t = 0$, obtenemos la condición inicial

$$\eta^0(x,s) = u_0(x,0) - u_0(x,-s), \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Considerando, por simplicidad, $\mu(s) = -\alpha'(s)$ y $\alpha(\infty) = 1$, y usando (3) el problema original (I) puede ser convertido en el siguiente sistema:

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + \int_0^\infty \mu(s)\Delta^2\eta^t(s)ds - \Delta u_t + f(u) = h \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{4}$$

$$\eta_t = -\eta_s + u_t \qquad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{5}$$

con condiciones de frontera

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \quad \eta = \Delta\eta = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{6}$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \eta^0(x,s) = \eta_0(x,s), \tag{7}$$

donde

$$\begin{cases} u_0(x) = u_0(x,0), \quad & x \in \Omega \\ u_1(x) = \partial_t u_0(x,0)|_{t=0}, \quad & x \in \Omega, \\ \eta_0(x,s) = u_0(x,0) - u_0(x,-s), \quad & (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Observación 2.1. *Después de proporcionar las hipótesis adecuadas sobre el núcleo de la memoria μ y definir los espacios apropiados para la historia del desplazamiento relativo η, se deduce que el problema* (4)−(7) *es equivalente al problema original* (I)*, es decir, de las soluciones de* (4)−(7) *obtenemos soluciones para* (I) *y recíprocamente. Esto se puede hacer de manera análoga a lo que se muestra en* [16]*. Por lo tanto, por conveniencia en nuestras consideraciones futuras, estudiaremos el problema* (4)−(7) *en detalle.*

2.1. Hipótesis y notaciones iniciales

Inicialmente, proporcionaremos las hipótesis sobre la constante p, sobre la función f y también sobre el núcleo de memoria μ, presente en el problema (4)−(7).
Para $N \in \mathbb{N}$ asumimos que:

$$2 \leq p \leq \frac{2N-2}{N-2} \quad \text{si} \quad N \geq 3 \quad \text{y} \quad p \geq 2 \quad \text{si} \quad N = 1, 2. \tag{8}$$

Con relación a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, asumiremos que:

$$f(0) = 0, \quad |f(u) - f(v)| \leq k_0(1 + |u|^\rho + |v|^\rho)|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

donde $k_0 > 0$ es una constante y

$$0 < \rho < \frac{4}{N-4} \quad \text{si} \quad N \geq 5 \quad \text{y} \quad \rho > 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq N \leq 4. \tag{10}$$

Además, se considera

$$-k_1 \leq \widehat{f}(u) \leq f(u)u, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

donde $\widehat{f}(z) = \int_0^z f(s)ds$ y $k_1 \geq 0$.

Observación 2.2. *De la condición* (8) *y las inmersiones de Sobolev, se cumple la siguiente cadena de inmersiones:*

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2(p-1)}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Además, la condición (10) *garantiza que*

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega).$$

Más aún, las condiciones (9) *y* (11)*, incluyen funciones de la forma*

$$f(u) \approx |u|^\rho u - |u|^\alpha u, \quad 0 < \alpha < \rho.$$

Con respecto al término de memoria, asumiremos que:

$$\mu \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^\infty \mu(s)ds = \mu_0 > 0, \tag{12}$$

$$\mu(s) \geq 0, \quad \mu'(s) \leq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+, \tag{13}$$

y que existe una constante $k_2 > 0$ tal que

$$\mu'(s) + k_2\mu(s) \leq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+. \tag{14}$$

Finalmente, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ representa a una fuerza externa independiente del tiempo y asumiremos que

$$h \in L^2(\Omega). \tag{15}$$

A continuación fijaremos notaciones que serán usadas. Consideremos, en primer lugar, los espacios

$$V_0 = L^2(\Omega), \quad V_1 = H_0^1(\Omega), \quad V_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

y

$$V_3 = \{u \in H^3(\Omega) | u = \Delta u = 0 \text{ sobre } \Gamma\},$$

equipados con los respectivos productos internos y normas

$$\begin{aligned}(u, v)_{V_1} &= (\nabla u, \nabla v) \text{ y } \|u\|_{V_1} = \|\nabla u\|_2,\\ (u, v)_{V_2} &= (\Delta u, \Delta v) \text{ y } \|u\|_{V_2} = \|\Delta u\|_2,\\ (u, v)_{V_2} &= (\nabla\Delta u, \nabla\Delta v) \text{ y } \|u\|_{V_3} = \|\nabla\Delta u\|_2.\end{aligned}$$

De manera estandar denotamos por $(\cdot, \cdot)$ al producto interno en $L^2(\Omega)$ y $\|\cdot\|_p$ la norma en $L^p(\Omega)$. Cuando no haya posibilidad de confusión, usaremos la misma notación en vez de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para mencionar la dualidad entre espacios y sus duales. A fin de abordar la historia de desplazamiento relativo η como una nueva variable, consideremos los siguientes espacios con peso L^2_μ,

$$\mathcal{M}_i := L^2_\mu(\mathbb{R}^+; V_i) = \left\{\xi : \mathbb{R}^+ \to V_i \,\middle|\, \int_0^\infty \mu(s)\|\xi(s)\|^2_{V_i} ds < \infty\right\}, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

que no son nulos por las hipótesis $(12)-(13)$. Además, estos espacios son de Hilbert cuando están equipados con el producto interno y norma

$$(\xi, \zeta)_{\mu,i} = \int_0^\infty \mu(s)(\xi(s), \zeta(s))_{V_i} dr, \quad \|\xi\|^2_{\mu,i} = \int_0^\infty \mu(s)\|\xi(s)\|^2_{V_i} ds, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Así, introducimos los espacios de fase

$$\mathcal{H} = V_2 \times V_0 \times \mathcal{M}_2 \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_1 = V_3 \times V_1 \times \mathcal{M}_3,$$

equipados con la norma

$$\|(u, v, \xi)\|^2_{\mathcal{H}} = \|\Delta u\|^2_2 + \|v\|^2_2 + \|\xi\|^2_{\mu,2},$$

y

$$\|(u, v, \xi)\|^2_{\mathcal{H}_1} = \|\nabla\Delta u\|^2_2 + \|\nabla v\|^2_2 + \|\xi\|^2_{\mu,3},$$

respectivamente.

Finalmente, la energía del sistema $(4)-(7)$ está dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2_2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2_2 + \frac{1}{p}\|\nabla u(t)\|^p_p + \frac{1}{2}\|\eta^t\|^2_{\mu,2} + \int_\Omega \left[\widehat{f}(u(t)) - hu(t)\right] dx.$$

3. Resultados importantes

Esta sección esta dedicada ha mencionar los resultados más relevantes para el sistema $(4)-(7)$ que se encuentran en [21]. Estos resultados serán de suma importancia en la prueba del teorema principal en este trabajo.

3.1. Buena colocación

Iniciamos con el concepto de solución débil para el problema $(4)-(7)$.

Definición 3.1. Dados $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$, diremos que una función $z = (u, u_t, \eta) \in C([0,T], \mathcal{H})$ es una *solución débil* para el problema $(4)-(7)$ si $z(0) = (u_0, u_1, \eta_0)$ y

$$\frac{d}{dt}(u_t, \omega) + (\Delta u, \Delta \omega) + \left\langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \omega \right\rangle + \int_0^\infty \mu(s)(\Delta \eta(s), \Delta \omega) ds + (\nabla u_t, \nabla \omega) + (f(u), \omega) = (h, \omega), \quad (16)$$

$$(\partial_t \eta + \partial_s \eta, \xi)_{\mu,2} = (\mu_t, \xi)_{\mu,2}, \quad (17)$$

casi siempre en $[0, T]$, para todo par $(\omega, \xi) \in V_2 \times \mathcal{M}_2$.

Para mostrar que el problema $(4)-(7)$ está bien colocado, tenemos el siguiente resultado (véase [21], Teorema 2.1).

Teorema 3.1. Sea $h \in L^2(\Omega)$, sobre las condiciones $(8)-(14)$. Entonces se cumple que:

1. Si $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}$, entonces el problema $(4)-(7)$ posee una solución débil

   $$(u, u_t, \eta) \in C([0, T]; \mathcal{H}), \quad \forall t > 0,$$

   satisfaciendo

   $$u \in L^\infty(0, T; V_2), \quad u_t \in L^\infty(0, T; V_0) \cap L^2(0, T; V_1), \quad \eta \in L^\infty(0, T; \mathcal{M}_2). \quad (18)$$

2. Si $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}_1$, entonces la solución débil del problema $(4)-(7)$ posee mayor regularidad

   $$u \in L^\infty(0, T; V_3), \quad u_t \in L^\infty(0, T; V_1) \cap L^2(0, T; V_2), \quad \eta \in L^\infty(0, T; \mathcal{M}_3). \quad (19)$$

3. En ambos casos, la solución (u, u_t, η) depende contínuamente de los datos inciales en $\mathcal{H}$. Más precisamente, sea $z_i = (u^i, u_t^i, \eta^i)$ dos soluciones del problema $(4)-(7)$ a los datos iniciales $z_{i,0} = (u_0^i, u_1^i \eta_0^i)$, para $i = 1, 2$. Entonces, vale la siguiente estimativa:

   $$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq e^{ct} \|z_{1,0} - z_{2,0}\|_{\mathcal{H}}, \quad t \in [0, T], \quad (20)$$

   para alguna constante $c > 0$. En particular, el problema $(4)-(7)$ posee una única solución débil

4. Si $\mathcal{B}$ es acotado en $\mathcal{H}$, entonces la solución $z(t) = (u(t), u_t(t), \eta^t)$ con datos iniciales en $\mathcal{B}$ satisface la estimativa
$$\|z(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\mathcal{B}}, \ \forall \ t \geq 0, \tag{21}$$
donde $C_{\mathcal{B}} > 0$ es una constante dependiente de $\mathcal{B}$, más no de t.

Observación 3.1. *El operador solución $S(t)z_0 = (u(t), u_t(t), \eta^t)$ es un semigrupo fuertemente contínuo en el espacio $\mathcal{H} = V_2 \times V_1 \times \mathcal{M}_1$. Es decir, el problema* $(4) - (7)$ *corresponde a un sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$.*

3.2. Existencia del conjunto absorvente

A continuación enunciaremos un resultado que muestra que el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es disipativo, esto es, el C_0-semigrupo $S(t)$ posee un conjunto absorvente acotado en $\mathcal{H}$.

Definición 3.2. Sea $S(t) : X \to X, \ t \geq 0$, un C_0-semigrupo. Un conjunto $\mathcal{B} \subset X$ se dice *conjunto absorvente* para $S(t)$ si para cualquier subconjunto acotado $B \subset X$, existe $T_0 = T_0(B) \geq 0$ tal que
$$S(t)B \subset \mathcal{B}, \ \forall \ t \geq T_0.$$
Cuando $S(t)$ posee un conjunto absorvente acotado, diremos que también el par $(X, S(t))$ constituye un *sistema dinámico disipativo.*

La existencia de un conjunto absorvente acotado para $S(t)$ es asegurado por el resultado a continuación, el cual se muestra en [21].

Proposición 3.1. *Sobre las hipótesis del Teorema 3.1, el semigrupo $S(t)$ asociado al problema (4)−(7) posee un conjunto absorvente acotado $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$. En otras palabras, el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ es disipativo.*

3.3. Un resultado de estabilización

En esta sección y en las siguientes, denotaremos por $\mathcal{B}$ al conjunto absorvente acotado obtenido en la Sección 3.2 correspondiente al C_0-semigrupo $S(t)$. En lo que sigue, enunciaremos una desigualdad, la cual llamaremos *desigualdad de estabilización*, que será importante para determinar la existencia de un atractor global para el sistema dinámico $S(t)$ asociado al problema $(4)-(7)$. Más aún, esta desigualdad de estabilización también será una herramienta clave para mostrar la existencia de un atractor exponencial. Más precisamente, se tiene la siguiente desigualdad mostrada en ([21], Lema 4.2)

Proposición 3.2 (Desigualdad de estabilización)**.** *Sobre las hipótesis del Teorema 3.1, sean $z_i = (u^i, u^i_1, \eta^i)$ dos soluciones del problema (4)−(7) tales que $z_i(0) = (u^i_0, u^i_1, \eta^i_0) \in \mathcal{B}$, para $i = 1, 2$. Entonces, vale la siguiente estimativa:*
$$\begin{aligned}\|z_1(t) - z_2(t)\|^2_{\mathcal{H}} &\leq 3e^{-\nu t}\|z_1(0) - z_2(0)\|^2_{\mathcal{H}} \\ &\quad + K_{\mathcal{B}} \int_0^t e^{-\nu(t-\tau)} \big(\|\nabla(u^1(\tau) - u^2(\tau))\|^2_{2(p-1)} + \|u^1(\tau) - u^2(\tau)\|^2_{2(\rho+1)}\big) d\tau,\end{aligned} \tag{22}$$

para todo $t \geq 0$, donde $\nu > 0$ es una constante pequeña y $K_{\mathcal{B}} > 0$ es una constante dependiendo de $\mathcal{B}$.

3.4. Atractor Global

El próximo resultado fue el resultado principal de [21], el cual fue mostrado en el Teorema 2.2. Los autores mostraron la existencia de un atractor global con dimensión fractal finita vía una desigualdad de cuasi-estabilidad siguiendo los resultados de Chueshov & Lasiecka [6]. Es así que se tiene el siguiente resultado para el sistema $(4)-(7)$.

Teorema 3.2. *Sobre las hipótesis del Teorema 3.1, el semigrupo $S(t)$ asociado al problema (4)−(7) posee un atractor global $\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}$ con dimensión fractal finita.*

4. Atractor exponencial

Esta sección está dedicada a demostrar una generalización con relación al atractor $\mathcal{A}$ que se obtiene en el Teorema 3.2 para el sistema $(4)-(7)$. Note que en este mismo contexto se quiere profundizar en el estudio de la tasa de atracción a partir de la prueba de un atractor exponencial para el sistema. Comenzaremos definiendo la idea de atractor exponencial.

Definición 4.1. Diremos que un conjunto compacto $\mathcal{A}_{exp} \subset \mathcal{H}$ es un *atractor exponencial* de un sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ si $\mathcal{A}_{exp}$ es positivamente invariante, posee dimensión fractal finita, y para todo conjunto acotado $B \subset \mathcal{H}$, existen constantes positivas t_B, C_B, σ_B tales que

$$d_{\mathcal{H}}\{S(t)B, \mathcal{A}_{exp}\} \equiv \sup_{z\in B} \operatorname{dist}_{\mathcal{H}}(S(t)z, \mathcal{A}_{exp}) \leq C_B e^{-\sigma_B(t-t_B)}, \quad t \geq t_B.$$

4.1. Existencia de atractores exponenciales

A continuación enunciamos el teorema principal del presente trabajo.

Teorema 4.1. *Sea $h \in L^2(\Omega)$. Supongamos que las hipótesis $(8)-(14)$ valen con las condiciones de sub-criticidad*

$$p < \frac{2N-2}{N-2} \quad \textit{si} \quad N \geq 3 \quad \textit{y} \quad \rho < \frac{4}{N-4} \quad \textit{si} \quad N \geq 5.$$

Entonces, el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ corresponde al problema $(4)-(7)$ posee un atractor exponencial generalizado $\mathcal{A}_{exp} \subset \mathcal{H}$ con dimensión fractal finita en el espacio extendido

$$\mathcal{H}_{-1} = V_0 \times V_2' \times \mathcal{M}_0.$$

Además, por interpolación, el espacio $\mathcal{H}_{-1}$ se puede reducir a

$$\mathcal{H}_{-\theta} = V_{2(1-\theta)} \times V_{2\theta}' \times \mathcal{M}_{2(1-\theta)},$$

donde $0 < \theta \leq 1$.

La prueba del Teorema 4.1 es basada en el contexto de cuasi-estabilidad. Silva & Ma [21] mostraron la propiedad de cuasi-estabilidad de $(\mathcal{H}, S(t))$ para subconjuntos acotados de $\mathcal{H}$, que es basada en la desigualdad de estabilización.

Observación 4.1. *Silva & Ma [21] mostraron que el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ correspondiente al problema (4)−(7) es disipativo. Así, sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ para $(\mathcal{H}, S(t))$. Entonces, existe $T_{\mathcal{B}}$ tal que*

$$S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}, \quad \forall\ t \geq T_{\mathcal{B}}.$$

Con esto concluimos que el conjunto

$$\mathcal{B}_0 := \bigcup_{t \geq T_B} S(t)\mathcal{B}$$

es absorvente, acotado, positivamente invariante y $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$. Luego, por [21] Lema 4.4, *$(\mathcal{H}, S(t))$ es cuasi-estable en $\mathcal{B}_0$.*

Demostración del Teorema 4.1. Vamos a mostrar que $t \mapsto S(t)z$ es Hölder contínua en $\mathcal{H}_{-1}$ para todo $z \in \mathcal{B}_0$. Sea $z = (u_0, u_1, \eta^0) \in \mathcal{B}_0$. De (18) y de las ecuaciones (4)−(5) se obtiene

$$(u_t, u_{tt}, \eta_t) \in L^\infty(0, T; V_0) \times L^2(0, T; V_2') \times L^\infty(0, T; \mathcal{M}_0), \quad \forall\ T > 0.$$

Luego,

$$\left\| \frac{d}{dt} z(t) \right\|_{\mathcal{H}_{-1}} \leq C_{\mathcal{B}_0, T},$$

donde $z(t) = (u(t), u_t(t), \eta^t)$. Escribiendo $(u(t), u_t(t), \eta^t) = S(t)z := z(t)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \|S(t_2)z - S(t_1)z\|_{\mathcal{H}_{-1}} &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{ds} z(s) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d}{ds} z(s) \right\|_{\mathcal{H}_{-1}} ds \\ &\leq \left(\int_0^T \|(u_t(s), u_{tt}(s), \eta_t^s)\|^2_{\mathcal{H}_{-1}} ds \right)^{1/2} |t_2 - t_1|^{1/2} \\ &\leq\ C_{\mathcal{B}_0, T} |t_2 - t_1|^{1/2}, \end{aligned} \tag{23}$$

para todo $t_1, t_2 \in [0, T]$. De Chueshov & Lasiecka [6] Teorema 7.9.9, se sigue que el sistema dinámico $(\mathcal{H}, S(t))$ posee un atractor exponencial fractal $\mathcal{A}_{\text{exp}}$ con dimensión fractal finita en $\mathcal{H}_{-1}$.

Vamos ahora a construir el conjunto $\mathcal{H}_{-\theta} := V_{2(1-\theta)} \times V_{2\theta}' \times \mathcal{M}_{2(1-\theta)}$. Sabemos que

$$V_2 \hookrightarrow\hookrightarrow V_0, \qquad V_0' \hookrightarrow\hookrightarrow V_2' \quad \text{y} \quad \mathcal{M}_2 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{M}_0$$

De la teoría de interpolación, podemos construir $V_{2(1-\theta)}, V_{2\theta}'$ y $\mathcal{M}_{2(1-\theta)}$ con $\theta \in (0, 1]$ tales que

$$\begin{aligned} &\|u\|_{V_{2(1-\theta)}} \leq c_1(\theta) \|u\|_{V_2}^{1-\theta} \|u\|_{V_0}^{\theta}, \quad u \in V_2 \\ &\|v\|_{V_{2\theta}'} \leq C_2(\theta) \|v\|_{V_0'}^{1-\theta} \|v\|_{V_2'}^{\theta}, \qquad v \in V_0' \\ &\|\xi\|_{\mathcal{M}_{2(1-\theta)}} \leq c_3(\theta) \|\xi\|_{\mathcal{M}_2}^{1-\theta} \|\xi\|_{\mathcal{M}_0}^{\theta},\ \xi \in \mathcal{M}_2 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{V_{2(1-\theta)}} + \|v\|_{V'_{2\theta}} + \|\xi\|^2_{\mathcal{M}_{2(1-\theta)}} \leq\ & c_1(\theta)^2(\|u\|^2_{V_2})^{1-\theta}(\|u\|^2_{V_0})^{\theta} \\ & + c_2(\theta)^2(\|u\|^2_{V'_0})^{1-\theta}(\|v\|^2_{V_2})^{\theta} \\ & + c_3(\theta)^2(\|\xi\|^2_{\mathcal{M}_2})^{1-\theta}(\|\xi\|^2_{\mathcal{M}_0})^{\theta}\end{aligned}$$

Entonces, para $C(\theta)^2 = \text{máx}\{c_1(\theta)^2, c_2(\theta)^2, c_3(\theta)^2\}$, tenemos

$$\begin{aligned}&\|u\|^2_{V_{2(1-\theta)}} + \|v\|^2_{V'_{2\theta}} + \|\xi\|^2_{\mathcal{M}_{2(1-\theta)}} \\ &\quad \leq C(\theta)^2\big(\|u\|^2_{V_2} + \|v\|^2_{V'_0} + \|\xi\|^2_{\mathcal{M}_2}\big)^{1-\theta}\big(\|u\|^2_{V_0} + \|v\|^2_{V'_2} + \|\xi\|^2_{\mathcal{M}_0}\big)^{\theta}\end{aligned}$$

Luego,

$$\|(u,v,\xi)\|^2_{\mathcal{H}_{-\theta}} \leq C(\theta)^2(\|(u,v,\xi)\|^2_{\mathcal{H}})^{1-\theta}(\|(u,v,\xi)\|^2_{\mathcal{H}_{-1}})^{\theta},$$

es decir,

$$\|(u,v,\xi)\|_{\mathcal{H}_{-\theta}} \leq C(\theta)\|(u,v,\xi)\|^{1-\theta}_{\mathcal{H}}\|(u,v,\xi)\|^{\theta}_{\mathcal{H}_{-1}}, \tag{24}$$

para todo $(u,v,\xi) \in \mathcal{H}$ y para todo $\theta \in (0,1]$. Asi, basta mostrar que la función $t \mapsto S(t)z$ es Hölder contínua en $\mathcal{H}_{-\theta} := V_{2(1-\theta)} \times V'_{2\theta} \times \mathcal{M}_{2(1-\theta)}$, donde $\theta \in (0,1]$ y $z \in \mathcal{B}_0$.
Usando la acotación de $z(t)$ en (21) y las desigualdades (23) y (24) obtenemos:

$$\begin{aligned}\|S(t_2)z - S(t_1)z\|_{\mathcal{H}_{-\theta}} &\leq C(\theta)\|S(t_2)z - S(t_1)z\|^{1-\theta}_{\mathcal{H}}\|S(t_2)z - S(t_1)z\|^{\theta}_{\mathcal{H}_{-1}} \\ &\leq C_{\theta,T}\|S(t_2)z - S(t_1)z\|^{\theta}_{\mathcal{H}_{-1}} \\ &\leq C_{\mathcal{B}_0,\theta,T}|t_2 - t_1|^{\theta/2},\end{aligned}$$

para todo $t_1, t_2 \in [0,T]$ y $\theta \in (0,1]$.
Por lo tanto, se obtiene la demostración del Teorema 4.1. ■

5. Conclusiones

1. En este trabajo se estudio un modelo de $p-$Kirchhoff con memoria infinita y fuerzas externas y estructurales críticas y considerando un amortiguamiento del tipo fuerte $(-\Delta u_t)$ el cual fue reducido para conseguir que el semigrupo asociado al modelo sea cuasi-estable. Este hecho permitió obtener la existencia de un atractor exponencial generalizado para el modelo.

2. A partir de los resultados de la existencia de una atractor global para el sistema, en el presente trabajo se consiguió nuevas estimativas con mayor regularidad que no solamente involucran a la parte espacial sino a la temporal. Esto permitió que en un espacio mayor se consiguiera una tasa de atracción exponencial con relación a los conjuntos acotados en el nuevo espacio de fase.

Referencias bibliográficas

[1] An, L. & Peirce, A. (1994). *The effect of microstructure on elastic-plastic models.* SIAM J. Appl. Math. 54, no. 3, 708-730.

[2] Andrews, G. (1980). *On the existence of solutions to the equation* $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$. J. Differential Equations 35, 200-231.

[3] Benaissa, A. & Guesmia, A. (2008). *Energy decay for the wave equations of* $\phi-$*Laplacian type with weakly nonlinear dissipation.* Electron. J. Differential Equations, no. 109, 1-22.

[4] Biazutti, A. C. (1995). *On a nonlinear evolution equation and its applications.* Nonlinear Anal. 24, 1221-1234.

[5] Chueshov, I. & Lasiecka, I. (2006). *Existence, uniqueness of weak solutions and global attractors for a class of nonlinear 2D Kirchhoff-Boussinesq models.* Discrete Contin. Dyn. Syst. 15 (777-809).

[6] Chueshov, I. & Lasiecka, I. (2010). *Von Karman Evolution Equations: Well-Posedness and Long-Time Dynamics.* Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York.

[7] Chueshov, I. & Lasiecka, I. (2011). *On global attractor for 2D Kirchhoff-Boussinesq model with supercritical nonlinearity.* Comm. Partial Differential Equations 36, 67-99.

[8] Clements, J. (1974). *Existence theorems for a quasilinear evolution equation.* SIAM J. Appl. Math. 26, 745-752.

[9] Dafernos, C. M. (1970). *Asymptotic stability in viscoelasticity.* Arch. Rational Mech. Anal. 37 (279-308).

[10] Dang Dinh Ang & Phan Ngoc Dinh, A. (1988). *Strong solutions of a quasilinear wave equation with nonlinear damping.* SIAM J. Math. 19, 227-347.

[11] Dreher, M. (2007). *The wave equation for the* $p-$ *Laplacian.* Hokkaido Math. J. 36, 21-52.

[12] Gao, H. & Ma, T. F. (1999). *Global solutions for a nonlinear wave equations with the* $p-$*Laplacian Operator.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., No. 11, 13pp.

[13] Giorgi, C. ; Grasselli, M. & Pata, V. (2001). *Well-posedness and longtime behavior of the phase-field model with memory in a history space setting.* Quart. Appl. Math. 59 (701-736).

[14] Giorgi, C. ; Marzocchi, A. & Pata, V. (1998). *Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory.* NoDEA Nonlinear Diff. Eq. Appl. 5 (333-354).

[15] Giorgi, C. ; Muñoz Rivera, J. E. & Pata, V. (2001). *Global attractors for a similinear hyperbolic equation in viscoelasticity.* J. Math. Anal. Appl. 260 (83-99).

[16] Grasselli, M. & Pata, V. (2002). *Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory.* Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 50 (155-178).

[17] Greenberg, J. M. (1969). *On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\rho_0 X_{tt} = E(X_x)X_{xx} + \lambda X_{xxt}$.* J. Math. Anal. Appl. 25, 575-591.

[18] Greenberg, J. M. ; Maccamy, R. C. & Mizel, V. J. (1968). *On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$.* J. Math. Mech. 15, 707-728.

[19] Haraux, A. & Zuazua, E. (1988). *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems.* Arch. Rational Mech. Anal. 100 (191-206).

[20] Henry, D. (1981). *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* Lectures Notes in Mathematics, 840. Springer-Verlag, Berlin-New York.

[21] Jorge Silva, M. A. & Ma, T. F. (2013). *Long-time dynamics for a class of Kirchhoff models with memory.* J. Math. Anal. Phys. 54, article 021505.

[22] Jorge Silva, M. A. & Ma, T. F. (2013). *On a viscoelastic plate equation with history setting and perturbation of $p-$Laplacian type.* IMA J. Math.

[23] Kim, J. U. (1989). *A boundary thin obstacle problem for a wave equation.* Comm. Partial Differential Equations 14 (1011-1026).

[24] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications.* Jhon Wiley & Sons, New York-London-Sydney.

[25] Lagnese, J. E. (1989). *Boundary Stabilization of Thin Plates.* SIAM Studies in Applied Mathematics, 10. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA.

[26] Lagnese, J. E. & Lions, J. L. (1988). *Modelling, analysis and control of thin plates.* Collection RMA, Mason, Paris.

[27] Lions, J.-L. (1969). *Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéaires.* Dunod Gauthier-Villars, Paris.

[28] Lions, J.-L. & Magenes, E. (1972). *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications.* Vol. I, Springer-Verlag, Berlin.

[29] Ma, T. F. (2001). *Boundary stabilization for a nonlinear beam on elastic bearings.* Math. Meth. Appl. Sciences 24, 583-594.

[30] Ma, T. F. & Soriano, J. A. (1999). *On weak solutions for an evolution equation with exponential nonlinearities.* Nonlinear Anal. 37, 1029-1038.

[31] Maia, S. A. & Miranda, M. (2009). *Existence and decay of solutions of an abstract second order nonlinear problem.* J. Math. Anal. Appl. 358, 445-456.

[32] Maranville, A. & Zelik, S. (2008). *Handbook of Differential Equations Evolutionary Equations.* Volumen 4, Chapter 3, C.M. Dafermos and M. Pokorny, Editors, Elsevier.

[33] Messaoudi, S. A. (2005). *On the decay of solutions for a class of quasilinear hyperbolic equations with non-linear damping and source terms.* Math. Methods Appl. Sci. 28, 1819-1828.

[34] Muñoz Rivera, J. E. & Oquendo, H. P. (2003). *Asymptotic behavior of a Mindlin-Timoshenko plate with viscolastic dissipation on the beondary.* Funkcial. Ekvac. 46 no. 3, 363-382.

[35] Muñoz Rivera, J. E. (1994). *Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity.* Quart. Appl. Math. 52, 628-648.

[36] Park, J. Y. ; Kim, H. M. & Park, S. H. (2003). *On weak solutions for hyperbolic differential inclusion with discontinuous nonlinearities.* Nonlinear Anal. 55, 103-113.

[37] Pata, V. & Zucchi, A. (2001). *Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory.* Adv. Math. Sci. Appl. 11 (505-529).

[38] Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential.* Applied Mathematical Sciences v. 44, Springer-Verlag, New York.

[39] Sango, M. (2009). *On a nonlinear hyperbolic equation with anisotropy: global exsitence and decay of solution.* Nonlinear Anal. 70, 2816-2823.

[40] Simon, J. (1987). *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$. Ann. Mat. Pura Appl. 146 (65-96).

[41] Teman, R. (1988). *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Applied Mathematical Sciences 68, Springer-Verlag, New York.

[42] Tsutsumi, M. (1971). *Some nonlinear evolution equations of second order.* Proc. Japan Acad. 47, suppl. II, 950-955.

[43] Yang, Z. (2003). *Global existence, asymptotic behavior and blowup of solutions for a class of nonlinear wave equations with dissipative term.* J. Differential Equations 187, 520-540.

[44] Yang, Z. (2009). *Longtime behavior for a nonlinear wave equation arising in elastoplastic flow.* Math. Meth. Appl. Sci. 32 (1082-1104).

[45] Yang, Z. (2010). *Finite-dimensional attractors for the Kirchhoff models.* J. Math. Phys. 51, article 092703.

[46] Yang, Z. (2010). *Global attractors and their Hausdorff dimensions for a class of Kirchhoff models.* J. Math. Phys. 51, 032701, 17pp.

[47] Yang, Z. (2012). *Finite-dimensional attractors for the Kirchhoff models with critical exponents.* J. Math. Phys. 53, article 032702.

[48] Yang, Z. & Jin, B. (2009). *Global attractor for a class of Kirchhoff models.* J. Math. Phys. 50, article 032701.