

Estudio numérico de la viga de Timoshenko amortiguada

*Julio Román Loayza Cerrón*¹

Resumen: En este trabajo, hacemos un estudio cualitativo de un esquema numérico asociado al modelo unidimensional de la ecuación de la viga de Timoshenko amortiguada. El esquema resulta al aplicar el método de diferencias finitas, y obtenemos condiciones por medio del análisis de von Neumann, que nos permiten asegurar la estabilidad del esquema aproximado. También estudiamos la consistencia del esquema y concluimos, gracias al teorema de equivalencia de Lax, que el esquema numérico es convergente. Además, deducimos fórmulas para las soluciones numéricas aproximadas del modelo en estudio.

Palabras clave: viga de Timoshenko, método de diferencias finitas, esquema numérico, análisis de von Neumann, estabilidad del esquema.

Numerical study of the damped Timoshenko beam

Abstract: In this work, we make a qualitative study of a numerical scheme associated with the one-dimensional model of the damped Timoshenko beam equation. The scheme is derived by applying the finite difference method, and we obtain conditions through the von Neumann analysis, which allows us to ensure the stability of the approximate scheme. We also study the consistency of the scheme and conclude, thanks to the Lax equivalence theorem, that the numerical scheme is convergent. Furthermore, we derive formulas for the approximate numerical solutions of the model under study.

Keywords: Timoshenko beam, finite difference method, numerical scheme, von Neumann analysis, stability of the numerical scheme.

Recibido: 02/04/2022. *Aceptado:* 13/05/2022. *Publicado online:* 30/06/2022.

¹UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: jloayzac@unmsm.edu.pe

1. Introducción

Los sistemas elásticos con amortiguación fueron propuestos por primera vez por D.L. Russell [8]. Estos sistemas pertenecen a la familia de los sistemas dinámicos disipativos, cuya existencia y unicidad de soluciones se obtiene por procedimientos clásicos de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP).

En la sección 5 del libro de Z. Liu y S.Zheng [4], se presenta y resuelve resumidamente la ecuación de la viga de Timoshenko

$$\rho w_{tt} + EI (w_x + r)_{xxx} = 0, \tag{1}$$

$$2\sigma \frac{\partial r}{\partial t} + \alpha r - EI (w_x + r)_{xx} = 0, \tag{2}$$

con condiciones de frontera y condiciones iniciales dadas por

$$w = w_x + r = 0, \text{ en } x = 0, \tag{3}$$

$$(w_x + r)_x = (w_x + r)_{xx} = 0, \text{ en } x = L, \tag{4}$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), \quad r(x, 0) = r_0(x), \tag{5}$$

donde t denota la variable temporal; y x , la variable espacial definida en $(0, L)$, siendo L la longitud de la viga. Las funciones $w = w(x, t)$ y $r = r(x, t)$ son la deflexión lateral y el ángulo de corte, respectivamente, aplicados en el punto $x \in (0, L)$ en el instante de tiempo t . Además, σ , ρ , α , E e I son constantes positivas que describen las características físicas del problema.

En el modelo (1)-(5), se considera la viga empotrada en un extremo y libre en el otro extremo, es decir, es una viga en voladizo (ver Figura 1). Además, se supondrá que, inicialmente, se encuentra en equilibrio, que está constituida de material isotrópico, y que es linealmente elástica y homogénea.

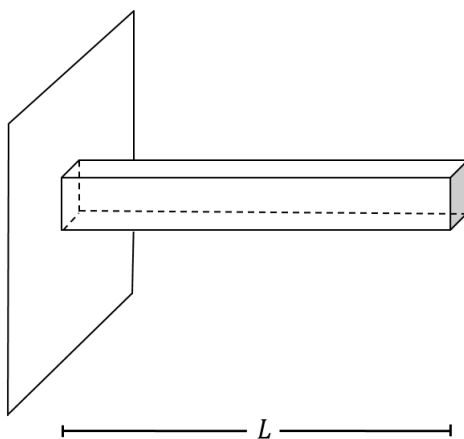


Figura 1: Viga en posición de equilibrio.

En J.R. Loayza [5], se estudia la buena colocación y el comportamiento asintótico del problema (1)-(5) mediante la teoría de semigrupos de operadores lineales.

En este trabajo, se presenta el estudio numérico del sistema (1)-(5) mediante el método de diferencias finitas, herramienta que permitirá encontrar un esquema discreto aproximado, que, tras realizar el análisis cualitativo, se enunciará y demostrará usando el análisis de estabilidad de von Neumann, un teorema que garantiza la estabilidad del esquema, y además, se probará

que el esquema es consistente y, utilizando el teorema de Lax, se mostrará que dicho esquema es convergente. Se finaliza el estudio numérico usando las aproximaciones de las derivadas parciales en diferencias finitas para expresar cada una de las ecuaciones (1) y (2), y cada una de las condiciones de frontera (3) y (4). Datos iniciales $w_0(x)$, $w_1(x)$ y $r_0(x)$ conocidos (ver (5)) permiten resolver numéricamente este modelo, y por lo tanto, se podrá obtener fórmulas para la deflexión lateral w y el ángulo de corte r . Este trabajo está basado en el Capítulo 5 de [5].

2. Preliminares

Se necesitarán aproximaciones para las derivadas espaciales y temporales de diferentes órdenes, y estos resultados se logran expresando las funciones por medio de las series de Taylor y considerando el error de truncamiento. Algunos libros, donde se puede revisar la deducción de estas aproximaciones, son R.J. LeVeque [3], J.C. Strikwerda [7], K.A. Hoffmann y S.T. Chiang [2], entre otros. Algunas aproximaciones que se usarán son

$$\partial_t w_i^j = \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (6)$$

$$\partial_x^2 w_i^j = \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \quad (7)$$

$$\partial_x^3 w_i^j = \frac{w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + 2w_{i-1}^j - w_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \quad (8)$$

$$\partial_x^4 w_i^j = \frac{w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j}{(\Delta x)^4} + \mathcal{O}((\Delta x)^2), \quad (9)$$

donde $w(x_i, t_j) = w_i^j$, Δx y Δt son los tamaños de paso de la malla, espacial y temporal respectivamente, y, además, los últimos sumandos de cada una de las fórmulas de (6) a (9) son los órdenes de aproximación.

Una vez obtenido el esquema numérico discreto asociado a nuestro modelo, se debe determinar si es posible confiar en dicho esquema, y, para esto, se debe estudiar la consistencia, estabilidad y convergencia del esquema.

2.1. Consistencia, estabilidad y convergencia

Las siguientes definiciones pueden ser encontradas en K. Hoffmann y Chiang [2], p. 23.

Definición 2.1.1. Una aproximación en diferencias finitas de una EDP es consistente si la ecuación en diferencias finitas tiende a la EDP cuando el tamaño de la malla tiende a 0.

Definición 2.1.2. Un esquema numérico es estable si cualquier error introducido en la ecuación en diferencias finitas no crece con la solución de la ecuación en diferencias finitas.

Definición 2.1.3. Un esquema en diferencias finitas es convergente si la solución de la ecuación en diferencias finitas tiende a la de la EDP cuando el tamaño de la malla tiende a 0.

Surge una pregunta natural: ¿habrá una relación entre consistencia, estabilidad y convergencia? La respuesta la da el siguiente teorema:

Teorema 2.1.1. (*Teorema de equivalencia de Lax*) Un esquema numérico para un problema de valores iniciales bien planteado es convergente si y solo si es consistente y estable.

Demostración. Ver K.W. Morton y D.F. Mayers [6], p. 159.

2.2. Análisis de estabilidad de von Neumann

Uno de los procedimientos más usados (por ser menos pesado matemáticamente) para determinar la estabilidad (o inestabilidad) del esquema numérico que se obtiene al usar el método de diferencias finitas se llama *análisis de estabilidad de von Neumann*, que es especialmente útil en problemas definidos en todo el espacio con mallados regulares. En esencia, este método introduce una línea inicial de errores representada por una serie de Fourier y considera el crecimiento (o decaimiento) de estos errores a medida que x aumenta. El método se aplica, en un sentido teórico, solo a problemas de valor inicial con datos iniciales periódicos; como tal, separa completamente la influencia de las condiciones de frontera. Como el enfoque de von Neumann se basa en las series de Fourier, generalmente, se limita a EDP lineales con coeficientes constantes.

En la sección 4, se aplicará el análisis de estabilidad de von Neumann al esquema discreto aproximado asociado al sistema (1)-(5).

El análisis de estabilidad de von Neumann sigue los siguientes pasos

- (i) Suponiendo que se tiene el esquema numérico de un determinado modelo obtenido por diferencias finitas, dado por

$$u^{n+1} = Bu^n, \tag{10}$$

donde u es el vector solución en el nivel de tiempo n y B es una matriz.

- (ii) Expandir la solución u de (10) en una serie finita de Fourier de la forma $u^n(x) = \sum_k \bar{u}^n(k) e^{ikx}$ con $i = \sqrt{-1}$, la que, luego de reemplazar en (10), origina el siguiente resultado

$$\bar{u}^{n+1} = G(\Delta x, \Delta t, k) \bar{u}^n, \tag{11}$$

y a la matriz G se le denomina *factor de amplificación* o *matriz de amplificación de errores*.

- (iii) Para controlar que ningún nodo de Fourier se amplifique, es decir, que el radio espectral de la matriz G deba ser menor o igual que 1, se utiliza el siguiente resultado:

Proposición 2.2.1. (*Condición de von Neumann*) Una condición necesaria para la estabilidad de un esquema numérico en diferencias finitas es que exista una constante K' (independiente de Δx , Δt y k) tal que se cumpla

$$|\lambda_i(k)| \leq 1 + K' \Delta t, \tag{12}$$

para cada autovalor $\lambda_i(k)$ de la matriz de amplificación G . Si cada autovalor es independiente de Δx y Δt , la condición de estabilidad (12) puede ser reemplazada por la condición de estabilidad restringida

$$|\lambda_i(k)| \leq 1. \tag{13}$$

Demostración. Ver K.W. Morton y D.F. Mayers [6], p. 165.

3. Esquema numérico en diferencias finitas

Para el estudio numérico por el método de diferencias finitas, y, para ello, se necesitará mayor regularidad de la solución propuesta. Para conseguir incrementar la regularidad, se recurrirá a la siguiente definición y proposición:

Definición 3.0.1. Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 y \mathcal{A} su generador infinitesimal. Denotemos por $\mathcal{A}^0 = I$, $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$ y, supóngase que \mathcal{A}^{n-1} esté bien definido, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces se define el operador \mathcal{A}^n por

$$\mathcal{A}^n x = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1} x), \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n),$$

donde

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^n) = \{x; x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{n-1}) \text{ y } \mathcal{A}^{n-1}x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}.$$

Proposición 3.0.1. Sea \mathcal{A} el generador infinitesimal de un semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 , entonces, para todo $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, se cumple que

$$S(t)x \in C^{n-k}([0, \infty); [\mathcal{D}(\mathcal{A}^k)]), k = 0, 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Ver A.M. Gomes [1], p. 23.

La Proposición 3.0.1, permite representar de manera aproximada, por medio de series de Taylor, cada una de las derivadas que se necesitan, con lo que, de esta forma, se conseguirá aproximarse a las soluciones del modelo. Para esto, se considerará el problema de Cauchy equivalente al sistema (1)-(5), dado por

$$\begin{cases} \frac{dZ(t)}{dt} = \mathcal{A}Z(t) & t > 0 \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}, \quad (14)$$

donde

$$Z = (w, w_t, r)^T, \quad Z_0 = (w_0, w_1, r_0)$$

y el operador diferencial \mathcal{A} es definido como

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -\frac{EI}{\rho} \partial_x^4 & 0 & -\frac{EI}{\rho} \partial_x^3 \\ \frac{EI}{2\sigma} \partial_x^3 & 0 & \frac{EI}{2\sigma} \partial_x^2 - \frac{\alpha}{2\sigma} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

reduciendo, de esta manera, el sistema de EDP acopladas (1)-(5) al problema de evolución de primer orden autónomo (14).

La ecuación (14) es válida en el dominio espacio-tiempo $\Omega = (0, L) \times (0, T)$. Para discretizar el dominio Ω en un conjunto finito de puntos, considérense particiones uniformes de tamaños de paso Δx para la variable espacial x y Δt para la variable temporal t , con lo que se generará una malla de puntos o red computacional. Estos puntos son llamados *puntos de malla* o *nodos*, y están representados por (x_i, t_j) con $1 \leq i \leq N - 1$ y $1 \leq j \leq M - 1$, donde M y N son números enteros positivos.

Así, para un punto de malla arbitrario y fijo (i, j) , se tendrá una solución aproximada de la forma $Z_i^j = Z(i\Delta x, j\Delta t)$, es decir, cada una de estas soluciones verifica

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} Z_i^j = \mathcal{A}Z_i^j, & 1 \leq i \leq N - 1, \quad 1 \leq j \leq M - 1 \\ Z_i^0 = Z_0(i\Delta x), & 0 \leq i \leq N, \end{cases} \quad (16)$$

donde $N = \frac{L}{\Delta x}$ y $M = \frac{T}{\Delta t}$ son los números de puntos de malla considerados en el dominio discreto. Entonces, resolver el sistema (14) es equivalente a resolver el sistema discreto (16).

Usando la fórmula (6), en la primera relación de (16), sin considerar su error de truncamiento, se consigue una expresión algebraica semidiscreta de la solución aproximada en el instante $j + 1$, la cual es

$$Z_i^{j+1} = (I + \Delta t \mathcal{A}) Z_i^j. \quad (17)$$

Notemos que (17) requiere tener conocida la solución aproximada en un tiempo anterior j .

Con el objetivo de obtener un esquema numérico totalmente discreto, a partir de (17), observamos que debemos conseguir un equivalente discreto para el operador \mathcal{A} , definido en (15), y,

por eso, utilizaremos las fórmulas (7)-(9) aplicadas a Z_i^j , sin considerar sus respectivos errores de truncamiento, es decir, tenemos las siguientes aproximaciones

$$\partial_x^2 Z_i^j \approx \frac{Z_{i+1}^j - 2Z_i^j + Z_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} := \widehat{d}_x^2 Z_i^j, \quad (18)$$

$$\partial_x^3 Z_i^j \approx \frac{Z_{i+2}^j - 2Z_{i+1}^j + 2Z_{i-1}^j - Z_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} := \widehat{d}_x^3 Z_i^j, \quad (19)$$

$$\partial_x^4 Z_i^j \approx \frac{Z_{i+2}^j - 4Z_{i+1}^j + 6Z_i^j - 4Z_{i-1}^j + Z_{i-2}^j}{(\Delta x)^4} := \widehat{d}_x^4 Z_i^j. \quad (20)$$

Además, denótese: $a = -\frac{EI}{\rho}$, $b = \frac{EI}{2\sigma}$ y $c = -\frac{\alpha}{2\sigma}$, y, teniendo en cuenta (15), se puede considerar

$$\mathcal{A} \approx \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ a\widehat{d}_x^4 & 0 & a\widehat{d}_x^3 \\ b\widehat{d}_x^3 & 0 & b\widehat{d}_x^2 + c \end{bmatrix} := \mathcal{A}_h \quad (21)$$

y, entonces, usando (17), el esquema discreto aproximado será

$$Z_i^{j+1} = BZ_i^j, \quad (22)$$

donde la matriz B es dada por

$$B = I + \Delta t \mathcal{A}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Delta t & 0 \\ a\Delta t \widehat{d}_x^4 & 0 & a\Delta t \widehat{d}_x^3 \\ b\Delta t \widehat{d}_x^3 & 0 & b\Delta t \widehat{d}_x^2 + c\Delta t \end{bmatrix},$$

de donde se tiene

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 \\ a\Delta t \widehat{d}_x^4 & 1 & a\Delta t \widehat{d}_x^3 \\ b\Delta t \widehat{d}_x^3 & 0 & b\Delta t \widehat{d}_x^2 + c\Delta t + 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Obsérvese que, si se aplica (22), a Z_i^j , resulta

$$Z_i^j = BZ_i^{j-1} = B^2 Z_i^{j-2} = B^3 Z_i^{j-3} = \dots = B^j Z_i^0,$$

que, al reemplazarlo en (22), origina

$$Z_i^{j+1} = B^j Z_i^0. \quad (24)$$

Por lo tanto, gracias a la relación (24), se podrá calcular la aproximación de la solución para cada punto de malla del dominio discreto, siempre y cuando sea conocido el valor inicial aproximado Z_i^0 y calculado B^j .

En las siguientes tres secciones, se realizará el estudio cualitativo del esquema numérico (22).

4. Estabilidad del esquema numérico

El estudio de la estabilidad del esquema discreto (22) se realizará utilizando el análisis de estabilidad de von Neumann presentado en la subsección 2.2. Entonces, considerando una solución de la forma

$$Z_i^j = f_j e^{\eta i k \Delta x}, \quad k = \sqrt{-1}, \quad (25)$$

y utilizando (18), (19) y (20), se obtiene

- $$\begin{aligned} \bullet \quad \widehat{d}_x^2 Z_i^j &= \frac{f_j e^{\eta(i+1)k\Delta x} - 2f_j e^{\eta i k \Delta x} + f_j e^{\eta(i-1)k\Delta x}}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{f_j e^{\eta i k \Delta x}}{(\Delta x)^2} (e^{\eta k \Delta x} - 2 + e^{-\eta k \Delta x}) \\ &= \frac{Z_i^j}{(\Delta x)^2} (e^{\frac{\eta k \Delta x}{2}} - e^{-\frac{\eta k \Delta x}{2}})^2 \\ &= \frac{Z_i^j}{(\Delta x)^2} \left[2k \operatorname{sen} \left(\frac{\eta \Delta x}{2} \right) \right]^2 \\ &= -\frac{4Z_i^j}{(\Delta x)^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\eta \Delta x}{2} \right). \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \bullet \quad \widehat{d}_x^3 Z_i^j &= \frac{f_j e^{\eta(i+2)k\Delta x} - 2f_j e^{\eta(i+1)k\Delta x} + 2f_j e^{\eta(i-1)k\Delta x} - f_j e^{\eta(i-2)k\Delta x}}{2(\Delta x)^3} \\ &= \frac{f_j e^{\eta i k \Delta x}}{2(\Delta x)^3} (e^{2\eta k \Delta x} - 2e^{\eta k \Delta x} + 2e^{-\eta k \Delta x} - e^{-2\eta k \Delta x}) \\ &= \frac{Z_i^j}{2(\Delta x)^3} \{2k \operatorname{sen}(2\eta \Delta x) - 2[2k \operatorname{sen}(\eta \Delta x)]\} \\ &= \frac{kZ_i^j}{(\Delta x)^3} [\operatorname{sen}(2\eta \Delta x) - 2\operatorname{sen}(\eta \Delta x)]. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \bullet \quad \widehat{d}_x^4 Z_i^j &= \frac{f_j e^{\eta(i+2)k\Delta x} - 4f_j e^{\eta(i+1)k\Delta x} + 6f_j e^{\eta i k \Delta x} - 4f_j e^{\eta(i-1)k\Delta x} + f_j e^{\eta(i-2)k\Delta x}}{(\Delta x)^4} \\ &= \frac{f_j e^{\eta i k \Delta x}}{(\Delta x)^4} (e^{2\eta k \Delta x} - 4e^{\eta k \Delta x} + 6 - 4e^{-\eta k \Delta x} + e^{-2\eta k \Delta x}) \\ &= \frac{Z_i^j}{(\Delta x)^4} (e^{\frac{\eta k \Delta x}{2}} - e^{-\frac{\eta k \Delta x}{2}})^4 \\ &= \frac{Z_i^j}{(\Delta x)^4} \left[2k \operatorname{sen} \left(\frac{\eta \Delta x}{2} \right) \right]^4 \\ &= \frac{16Z_i^j}{(\Delta x)^4} \operatorname{sen}^4 \left(\frac{\eta \Delta x}{2} \right), \end{aligned}$$

con lo cual se puede escribir

$$\widehat{d}_x^2 = -\frac{4}{(\Delta x)^2} \operatorname{sen}^2(\theta), \quad \widehat{d}_x^3 = \frac{k}{(\Delta x)^3} [\operatorname{sen}(4\theta) - 2\operatorname{sen}(2\theta)], \quad \widehat{d}_x^4 = \frac{16}{(\Delta x)^4} \operatorname{sen}^4(\theta), \quad (26)$$

donde: $\theta = \frac{\eta\Delta x}{2}$. Seguidamente, se reemplaza (26) en (23) y se consigue la matriz de amplificación de errores

$$G(\Delta x, \Delta t, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 \\ 16a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^4} \text{sen}^4(\theta) & 1 & ka \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} [\text{sen}(4\theta) - 2\text{sen}(2\theta)] \\ kb \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} [\text{sen}(4\theta) - 2\text{sen}(2\theta)] & 0 & -4b \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\theta) + c\Delta t + 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Con el objetivo de consolidar la estabilidad del esquema numérico en diferencias finitas (22), es prioridad encontrar los requisitos que respalden que el radio espectral de la matriz $G(\Delta x, \Delta t, \theta)$ sea menor que la unidad. Para la prueba del siguiente resultado, se necesita verificar la condición de estabilidad de von Neumann (ver Proposición 2.2.1).

Teorema 4.0.1. (Estabilidad) Sean los parámetros reales positivos σ, ρ, α, E e I . Si los tamaños de paso Δx y Δt satisfacen

$$(\Delta x)^2 > \frac{4EI}{\alpha} \quad y \quad \Delta t < \frac{\sigma}{\alpha}, \quad (28)$$

entonces el esquema discreto aproximado del sistema de Timoshenko amortiguado (22) es un esquema estable.

Demostración. Defínanse las matrices de componentes reales $G_{\mathbb{R}}$ y $G_{\mathbb{I}}$ por

$$G_{\mathbb{R}} = \text{Re}[G(\Delta x, \Delta t, \theta)] \quad y \quad G_{\mathbb{I}} = \text{Im}[G(\Delta x, \Delta t, \theta)],$$

es decir, $G_{\mathbb{R}}$ y $G_{\mathbb{I}}$ son, respectivamente, la parte real e imaginaria de la matriz de amplificación de errores $G(\Delta x, \Delta t, \theta)$. Luego, usando (27), se distingue que

$$G_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 \\ 16a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^4} \text{sen}^4(\theta) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4b \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\theta) + c\Delta t + 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

y

$$G_{\mathbb{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} [\text{sen}(4\theta) - 2\text{sen}(2\theta)] \\ b \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} [\text{sen}(4\theta) - 2\text{sen}(2\theta)] & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Si $\lambda = \lambda_{\mathbb{R}} + k\lambda_{\mathbb{I}}$ es un autovalor de la matriz $G = G(\Delta x, \Delta t, \theta)$, con $\lambda_{\mathbb{R}}, \lambda_{\mathbb{I}} \in \mathbb{R}$, se tiene que la igualdad $GZ = \lambda Z$, se verifica si y solo si

$$G_{\mathbb{R}}Z + kG_{\mathbb{I}}Z = \lambda_{\mathbb{R}}Z + k\lambda_{\mathbb{I}}Z. \quad (31)$$

Obsérvese que (31) se cumple siempre que las partes reales e imaginarias de ambos miembros sean, respectivamente, iguales, lo que implica que cada autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ de G es combinación de los autovalores de $G_{\mathbb{R}}$ y $G_{\mathbb{I}}$.

(i) **Hallando los autovalores de la matriz real $G_{\mathbb{I}}$**

Si se supone que $\lambda_{\mathbb{I}} \in \mathbb{R}$ es un autovalor de la matriz $G_{\mathbb{I}}$, entonces, para calcularlo, se debe resolver

$$\det(\lambda_{\mathbb{I}}I - G_{\mathbb{I}}) = 0,$$

la cual, usando (30), equivale a resolver

$$\begin{vmatrix} \lambda_{\mathbb{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\mathbb{I}} - a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} [\text{sen}(4\theta) - 2\text{sen}(2\theta)] & 0 \\ -b \frac{\Delta t}{(\Delta x)^3} [\text{sen}(4\theta) - 2\text{sen}(2\theta)] & 0 & \lambda_{\mathbb{I}} \end{vmatrix} = 0,$$

de donde se consigue: $\lambda_{\mathbb{I}}^3 = 0$, lo que implica que $\lambda_{\mathbb{I}} = 0$ con multiplicidad algebraica 3 es el autovalor de $G_{\mathbb{I}}$.

(ii) **Hallando los autovalores de la matriz real $G_{\mathbb{R}}$**

Sea $\lambda_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$ un autovalor de la matriz $G_{\mathbb{R}}$, entonces, para hallarlo se debe resolver

$$\det(\lambda_{\mathbb{R}}I - G_{\mathbb{R}}) = 0,$$

la cual, teniendo en cuenta a (29), lleva a resolver

$$\begin{vmatrix} \lambda_{\mathbb{R}} - 1 & -\Delta t & 0 \\ -16a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^4} \text{sen}^4(\theta) & \lambda_{\mathbb{R}} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\mathbb{R}} + 4b \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\theta) - c\Delta t - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde, luego de calcular el determinante, se tiene

$$\left[\lambda_{\mathbb{R}} + 4b \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\theta) - c\Delta t - 1 \right] [(\lambda_{\mathbb{R}} - 1)^2 - 16a\Delta t] = 0.$$

Entonces, sigue

$$\lambda_{\mathbb{R}} + 4b \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\theta) - c\Delta t - 1 = 0,$$

pues, como $a < 0$, se tiene que $[(\lambda_{\mathbb{R}} - 1)^2 - 16a\Delta t] > 0$, y, despejando, se obtiene

$$\lambda_{\mathbb{R}} = -4b \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\theta) + c\Delta t + 1.$$

(iii) **Hallando los autovalores de la matriz de amplificación de errores G**

Conociendo los autovalores de las matrices $G_{\mathbb{R}}$ y $G_{\mathbb{I}}$, se obtiene el autovalor $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ de la matriz compleja G , siendo

$$\lambda_1 = -4b \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\theta) + c\Delta t + 1,$$

pero, como $b = \frac{EI}{2\sigma}$ y $c = -\frac{\alpha}{2\sigma}$, donde $\sigma, \alpha, E, I \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\lambda_1 = -2\frac{EI}{\sigma} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\theta) - \frac{\alpha}{2\sigma} \Delta t + 1.$$

Ahora, teniendo en cuenta las hipótesis (28), se puede afirmar que el módulo (en realidad, el valor absoluto en este caso) de λ_1 es menor que la unidad. En efecto,

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \left| 2\frac{EI}{\sigma} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\theta) + \frac{\alpha}{2\sigma} \Delta t - 1 \right| \\ &\leq \left| 2\frac{EI}{\sigma} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\theta) + \frac{\alpha}{2\sigma} \Delta t \right| \\ &\leq \left| 2\frac{EI}{\sigma} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\theta) \right| + \left| \frac{\alpha}{2\sigma} \Delta t \right| \\ &= 2\frac{EI}{\sigma} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} |\text{sen}^2(\theta)| + \frac{\alpha}{2\sigma} \Delta t \\ &\leq 2\frac{EI}{\sigma} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha}{2\sigma} \Delta t = \left(2\frac{EI}{\sigma} \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha}{2\sigma} \right) \Delta t \\ &< \left(2\frac{EI}{\sigma} \frac{\alpha}{4EI} + \frac{\alpha}{2\sigma} \right) \Delta t = \left(\frac{\alpha}{2\sigma} + \frac{\alpha}{2\sigma} \right) \Delta t \\ &= \frac{\alpha}{\sigma} \Delta t < \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{\sigma}{\alpha} \right) = 1, \end{aligned}$$

con lo que se verifica la condición de estabilidad de von Neumann (13), y, por lo tanto, se logra asegurar que el radio espectral de la matriz de amplificación de errores $G(\Delta x, \Delta t, \theta)$ es menor que la unidad, lo que garantiza que el esquema discreto (22) es estable. ■

5. Consistencia del esquema numérico

El esquema numérico presentado en (22) es una aproximación que se origina al expresar los operadores diferenciales de la ecuación diferencial parcial descrita en (16), como cocientes algebraicos, usando series de Taylor sin considerar los residuos correspondientes. Para garantizar la consistencia de dicho esquema, de acuerdo a la definición 2.1.1., será indispensable calcular el error total de aproximación y asegurar que dicho error se aproxime a 0 cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.

Asumiendo suficiente regularidad para la función w y usando las fórmulas para las aproximaciones de las derivadas parciales de diferentes órdenes de $w(x_i, t_j) = w_i^j$ presentadas en la sección 3 (ver los resultados (6)-(9)), se tiene

$$\partial_t w_i^j = \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \tag{32}$$

$$\partial_x^2 w_i^j = \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) := \widehat{d}_x^2 w_i^j + \mathcal{O}((\Delta x)^2),$$

$$\partial_x^3 w_i^j = \frac{w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + 2w_{i-1}^j - w_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) := \widehat{d}_x^3 w_i^j + \mathcal{O}((\Delta x)^2),$$

$$\partial_x^4 w_i^j = \frac{w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j}{(\Delta x)^4} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) := \widehat{d}_x^4 w_i^j + \mathcal{O}((\Delta x)^2).$$

Con estas consideraciones, el operador diferencial \mathcal{A} , presentado en (15), puede ser expresado como

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -\frac{EI}{\rho} \widehat{d}_x^4 & 0 & -\frac{EI}{\rho} \widehat{d}_x^3 \\ \frac{EI}{2\sigma} \widehat{d}_x^3 & 0 & \frac{EI}{2\sigma} \widehat{d}_x^2 - \frac{\alpha}{2\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EI}{\rho} & 0 & -\frac{EI}{\rho} \\ \frac{EI}{2\sigma} & 0 & \frac{EI}{2\sigma} \end{bmatrix} \mathcal{O}((\Delta x)^2). \quad (33)$$

Ahora, reconózcase que la primera matriz de (33) (ver la relación (21)) es \mathcal{A}_h , y denotamos la segunda matriz de (33) por \mathcal{M} , es decir,

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EI}{\rho} & 0 & -\frac{EI}{\rho} \\ \frac{EI}{2\sigma} & 0 & \frac{EI}{2\sigma} \end{bmatrix}.$$

Entonces, se consigue

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_h + \mathcal{M}\mathcal{O}((\Delta x)^2). \quad (34)$$

Los resultados que se obtienen al aplicar (32) para Z_i^j , junto con (34) se reemplazan en la primera relación de (16), y se obtiene

$$\frac{Z_i^{j+1} - Z_i^j}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = \left(\mathcal{A}_h + \mathcal{M}\mathcal{O}((\Delta x)^2) \right) Z_i^j,$$

de donde, despejando, sigue que

$$Z_i^{j+1} - (I + \Delta t \mathcal{A}_h) Z_i^j = \mathcal{M} \Delta t \mathcal{O}((\Delta x)^2) Z_i^j - \Delta t \mathcal{O}(\Delta t). \quad (35)$$

Obsérvese que las expresiones del primer y segundo miembro de (35) son, respectivamente, el esquema discreto (22) y el error de truncamiento de dicho esquema. El mencionado error se origina al no considerar el error de aproximación presente en cada una de las fórmulas de diferencias finitas (18)-(20).

De acuerdo con lo mencionado, entonces, el error de truncamiento, e_T , es

$$e_T = \mathcal{M} \Delta t \mathcal{O}((\Delta x)^2) Z_i^j - \Delta t \mathcal{O}(\Delta t),$$

y se observa que dicho error cumple

$$\|e_T\|_\infty \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0,$$

donde el vector error e_T está definido por

$$e_T = e_{T_j} = \begin{bmatrix} e_{1j} \\ e_{2j} \\ \vdots \\ e_{Nj} \end{bmatrix},$$

con $1 \leq j \leq M - 1$, siendo, $\|e_T\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |e_{ij}|$.

Por lo tanto, se concluye que el esquema numérico (22) es consistente.

6. Convergencia del esquema numérico

Como se ha probado que el esquema numérico es consistente y estable, entonces, se puede concluir, por el teorema de equivalencia de Lax (ver Teorema 2.1.1.), que el esquema numérico (22) es convergente, lo que garantiza que la solución numérica aproximada tienda a la solución exacta en cada punto de malla de la red computacional cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$.

7. Solución numérica

En esta sección, usando las aproximaciones de las derivadas parciales en diferencias finitas, se expresan cada una de las ecuaciones (1) y (2), y cada una de las condiciones de frontera (3) y (4). Datos iniciales $w_0(x)$, $w_1(x)$ y $r_0(x)$ conocidos (ver (5)) permiten resolver numéricamente este modelo, y, por lo tanto, se podrá obtener fórmulas para la deflexión lateral w y el ángulo de corte r . Se denotará a la solución aproximada para la deflexión lateral en el nodo (i, j) por w_i^j y a la solución aproximada del ángulo de corte en el nodo (i, j) por r_i^j , y, también, para facilitar los cálculos, de ahora en adelante, se denota el tamaño de paso espacial por h y por k el tamaño de paso temporal.

- Para la ecuación (1):

Retirando los órdenes de aproximación de cada una de las fórmulas en diferencias finitas, se procede a reemplazar w_{tt} , w_{xxxx} y w_{xxx} por sus respectivos equivalentes (7), (9) y (8), en (1), es decir,

$$\rho \left(\frac{w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}}{k^2} \right) + EI \left(\frac{w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j}{h^4} \right) + EI \left(\frac{r_{i+2}^j - 2r_{i+1}^j + 2r_{i-1}^j - r_{i-2}^j}{2h^3} \right) = 0,$$

de donde, si se hace $\frac{EI k^2}{\rho h^4} = k_2$ y $\frac{EI k^2}{2\rho h^3} = k_3$, sigue que

$$w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1} + k_2 \left(w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j \right) + k_3 \left(r_{i+2}^j - 2r_{i+1}^j + 2r_{i-1}^j - r_{i-2}^j \right) = 0.$$

Recuérdese que las condiciones iniciales son datos conocidos. Así, la incógnita en la relación anterior es w_i^{j+1} . Despejando ese término, queda

$$w_i^{j+1} = k_1 w_i^j - w_i^{j-1} - k_2 \left(w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j \right) - k_3 \left(r_{i+2}^j - 2r_{i+1}^j + 2r_{i-1}^j - r_{i-2}^j \right), \quad (36)$$

donde $k_1 = 2(3k_2 - 1)$. Nótese que, en (36), se utiliza, para el j -ésimo nivel de tiempo cinco valores de deflexión lateral, y cuatro valores de ángulo de corte entre los niveles $i - 2$ e $i + 2$. También se utiliza el valor de la deflexión lateral en el $(j - 1)$ -nivel de tiempo. Así, (36) es una fórmula de tres niveles.

- Para la ecuación (2):

Se procede a reemplazar las derivadas r_t , w_{xxx} y r_{xx} , por (6), (7) y (8), sin considerar sus órdenes de aproximación, es decir,

$$2\sigma \left(\frac{r_i^{j+1} - r_i^j}{k} \right) + \alpha r_i^j - EI \left(\frac{w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + 2w_{i-1}^j - w_{i-2}^j}{2h^3} \right) - EI \left(\frac{r_{i+1}^j - 2r_i^j + 2r_{i-1}^j}{h^2} \right) = 0,$$

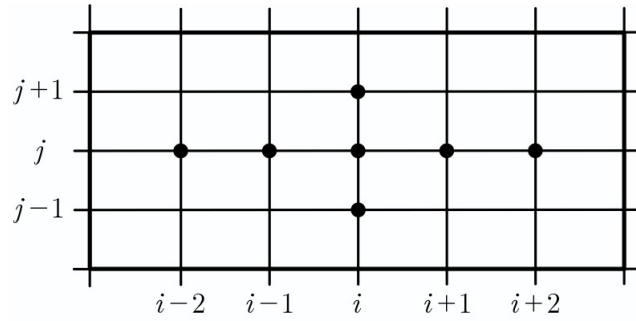


Figura 2: Porción de malla que muestra los nodos usados en (36).

de donde, con $\frac{\alpha k}{2\sigma} = k_8$, $\frac{EI k}{2\sigma h^3} = k_6$ y $\frac{EI k}{2\sigma h^2} = k_7$, se obtiene

$$r_i^{j+1} - r_i^j + k_8 r_i^j - k_6 \left(w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + 2w_{i-1}^j - w_{i-2}^j \right) - k_7 \left(r_{i+1}^j - 2r_i^j + r_{i-1}^j \right) = 0,$$

y, de esta ecuación, como los datos iniciales son conocidos, se despeja r_i^{j+1} , y se tiene

$$r_i^{j+1} = k_5 r_i^j + k_6 \left(w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + 2w_{i-1}^j - w_{i-2}^j \right) + k_7 \left(r_{i+1}^j + r_{i-1}^j \right) \quad (37)$$

con $k_5 = 1 - 2k_6 - 2k_7$. Obsérvese que en (37), se utilizan para el j -ésimo paso del tiempo cuatro valores de la deflexión lateral entre los puntos $i - 2$ e $i + 2$, y tres valores del ángulo de corte entre los puntos $i - 1$ e $i + 1$. Así, (37) es una fórmula de dos niveles.

Las ecuaciones (36) y (37) son las ecuaciones generales para calcular las soluciones aproximadas de la deflexión lateral w_i^j y el ángulo de corte r_i^j .

En lo que resta por calcular, se seguirán usando aproximaciones por diferencias finitas para las derivadas parciales que se necesiten, para encontrar relaciones numéricas que representen las condiciones de frontera (3) y (4).

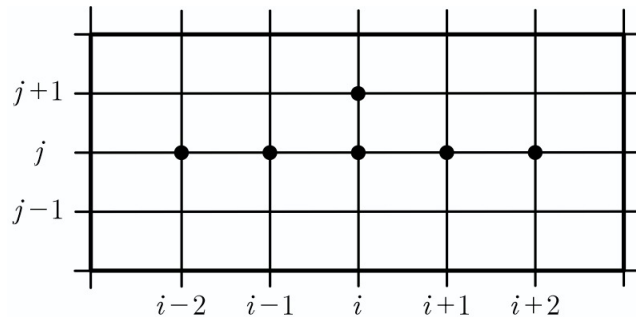


Figura 3: Porción de malla que muestra los nodos usados en (37).

- Para $w = 0$ en $x = 0$:

$$0 = w(0, t) = w(0, j) = w_0^j,$$

es decir, se tiene para cada $j = 1, 2, \dots, M - 1$

$$w_0^j = 0.$$

- Para $w_x + r = 0$ en $x = 0$:

$$0 = w_x|_0 + r|_0 = \frac{w_{0+1}^j - w_0^j}{h} + r_0^j,$$

de donde, para cada $j = 1, 2, \dots, M - 1$, sigue que

$$w_1^j - w_0^j + hr_0^j = 0,$$

pero como $w_0^j = 0$, entonces, para cada $j = 0, 1, \dots, M - 1$, se obtiene

$$w_1^j = -hr_0^j.$$

- Para $w = w_x + r$ en $x = 0$:

$$w_0^j = \frac{w_{0+1}^j - w_0^j}{h} + r_0^j, j = 1, 2, \dots, M - 1,$$

$$0 = w_1^j + hr_0^j, \text{ pues } w_0^j = 0, j = 1, 2, \dots, M - 1.$$

Verificando que $0 = 0$, pues $w_1^j = -hr_0^j, j = 1, 2, \dots, M - 1$.

- Para $(w_x + r)_x = 0$ en $x = L$, i.e., $w_{xx} + r_x = 0$, en $x = L$:

$$w_{xx}|_L + r_x|_L = 0, j = 1, 2, \dots, M - 1.$$

A partir de lo cual, para cada $j = 1, 2, \dots, M - 1$, se obtiene

$$\frac{w_{L+2}^j - 2w_L^j + w_{L-1}^j}{h^2} + \frac{r_{L+1}^j - r_L^j}{h} = 0,$$

lo que permite encontrar para cada $j = 1, 2, \dots, M - 1$

$$w_{L+2}^j - 2w_L^j + w_{L-1}^j = -h(r_{L+1}^j - r_L^j).$$

- Para $(w_x + r)_{xx} = 0$ en $x = L$, i.e., $w_{xxx} + r_{xx} = 0$, en $x = L$:

$$w_{xxx}|_L + r_{xx}|_L = 0, j = 1, 2, \dots, M - 1.$$

Entonces, para $j = 1, 2, \dots, M - 1$, sigue que

$$\frac{w_{L+2}^j - 2w_{L+1}^j + 2w_{L-1}^j - w_{L-2}^j}{2h^3} + \frac{r_{L+1}^j - 2r_L^j + r_{L-1}^j}{h^2} = 0.$$

Se concluye que, para $j = 1, 2, \dots, M - 1$, se tiene

$$w_{L+2}^j - 2w_{L+1}^j + 2w_{L-1}^j - w_{L-2}^j = -2h(r_{L+1}^j - 2r_L^j + r_{L-1}^j).$$

- Para $(w_x + r)_x = (w_x + r)_{xx}$ en $x = L$, i.e., $w_{xx} + r_x = w_{xxx} + r_{xx}$, en $x = L$:

$$\begin{aligned} & \frac{w_{L+1}^j - 2w_L^j + w_{L-1}^j}{h^2} + \frac{r_{L+1}^j - r_L^j}{h} \\ &= \frac{w_{L+2}^j - 2w_{L+1}^j + 2w_{L-1}^j - w_{L-2}^j}{2h^3} + \frac{r_{L+1}^j - 2r_L^j + r_{L-1}^j}{h^2}, j = 0, 1, \dots, M - 1. \end{aligned}$$

Para cada $j = 1, 2, \dots, M - 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} & 2h(w_{L+1}^j - 2w_L^j + w_{L-1}^j) + 2h^2(r_{L+1}^j - r_L^j) \\ &= w_{L+2}^j - 2w_{L+1}^j + 2w_{L-1}^j - w_{L-2}^j + 2h(r_{L+1}^j - 2r_L^j + r_{L-1}^j). \end{aligned}$$

Todas estas condiciones de frontera, expresadas en diferencias finitas para los valores de $i = 1, 2, \dots, N - 1$ y $j = 1, 2, \dots, M - 1$, permitirán poder calcular cada solución w_i^j y r_i^j , siempre que sean conocidas las condiciones iniciales $w_0(x)$, $w_1(x)$ y $r_0(x)$ dadas en (5), y, además, sean conocidos la longitud de la viga $x = L$ y el tiempo $t = T$.

8. Conclusión

Con respecto al estudio numérico del presente modelo, a partir de los resultados presentados en la Sección 2, con el soporte de los métodos numéricos, y, específicamente, con el uso del método de diferencias finitas, que permite trabajar con aproximaciones para las derivadas parciales de diferentes órdenes, se logró construir un esquema numérico para la solución aproximada del problema de Cauchy abstracto, equivalente al modelo estudiado, sobre un dominio discretizado. Posteriormente, al hacer el análisis cualitativo del esquema aproximado, investigando las propiedades del radio espectral de la matriz de amplificación de errores, se demostró que el esquema numérico es estable. Asimismo, se probó que el esquema numérico es consistente, y, gracias al teorema de equivalencia de Lax, se demostró la convergencia del esquema numérico propuesto. Finalmente, se obtuvieron fórmulas numéricas generales para la deflexión lateral y el ángulo de corte.

Referencias bibliográficas

- [1] Gomes, A.M. (1999). *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. 2da. Ed. Rio do Janeiro, Brasil: Instituto de Matemática Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [2] Hoffmann, K.A. y Chiang, S.T. (2000). *Computational fluid dynamics. Vol. I*. 4ta. Ed. N.c., United States of America: Edit. Engineering Education System.
- [3] LeVeque, R.J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations*. Philadelphia, United States of America: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [4] Liu, Z. y Zheng, S. (1999). *Semigroups associated with dissipative systems*. United States of America: Chapman & HALL/CRC.
- [5] Loayza, J.R. (2022). *Estudio analítico y numérico de la viga de Timoshenko amortiguada* (tesis de maestría). Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.
- [6] Morton, K.W. y Mayers, D.F. (2005). *Numerical solution of partial differential equations*. 2da. Ed. New York, United States of America: Cambridge University Press.
- [7] Strikwerda, J.C. (2004). *Finite difference schemes and partial differential equations*. 2da. Ed. Philadelphia, United States of America: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [8] Russell, D.L. (1993). *A general framework for the study of indirect dampings mechanisms in elastic systems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 173 (2), 339-358.