PESQUIMAT 25(1): 59–67 (2022) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v25i1.23141 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Existencia de un Punto Fijo para Aplicaciones sobre Cono Espacios de Banach Utilizando la Iteración de Krasnoselskij

Jhonathan Guerrero Chirinos [1] ***Willy Barahona Martínez*** [2]
Edinson Montoro Alegre [3] ***Rocío De La Cruz Marcacuzco*** [4]

Resumen: "Dado un subconjunto C cerrado y convexo de un cono espacio de Banach E con la norma $\|x\|_P = d(x,0)$ y una aplicación $T : C \to C$ que satisface la condición para todo $x, y \in C$

$$0 \leq s + |a| - 2b < 2(a+b)$$

$$ad(Tx,Ty) + b(d(x,Tx) + d(y,Ty)) \leq sd(x,y)$$

El objetivo general de este artículo, es demostrar la existencia de al menos un punto fijo para la aplicación T para lo cual utilizaremos un caso particular de la iteración de Krasnoselskij.

Palabras clave: iteración de Krasnoselskij, cono normal, cono espacio métrico, cono espacio de Banach, punto fijo."

Existence of a Fixed Point for Applications on Banach Cone Spaces Using the Krasnoselskij Iteration

Abstract: "Given a closed and convex subset C of a cone Banach space E with norm $\|x\|_P = d(x,0)$ and a map $T : C \to C$ that satisfies the condition for all $x, y \in C$

$$0 \leq s + |a| - 2b < 2(a+b)$$

$$ad(Tx,Ty) + b(d(x,Tx) + d(y,Ty)) \leq sd(x,y)$$

The general objective of this article is to demonstrate the existence of at least one fixed point for the map T, for which we will use a particular case of the Krasnoselskij iteration.
Keywords: Krasnoselskij iteration, normal cone, metric space cone, Banach space cone, fixed point."

Recibido: 10/05/2022. *Aceptado:* 15/06/2022. *Publicado online:* 30/06/2022.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: jhonathan.guerrero@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:wbarahonam@unmsm.edu.pe
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:emontoroa@unmsm.edu.pe
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:rdelacruzm@unmsm.edu.pe

1. Introducción

Huang y Zhang en [1] introdujeron por primera vez a los conos espacios métricos sustituyendo a los números reales por un orden parcial de un espacio de Banach real, en el cual ellos muestran algunas propiedades de convergencia de sucesiones y pruebas de teoremas de punto fijo para aplicaciones contractivas en un cono espacio métrico. La propiedad de normalidad del cono es fundamental en sus resultados, y creen que sus resultados generalizan algunos teoremas de punto fijo en espacios métricos.

2. Preliminares

Mencionaremos la definición de cono y algunas de sus propiedades, en la segunda sección se dará la definición de cono espacio métrico y algunas propiedades sobre sucesiones y finalmente en la tercera sección se verá la definición de cono espacio normado, en el capítulo 2 primeramente se mostrará dos teoremas de punto fijo de los cuales se tomaran algunas relaciones para probar el problema planteado sobre la existencia de un punto fijo en un cono espacio de Banach finalmente en el capítulo 3 daremos nuestras conclusiones y recomendaciones.

Definición 2.1 *Un espacio normado real es un espacio vectorial real X junto con la aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ llamada norma, tal que:*

1. $\|x\| \leq 0$, $\forall x \in X$.
2. $\|x\| = 0$, $\forall x \in X$ *si y solo si* $x = 0$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\forall x \in X$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

Definición 2.2 *Un espacio normado completo es llamado un espacio de Banach.*

Definición 2.3 *Sea E un espacio de Banach real y P un subconjunto no vacío de E. Entonces P es llamado cono si las siguientes afirmaciones son válidas*

1. P *es cerrado, no vacío y* $P \neq 0$.
2. $ax + by \in P$ *para todo* $x, y \in P$ *y* a, b *números reales no negativos*
3. $P \cap -P = 0$.

Ejemplo 2.4 *Sea $E = \mathbb{R}^n$, entonces $P = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in E; x_i \geq 0; \forall = 1, 2, \ldots, n\}$ es un cono.*

Ejemplo 2.5 *En en el espacio l^p incluido (l^∞), el conjunto $P = \{x_n \in l^p \, : \, x_n \geq 0\}$ es un cono.*

Definición 2.6 *Sea $P \subset E$ un cono, definimos una relación orden parcial (denotado por $\leq$ o $\leq_P$) con respecto a P por:*

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P. \tag{1}$$

Adicionalmente podemos escribir que $x < y$ para indicar que $x \leq y$ con $x \neq y$, mientras que $x \ll y$ nos indica que $y - x \in Int(P)$, ($Int(P) \cong$ interior de P).

Definición 2.7 *El cono P es llamado:*

(N) *Normal: Si existe un número* $K \geq 1$ *tal que para todo* $x, y \in E$

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq K \|y\| \tag{2}$$

(R) *Regular: Si toda sucesión creciente acotada superiormente es convergente.*
Es decir, si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión tal que* $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq y$ *para algún* $y \in E$*, entonces existe* $x \in E$ *talque*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

(M) *Minihedral: Si sup* $\{x, y\}$ *existe para todo* $x, y \in E$*.*

(S) *Fuertemente Minihedral: Si todo subconjunto de* E *acotado superiormente tiene supremo.*

Lema 2.8 *El cono* P *es regular si toda sucesión decreciente acotada inferiormente es convergente.*

Demostración. Ver en [2]

Lema 2.9 *Todo cono normal es regular.*

Demostración. Ver en [2]

Lema 2.10 *No existe un cono normal con constante normal* $M < 1$*.*

Demostración. Ver en [2]

Proposición 2.11 *Para cada* $k \geq 1$*, existe un cono normal con constante normal* $M > k$*.*

Demostración. Ver en [2]

Lema 2.12 *Todo cono normal fuertemente minihedral es regular.*

Demostración. Ver en [8]

3. Cono espacio métrico

Consideremos E un espacio de Banach real, sea P un cono en E y el orden parcial con respecto a P dado.

Definición 3.1 *Sea* X *un conjunto no vacío.*
Supongamos que la aplicación $d : X \times X \to E$ *satisface:*

1. $0 \leq d(x, y)$ *para todo* $x, y \in X$*.*
2. $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$*.*
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in X$*.*
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ *para todo* $x, y, z \in X$*.*

Entonces d es llamada cono métrica en X, y el par (X, d) es llamado un cono espacio métrico (CEM).

Ejemplo 3.2 *Sea* $E = \mathbb{R}^n$ *con* $P = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \geq, \forall i = 1, \dots, n\}$, $X = \mathbb{R}$, *y* $d : X \times X \to E$ *tal que:*

$$d\,(x, y) = (\alpha_1|x - y|, \alpha_2|x - y|, \dots, \alpha_n|x - y|)$$

donde $\alpha_i > 0$ *para todo* $1 \leq i \leq n$.
Entonces (X, d) *es un cono espacio métrico.*

Ejemplo 3.3 *Sea* $E = l^q$ *para* $q > 0$, $P = \left\{\{x_n\}_{n\geq 1} \in E : x_n \geq 0\, \forall n\right\}$. *Sea* (X, ρ) *un espacio métrico y* $d : X \times X \to E$ *definida por:*

$$d\,(x, y) = \left\{ \left(\frac{\rho(x, y)}{2^n}\right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

Entonces (X, d) *es un cono espacio métrico.*

Ejemplo 3.4 *Sea* $E = C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ *con la norma del supremo,* $P = \{f \in E : f(t) \geq 0\}$, $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ *tal que* $\varphi(t) = e^t$ *y* $d : X \times X \to E$ *definida por:*

$$d\,(x, y) = |x - y|\varphi$$

Entonces (X, d) *es un cono espacio métrico.*

Definición 3.5 ***(Sucesión)*** *Sea* (X, d) *un CEM,* $x \in X$ *y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X. *Entonces* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *converge para* x *, si para cada* $c \in E$ *con* $0 \ll c$, *existe un número natural* n_0, *tal que* $d\,(x_n, x) \ll c$ *para todo* $n \geq n_0$.
Lo denotamos por:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ó } x_n \to x.$$

Lema 3.6 *Sea* (X, d) *un CEM,* P *un cono normal con constante normal* K, *y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X. *Entonces* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *converge para* x *si y solo si*

$$d\,(x_n, x) \to 0, \text{ cuando } n \to \infty$$

Demostración. Ver en [1]

Lema 3.7 *Sea* (X, d) *un CEM,* P *un cono normal con constante normal* K *y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X. *Si* $\{x_n\}$ *converge para* x *y* $\{x_n\}$ *converge para* y, *entonces* $x = y$. *Es decir el limite de* $\{x_n\}$ *es único.*

Demostración. Ver en [1]

Definición 3.8 ***(Sucesión de Cauchy)*** *Sea* (X, d) *un CEM y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X. *Entonces* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de Cauchy, si para cada* $c \in E$ *con* $0 \ll c$ *existe un número natural* n_0, *tal que* $d\,(x_n, x_m) \ll c$ *para todo* $n, m \geq n_0$.

Definición 3.9 *Sea* (X, d) *un CEM, si toda sucesión de Cauchy es convergente en* X, *entonces* X *es llamado cono espacio métrico completo.*

Lema 3.10 *Sea* (X, d) *un CEM,* $x \in X$ *y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X. *Si* $\{x_n\}$ *converge para* x *entonces* $\{x_n\}$ *es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Ver en [1]

Lema 3.11 *Sea (X, d) un CEM, P un cono normal con constante normal K, y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy si y solo si*

$$d(x_n, x_m) \to 0, \quad \text{cuando } n, m \to \infty.$$

Demostración. Ver en [1]

Lema 3.12 *Sea (X, d) un CEM, P un cono normal con constante normal K,$x, y \in X$ y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Si la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge para x y la sucesión $\{y_n\}_{n\geq 1}$ converge para y entonces*

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y) \ \text{ cuando } n \to \infty$$

Lema 3.13 *Sea (X, d) un CEM, P un cono normal con constante normal K y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Si:*

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq kd(x_{n+1}, x_n) \ \text{ con } 0 \leq k < 1$$

entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

4. Cono Espacio Normado

Definición 4.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Supongamos que la aplicación $\| \ \|_P : X \to E$ satisface:*

1. *$\|x\|_P > 0$ para todo $x \in X$.*
2. *$\|x\|_P = 0$ si y solo si $x = 0$.*
3. *$\|x + y\|_P \leq \|x\|_P + \|y\|_P$ para todo $x, y \in X$.*
4. *$\|kx\|_P = |k| \, \|x\|_P$ para todo $k \in \mathbb{R}$.*

Entonces $\|.\|_P$ es llamada cono norma en X, y el par $(X, \|.\|_P)$ es llamado un cono espacio normado (CEN).

Observación 1 *Sea $(X, \|.\|_P)$ un cono espacio normado, la aplicación $d : X \times X \to E$ definida por*

$$d(x, y) = \|x - y\|_P$$

es un cono métrica sobre X y el par (X, d) es un CEM, d es llamada cono métrica inducida por la cono norma $\|.\|_P$.

Definición 4.2 ***(Sucesión)*** *Sea $(X, \|.\|_P)$ un CEN, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge para x , si para cada $c \in E$ con $0 \ll c$, existe un número natural n_0, tal que $\|x_n - x\|_P \ll c$ para todo $n \geq n_0$.*
Lo denotamos por

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \ \text{ ó } x_n \to x$$

Lema 4.3 *Sea $(X, \|.\|_P)$ un CEN, P un cono normal con constante normal K, y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en X. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge para x si y solo si*

$$\|x_n - x\|_P \to 0, \ \text{cuando } n \to \infty$$

Demostración. Ver en [1]

Lema 4.4 *Sea* $(X, \|.\|_P)$ *un CEN,* P *un cono normal con constante normal* K*,* $x, y \in X$ *y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X*. Si* $\{x_n\}$ *converge para* x *y* $\{x_n\}$ *converge para* y*, entonces* $x = y$*. Es decir el límite de* $\{x_n\}$ *es único.*

Demostración. Ver en [1]

Definición 4.5 ***(Sucesión de Cauchy)*** *Sea* $(X, \|.\|_P)$ *un CEN y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X*. Entonces* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de Cauchy, si para cada* $c \in E$ *con* $0 \ll c$ *existe un número natural* n_0*, tal que* $\|x_n - x_m\|_P \ll c$ *para todo* $n, m \geq n_0$*.*

Definición 4.6 *Sea* $(X, \|.\|_P)$ *un CEN, si toda sucesión de Cauchy es convergente en* X*, entonces* X *es llamado cono espacio normado completo (i.e. cono espacio de Banach).*

Lema 4.7 *Sea* $(X, \|.\|_P)$ *un CEN,* $x \in X$ *y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X*. Si* $\{x_n\}$ *converge para* x *entonces* $\{x_n\}$ *es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Ver en [1]

Lema 4.8 *Sea* $(X, \|.\|_P)$ *un CEN,* P *un cono normal con constante normal* K*, y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X*. Entonces* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de Cauchy si y solo si* $\|x_n - x_m\|_P \to 0$*, cuando* $n, m \to \infty$*.*

Demostración. Ver en [1]

Lema 4.9 *Sea* $(X, \|.\|_P)$ *un CEN,* P *un cono normal con constante normal* K*,*$x, y \in X$ *y* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* X*. Si la sucesión* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *converge para* x *y a sucesión* $\{y_n\}_{n\geq 1}$ *converge para* y *entonces* $\|x_n - y_n\|_P \to \|x - y\|_P$ *cuando* $n \to \infty$*.*

5. Resultado Principal

En esta seccion presentamos el resultado principal del articulo, partimos de la definición de la iteración de Krasnoselskij.

Definición 5.1 *Sea* X *un conjunto no vacío,* C *un subconjunto cerrado y convexo de* X*;* $T : C \to C$ *una aplicación. Para algún* $x_0 \in C$*, la sucesión* $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset C$ *dada por*

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda T x_n, \quad n = 0, 1, 2... \quad \wedge \quad \lambda \in [0; 1] \tag{3}$$

es llamada la iteración de Krasnoselskij.

A continuación se va a presentar el resultado principal que es un teorema de punto fijo donde $X = (X, \|.\|_P)$ será un cono espacio de Banach, P un cono normal con constante normal K y T una aplicación definida en si misma en un subconjunto C de X. Además utilizamos la iteración de Krasnoselskij para el caso particular de $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Teorema 5.2 *Sea* C *un subconjunto cerrado y convexo de un cono espacio de Banach* E *con la norma* $\|x\|_P = d(x, 0)$ *y* $T : C \to C$ *una aplicación que satisface la condición*

$$0 \leq s + |a| - 2b < 2(a + b) \tag{4}$$

$$ad(Tx, Ty) + b(d(x, Tx) + d(y, Ty)) \leq sd(x, y) \tag{5}$$

Para todo $x, y \in C$*. Entonces,* T *tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Sea $x_0 \in C$ arbitrario. Tal que

$$x_1 = \frac{x_0 + Tx_0}{2},\ x_2 = \frac{x_1 + Tx_1}{2},\ x_3 = \frac{x_2 + Tx_2}{2}, \dots,\ x_n = \frac{x_n + Tx_n}{2}, \dots$$

Entonces la sucesión $\{x_n\}$ esta definida como

$$x_{n+1} = \frac{x_n + Tx_n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{6}$$

Notemos que

$$x_n - Tx_n = 2\left(\frac{2x_n - x_n - Tx_n}{2}\right) = 2\left(x_n - \left(\frac{x_n + Tx_n}{2}\right)\right) = 2\left(x_n - x_{n+1}\right) \tag{7}$$

de (7) obtenemos lo siguiente

$$d\left(x_n, Tx_n\right) = \left\|x_n - Tx_n\right\|_P = 2\left\|x_n - x_{n+1}\right\|_P = 2d\left(x_n, x_{n+1}\right) \quad , n = 0, 1, 2, 3 \tag{8}$$

Ademas

$$d\left(x_n, Tx_{n-1}\right) = \left\|x_n - Tx_{n-1}\right\|_P = \frac{1}{2}\left\|x_{n-1} - Tx_{n-1}\right\|_P = \frac{1}{2}d\left(x_{n-1}, Tx_{n-1}\right) \tag{9}$$

Por lo tanto, la desigualdad triangular implica

$$\begin{aligned} d\left(x_n, Tx_n\right) &\leq d\left(x_n, Tx_{n-1}\right) + d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) \\ d\left(x_n, Tx_n\right) - d\left(x_n, Tx_{n-1}\right) &\leq d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Entonces por (9) y (8) obtenemos que

$$\begin{aligned} 2d\left(x_n, x_{n+1}\right) - \frac{1}{2}d\left(x_{n-1}, Tx_{n-1}\right) &\leq d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) \\ 2d\left(x_n, x_{n+1}\right) - d\left(x_{n-1}, x_n\right) &\leq d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Afirmación:
Para todo a, b, s que satisface (4) se cumple que

$$2ad\left(x_n, x_{n+1}\right) - |a|d\left(x_{n-1}, x_n\right) + 2b(d\left(x_{n-1}, x_n\right) + d\left(x_n, x_{n+1}\right)) \leq sd\left(x_{n-1}, x_n\right) \tag{12}$$

De (8) tenemos que

$$d\left(x_{n-1}, Tx_{n-1}\right) = 2d\left(x_{n-1}, x_n\right), \qquad d\left(x_n, Tx_n\right) = 2d\left(x_n, x_{n+1}\right) \tag{13}$$

- Para el caso $a \geq 0$.
  Reemplazamos $x = x_{n-1}$ y $y = x_n$ en (5) obtenemos

  $$ad\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) + b\left(d\left(x_{n-1}, Tx_{n-1}\right) + d\left(x_n, Tx_n\right)\right) \leq sd\left(x_{n-1}, x_n\right) \tag{14}$$

  Luego de (13) y (11) tenemos que

  $$2ad\left(x_n, x_{n+1}\right) - ad\left(x_{n-1}, x_n\right) + 2b(d\left(x_{n-1}, x_n\right) + d\left(x_n, x_{n+1}\right)) \leq sd\left(x_{n-1}, x_n\right) \tag{15}$$

  lo cual es equivalente a (12), pues $|a| = a$.

- Para el caso $a < 0$. Consideramos la desigualdad triangular para x_n, Tx_n, Tx_{n-1}

$$d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq d(x_n, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1}) \tag{16}$$

entonces

$$a(d(x_n, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})) \leq ad(Tx_{n-1}, Tx_n) \tag{17}$$

Reemplazamos $x = x_{n-1}$ y $y = x_n$ en (5) obtenemos

$$ad(Tx_{n-1}, Tx_n) + b(d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n)) \leq sd(x_{n-1}, x_n) \tag{18}$$

Luego de (13), (17) y (9) conseguimos que

$$2ad(x_n, x_{n+1}) + ad(x_{n-1}, x_n) + 2b(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})) \leq sd(x_{n-1}, x_n) \tag{19}$$

lo cual es equivalente a (12), pues $|a| = -a$.

La afirmación queda probada por (15) y (19).
Por (12), obtenemos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \tag{20}$$

donde $k = \dfrac{|a| - 2b + s}{2(a+b)} < 1$ (pues $0 \leq s + |a| - 2b < 2(a+b)$). Por el lema (3.13) se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en C y convergente para algún $z \in C$.
De la desigualdad triangular y de (8)

$$\begin{aligned} d(z, Tx_n) &\leq d(z, x_n) + d(x_n, Tx_n) \\ &= d(z, x_n) + 2d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned} \tag{21}$$

Si $n \to \infty$ tenemos que $d(z, Tx_n) \to 0$. Luego por el lema 3.12 obtenemos que

$$Tx_n \to z \tag{22}$$

Sustituyendo $x = z$ y $y = x_n$ en (5)

$$ad(Tz, Tx_n) + b(d(z, Tz) + d(x_n, Tx_n)) \leq sd(z, x_n) \tag{23}$$

Por lo tanto, cuando $n \to \infty$ y por el lema 3.12, obtenemos

$$ad(Tz, z) + bd(z, Tz) \leq 0 \tag{24}$$

lo cual es equivalente a

$$Tz = z \text{ con } a + b > 0.$$

■

6. Conclusión

1. En los teoremas de punto fijo vistos en el capitulo 2 tomamos el caso particular de iteración de Krasnoselskij para $\lambda = \frac{1}{2}$, si tomamos el caso de $\lambda = 1$ no se podrían obtener las ecuaciones (8), (9) las cuales son fundamentales para la lograr nuestro objetivo.

2. Al investigar algunos teoremas de un punto fijo para un cono espacio de Banach concluimos que la propiedad de la normalidad del cono es fundamental para lograr la existencia del punto fijo.

3. Para una investigación futura se estudiara el problema planteado considerando la iteración de Krasnoselskij para el caso general cuando $\lambda \in \langle 0; 1\rangle$.

Referencias bibliográficas

[1] Huang, L. G. and Zhang, X. (2007). "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings". Journal of mathematical Analysis and Applications, 332(2), 1468-1476.

[2] Rezapour, S., and Hamlbarani, R. (2008). "Some notes on the paper ?Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings". Journal of Mathematical Analysis and Applications, 345(2), 719-724.

[3] Sahin, I., and Telci, M. (2009). "Fixed points of contractive mappings on complete cone metric spaces". Hacettepe Journal of Mathematics and statistics, 38(1), 59-67.

[4] Abdeljawad, T., Turkoglu, D., and Abuloha, M. (2010). "Some theorems and examples of cone Banach spaces". J. Comput. Anal. Appl, 12(4), 739-753.

[5] Rhoades, B. E. (1977). "A comparison of various definitions of contractive mappings". Transactions of the American Mathematical Society, 226, 257-290.

[6] Suzuki, T. (2008). "Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings". Journal of Mathematical Analysis and Applications, 340(2), 1088-1095.

[7] Turkoglu, D., and Abuloha, M. (2010). "Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mappings". Acta mathematica sinica, English series, 26(3), 489-496.

[8] Abdeljawad, T., and Karapinar, E. (2009). "Quasicone metric spaces and generalizations of Caristi Kirk's theorem". Fixed Point Theory and Applications, 2009, 1-9.

[9] V. Berinde, "Iterative Approximation of Fixed Points", second ed., in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 1912, Springer, Berlin, 2007.