

Tipos no genérico de bifurcaciones en sistemas dinámicos discretos unidimensionales

*Renato Mario Benazic Tomé*¹

Resumen: En el presente artículo se dan condiciones no genéricas bajo las cuales una familia de funciones reales de variable real, a un parámetro, presentan valores de bifurcación. En particular se presentan dos tipos de tales bifurcaciones, la s que hemos denominado de Tipo I y de Tipo II que serían, respectivamente, los análogos discretos de las bifurcaciones transcriticals y horquillas que se pesentan en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Palabras clave: Sistemas Dinámicos discretos. Dinámica unidimensional. Ecuaciones en diferencias unidimensionales. Bifurcaciones.

Non-generic types of bifurcations in one-dimensional discrete dynamical systems

Abstract: In this paper we give non-generic conditions under which a one parameter-family of real functions of real variable, exhibit bifurcation values. In particular, two types of such bifurcations are presented, Type I and Type II, which would be, respectively, the discrete analogues of the transcritical and pitchfork, bifurcations found in ordinary differential equations.

Keywords: Discrete dynamical systems. One-dimensional dynamics. One-dimensional difference equations. Bifurcations.

Recibido 30/09/2022

Aceptado 27/03/2023

Publicado online 30/06/2023

1. Introducción

Consideremos el sistema dinámico discreto con parámetros y condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_{k+1} &= f_\lambda(x_k) \\ x_0 &= c \end{cases}$$

donde $f_\lambda : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una familia de funciones continuamente diferenciables definidas en el abierto U , $\lambda \in \mathbb{R}^m$ es un parámetro y $c \in \mathbb{R}^n$ es la condición inicial del sistema. Una gran cantidad de problemas en distintas áreas, tales como física, mecánica, ingeniería, economía, dinámica de poblaciones, etc; pueden ser modelados por el sistema presentado.

Un tópico relevante en la teoría es estudiar el efecto de los parámetros λ en la dinámica del sistema. Intuitivamente podemos inferir que si cambiamos poco los parámetros λ , entonces las soluciones de los sistemas dinámicos correspondientes “cambian poco” o “tienen dinámica semejante”. Sin embargo existen algunos valores muy especiales de los parámetros, donde esto no ocurre. En este caso decimos que el sistema dinámico discreto presenta una *bifurcación*. Si bien es cierto que en el presente trabajo estamos interesados en sistemas dinámicos discretos (ecuaciones en diferencias), la teoría de bifurcación también se presenta en ecuaciones diferenciales ordinarias (sistemas dinámicos continuos) y en los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

Detectar los valores de bifurcación es muy importante tanto desde el punto de vista teórico como en las aplicaciones. Por ejemplo en [9] y [10], los autores aplican la teoría de bifurcaciones al estudio de la estabilidad de reactores nucleares del tipo termohidráulicos. Por otro lado en [13] los autores usan las bifurcaciones que surgen de un modelo matemático que representa la dinámica de la actividad eléctrica de una neurona sensible al dolor, con el objetivo de controlar esta sensación. Como tercer ejemplo, en [8] los autores comprueban experimentalmente el resultado predicho por un modelo matemático que aseguraba la presencia de bifurcaciones en los marcapasos neuronales, lo cual tiene relevancia en la neurociencia puesto que ayuda a comprender como el sistema nervioso codifica y transmite la información. Finalmente en [1] y [3] se dan algunas aplicaciones de la dinámica discreta y la teoría de bifurcaciones a la economía.

El presente trabajo está organizado de la manera siguiente: En la sección 2 consideramos una familia de sistemas dinámicos discretos unidimensionales a un parámetro y nos proponemos estudiar las condiciones bajo las cuales se presentan las bifurcaciones, para ello definimos algunos conceptos dinámicos relevantes tales como punto fijo, punto fijo hiperbólico y sus tipos de estabilidad, también se enuncian los principales resultados sobre la clasificación de los puntos fijos. En la sección 3 se define la bifurcación tipo silla-nodo y se presenta el teorema que establece las condiciones suficientes para que ocurra este tipo de bifurcación, en particular se enfatiza sobre dos condiciones genéricas dadas por el teorema, una que es la no anulación de la segunda derivada de f_λ con respecto a la variable espacial y la otra sobre la no anulación de la derivada de f_λ con respecto al parámetro λ . En la sección 4 se explora las consecuencias de suponer que la segunda derivada de f_λ con respecto a la variable espacial se anule pero manteniendo la no anulación de derivada de f_λ con respecto al parámetro λ . Finalmente, en la sección 5 se consideran familias de sistemas dinámicos unidimensionales en las que se anulan la segunda derivada con respecto a la variable espacial y también la derivada con respecto al parámetro llegándose a demostrar que aparecen dos nuevos tipos de bifurcaciones a las que llamamos de tipo I y de tipo II, siendo este el resultado principal del trabajo. Finalmente observamos que ambos tipos de bifurcaciones pueden considerarse como los análogos discretos de las bifurcaciones transcíticas y horquilla que aparecen en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. Algunos resultados previos

Tal como hemos visto en la introducción, el concepto de *bifurcación* surge al estudiar la dinámica de una familia de funciones reales de variable real a un parámetro. Para definirlo de manera más precisa, necesitamos algunas nociones previas.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ sobre I , lo cual denotaremos $f \in C^\infty(I)$. Decimos que $x_0 \in I$ es un *punto fijo* de F si y solo si $f(x_0) = x_0$. Uno de los principales objetivos de los sistemas dinámicos es analizar el comportamiento f en una vecindad de un punto fijo.

Definición 2.1 Sea x_0 un punto fijo de f

1. Decimos que x_0 es *estable* si y solo si $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - x_0| < \delta$ implica $|f^n(x) - x_0| < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.
2. Decimos que x_0 es *inestable* si y solo si x_0 no es estable.
3. Decimos que x_0 es *atractor* si y solo si existe $\eta > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - x_0| < \eta$ implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$.
4. Decimos que x_0 es *asintóticamente estable* si y solo si x_0 es atractor y es estable.
5. Decimos que $x_0 \in I$ es *hiperbólico* si y solo si $|f'(x_0)| \neq 1$.

La dinámica local de f alrededor de un punto fijo hiperbólico es bastante simple, debido al siguiente resultado cuya demostración puede verse en [6]

Teorema 2.1 Sea x_0 un punto fijo de f se cumple

1. Si $|f'(x_0)| < 1$ entonces x_0 es asintóticamente estable.
2. Si $|f'(x_0)| > 1$ entonces x_0 es inestable.

Cuando x_0 es punto fijo no hiperbólico, la dinámica local de f a su alrededor es bastante más complicada, debido a la presencia de la semiestabilidad.

Definición 2.2 Sea x_0 un punto fijo de f

1. Decimos que x_0 es *semiestable por la derecha* si y solo si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 < x < x_0 + \delta$ entonces $f^n(x) - x_0 < \epsilon$. Si además se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ entonces decimos que x_0 es *semi-asintóticamente estable por la derecha*.
2. Decimos que x_0 es *semiestable por la izquierda* si y solo si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 - \delta < x < x_0$ entonces $f^n(x) - x_0 > -\epsilon$. Si además se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ entonces decimos que p^* es *semi-asintóticamente estable por la izquierda*.

Tenemos el siguiente resultado (ver [7])

Teorema 2.2 Sea x_0 un punto fijo de f se cumple

1. Si $f'(x_0) = 1$, $f''(x_0) = \dots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0$ pero $f^{(2k)}(x_0) \neq 0$, tenemos dos subcasos
 - a) Si $f^{(2k)}(x_0) > 0$ entonces x_0 es semi-asintóticamente estable por la izquierda.
 - b) Si $f^{(2k)}(x_0) < 0$ entonces x_0 es semi-asintóticamente estable por la derecha.

2. Si $f'(x_0) = 1$, $f''(x_0) = \dots = f^{(2k)}(x_0) = 0$ pero $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, tenemos dos subcasos
- Si $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$ entonces x_0 es asintóticamente estable.
 - Si $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ entonces x_0 es inestable.

Debemos mencionar que, cuando $f'(x_0) = -1$, también se presentan comportamientos locales no triviales y para su análisis se requiere el concepto de derivada schwarziana, el lector interesado en obtener más detalles puede consultar [6].

3. Bifurcación tipo silla-nodo

Ahora consideremos la familia de funciones $f_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que $\{f_\lambda\}$ es una familia a un parámetro λ . Definimos la función $f : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{R}$, mediante $f(\lambda, x) = f_\lambda(x)$. Por simplicidad vamos siempre a suponer que f es de clase C^∞ sobre el producto cartesiano $\Lambda \times I$, lo que denotaremos por $f \in C^\infty(\Lambda \times I)$.

El estudio dinámico de la familia logística $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ con $1 < \lambda < 4$ (ver [5]) así como de otros ejemplos muestran que existen valores del parámetro λ en donde el comportamiento dinámico de f_λ cambia radicalmente.

Definición 3.1 La familia a un parámetro f_λ tiene una *bifurcación tipo silla-nodo* (o *tangente*) en λ_0 si y solo si existen $J \subseteq I$ intervalo abierto y $\epsilon > 0$ tales que

- Si $\lambda_0 - \epsilon < \lambda < \lambda_0$ entonces f_λ no tiene puntos fijos en J .
- Si $\lambda = \lambda_0$ entonces f_{λ_0} tiene un único punto fijo no hiperbólico en J , el cual es semi-asintóticamente estable.
- Si $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$ entonces f_λ tiene dos puntos fijos hiperbólicos $\{p_{1,\lambda}, p_{2,\lambda}\}$ en J uno de ellos asintóticamente estable y el otro inestable.

Observación: También se puede definir la bifurcación tipo silla-nodo si invertimos la orientación de las desigualdades.

El siguiente teorema, cuya demostración puede verse en [5], nos da condiciones bien simples para garantizar la existencia de bifurcaciones tipo silla-nodo.

Teorema 3.1 (Bifurcación tipo silla-nodo) Sea $f_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$ familia a un parámetro con $\lambda_0 \in \Lambda$. Si para un $x_0 \in I$ se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

$$f_{\lambda_0}(x_0) = x_0, \quad f'_{\lambda_0}(x_0) = 1, \quad f''_{\lambda_0}(x_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) \neq 0$$

Entonces la familia f_λ presenta una bifurcación tipo silla-nodo en x_0 para el parámetro λ_0 .

Debemos observar que debido a las dos últimas condiciones del teorema anterior, decimos que la bifurcación tipo silla nodo es *genérica*, además, las condiciones dos primeras condiciones aseguran que ella se presentan para aquellos valores del parámetro λ_0 en donde la función f_{λ_0} tiene un punto fijo no hiperbólico x_0 .

A manera de ejemplo, consideremos la familia a un parámetro $f_\lambda(x) = \lambda x + x^3$, con $\lambda > -1$ y $x \in \mathbb{R}$. Vamos a determinar los valores del parámetro λ para los cuales la familia dada presenta una bifurcación tipo silla nodo. De acuerdo a lo observado, debemos buscar para que λ , la función f_λ presenta puntos fijos x tales que $f'_\lambda(x) = 1$ es decir, debemos resolver el sistema

$$\lambda x + x^3 = x \quad \text{y} \quad \lambda + 3x^2 = 1$$

Un fácil cálculo muestra que la única solución viene dada cuando $x_0 = 0$ y $\lambda_0 = 1$, pero como $f_1''(0) = 0$ y $\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}(0) = 0$, concluimos que la familia $f_\lambda(x) = \lambda x + x^3$ no satisface las condiciones 3 y 4 del Teorema 3.1 y por tanto no podemos asegurar la presencia de la bifurcación tipo silla-nodo.

El ejemplo anterior nos motiva a analizar lo que ocurre en el caso no genérico, es decir cuando $f_{\lambda_0}''(x_0) = 0$ o $\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) = 0$, siendo x_0 un punto fijo e f_{λ_0} tal que $f_{\lambda_0}'(x_0) = 1$.

4. Condiciones no genéricas

En esta sección vamos a considerar una familia a un parámetro $f_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$ para la cual existen $x_0 \in I$ y $\lambda_0 \in \Lambda$ con $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$, $f_{\lambda_0}'(x_0) = 1$, tales que

- $f_{\lambda_0}''(x_0) = f_{\lambda_0}'''(x_0) = \dots = f_{\lambda_0}^{(N-1)}(x_0) = 0$ y $f_{\lambda_0}^{(N)}(x_0) \neq 0$, para algún entero $N > 2$.
- $\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) \neq 0$

Con el objetivo de identificar la existencia de bifurcaciones, vamos a considerar la función $G : I \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x \quad (1)$$

Observe que x es punto fijo de f_λ si y solo si $G(x, \lambda) = 0$. De las hipótesis impuestas a la familia f_λ se sigue que $G \in C^\infty(I \times \Lambda)$. Como

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}(x)$$

se sigue que $\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0) = \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) \neq 0$. Por el Teorema de la función inversa (ver [12]), existen $s, r > 0$ tales que los intervalos abiertos $I_s(x_0) =]x_0 - s, x_0 + s[$, $I_r(\lambda_0) =]\lambda_0 - r, \lambda_0 + r[$ están contenidos en I y Λ respectivamente, y existe una función $g : I_s(x_0) \rightarrow I_r(\lambda_0)$ de clase C^∞ tal que $g(x_0) = \lambda_0$, $G(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I_s(x_0)$ y

$$\text{Graf}(g) = G^{-1}(0) \cap [I_s(x_0) \times I_r(\lambda_0)] \quad (2)$$

donde $\text{Graf}(g) = \{(x, g(x)); x \in I_s(x_0)\}$ es el gráfico de la función g . Observe que de (2) se tiene que x es punto fijo de la función $f_{g(x)}$ y por tanto, la curva suave $\lambda = g(x)$ corresponde a los valores del parámetro λ para los cuales f_λ tiene como punto fijo al x y por esta razón es importante analizar la forma del gráfico de g .

Como $G(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I_s(x_0)$, por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x))g'(x) = 0 \quad (3)$$

evaluando en x_0 y despejando se llega a

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0)}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0)} = -\frac{f_{\lambda_0}'(x_0) - 1}{\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0)} = 0$$

y por tanto x_0 es un punto crítico de la función g . Para determinar si x_0 es máximo local, mínimo local o silla, necesitamos analizar las derivadas de orden superior.

Lema 4.1 Para $k \geq 2$ existen $k - 1$ funciones $A_{k-1,1}, \dots, A_{k-1,k-1}$ de clase C^∞ en el intervalo $I_s(x_0)$ tales que

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x))g^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1,j}(x)g^{(j)}(x) - f_{g(x)}^{(k)}(x), \quad \forall x \in I_s(x_0)$$

Prueba. Por inducción sobre k . Para $k = 2$, derivando (3) con respecto a x usando la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x))g'(x) \right] \\ &= \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, g(x)) + \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda \partial x}(x, g(x))g'(x) + \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x)) \right] g'(x) + \frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x))g''(x) \quad (4) \end{aligned}$$

Por otro lado, de (1) se tiene que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \lambda) = f_{g(x)}''(x),$$

por tanto $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, g(x)) = f_{g(x)}''(x)$ y denotando $A_{1,1}(x) = -\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda \partial x}(x, g(x)) + \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x)) \right]$, de (4) se tiene que

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x))g''(x) = A_{1,1}(x)g'(x) - f_{g(x)}''(x)$$

Supongamos que el resultado se cumple para k (hipótesis inductiva), probaremos la fórmula para $k + 1$.

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x))g^{(k)}(x) \right] = \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1,j}(x)g^{(j)}(x) \right] - f_{g(x)}^{(k+1)}(x) \quad (5)$$

El lado izquierdo de (5) es

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x)) \right] g^{(k)}(x) + \frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x))g^{(k+1)}(x)$$

Mientras que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1,j}(x)g^{(j)}(x) \right] &= \sum_{j=1}^{k-1} \left[A'_{k-1,j}(x)g^{(j)}(x) + A_{k-1,j}(x)g^{(j+1)}(x) \right] \\ &= A'_{k-1,1}(x)g'(x) + \sum_{j=2}^{k-1} \left[A'_{k-1,j}(x) + A_{k-1,j+1}(x) \right] g^{(j)}(x) + \\ &\quad A_{k-1,k-1}(x)g^{(k)}(x) \end{aligned}$$

Si definimos $A_{k,1}(x) = A'_{k-1,1}(x)$, $A_{k,j}(x) = A'_{k-1,j}(x) + A_{k-1,j+1}(x)$, ($j = 2, \dots, k - 1$) y

$$A_{k,k}(x) = A_{k-1,k-1}(x) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x)) \right],$$

de (5) tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, g(x))g^{(k+1)}(x) = \sum_{j=1}^k A_{k,j}(x)g^{(j)}(x) - f_{g(x)}^{(k+1)}(x)$$

lo que demuestra el lema. □

Volviendo al análisis de la función g , ya sabemos que $g(x_0) = \lambda_0$ y $g'(x_0) = 0$, usando el Lema 4.1 con $k = 2$, tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0)g''(x_0) = A_{1,1}(x_0)g'(x_0) - f''_{\lambda_0}(x_0) = 0,$$

lo cual implica que $g''(x_0) = 0$.

Como $f''_{\lambda_0}(x_0) = f'''_{\lambda_0}(x_0) = \dots = f^{(N-1)}_{\lambda_0}(x_0) = 0$, procediendo de manera similar, se tiene que

$$g''(x_0) = g'''(x_0) = \dots = g^{(N-1)}(x_0) = 0$$

Finalmente, usando nuevamente el Lema 4.1 para $k = N$, tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0)g^{(N)}(x_0) = \sum_{j=1}^{N-1} A_{N-1,j}(x_0)g^{(j)}(x_0) - f^{(N)}_{\lambda_0}(x_0)$$

por tanto

$$g^{(N)}(x_0) = -\frac{f^{(N)}_{\lambda_0}(x_0)}{\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0)} \neq 0. \tag{6}$$

Usando el criterio de las derivadas de orden superior (ver [2]), tenemos tres casos

Caso 1. N par y $f^{(N)}_{\lambda_0}(x_0) \cdot \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) > 0$ (es decir, tienen el mismo signo).

De (6) se tiene

$$g^{(N)}(x_0) = -\frac{f^{(N)}_{\lambda_0}(x_0)}{\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0)} < 0,$$

por tanto x_0 es un máximo de g en $I_s(x_0)$ y portanto, si $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + r$ entonces la recta horizontal $y = \lambda$ no intersecta al gráfico de g y por tanto f no tiene puntos fijos, pero si $\lambda_0 - r < \lambda < \lambda_0$ entonces la recta horizontal $y = \lambda$ intersecta al gráfico de g en dos puntos $p_{1,\lambda}$ y $p_{2,\lambda}$ los cuales son los dos únicos puntos fijos de f_λ . Podemos escribir

$$x_0 - s < p_{1,\lambda} < x_0 < p_{2,\lambda} < x_0 + s$$

Más aún, de (3) tenemos

$$f'_{g(x)}(x) = 1 - \frac{\partial f_{g(x)}}{\partial \lambda}(x)g'(x) \tag{7}$$

además como $\frac{\partial f_{g(x_0)}}{\partial \lambda}(x_0) \neq 0$, reduciendo el tamaño de $s > 0$ de ser necesario, podemos suponer que la derivada parcial $\frac{\partial f_{g(x)}}{\partial \lambda}(x) \neq 0$ para $x \in I_s(x_0)$. Para fijar ideas, si tomamos la derivada parcial anterior negativa y teniendo en cuenta que $g(x) > 0$ si $x < x_0$ y $g(x) < 0$ si $x > x_0$, entonces de (7) se desprende que $f'_\lambda(p_{1,\lambda}) < 1$ y $f'_\lambda(p_{2,\lambda}) > 1$, luego los dos puntos fijos de f_λ son hiperbólicos, $p_{1,\lambda}$ asintóticamente estable y $p_{2,\lambda}$ inestable.

Caso 2. N par y $f^{(N)}_{\lambda_0}(x_0) \cdot \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) < 0$ (es decir, tienen signos contrarios). Es similar al Caso 1 solo que ahora no f_λ no tiene puntos fijos si $\lambda_0 - r < \lambda < \lambda_0$ y tiene dos puntos fijos hiperbólicos, uno atractor y el otro repulsor, si $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + r$.

Caso 3. N impar. En este caso x_0 no es ni máximo ni mínimo (punto de inflexión) de g y por tanto g es creciente o decreciente en $I_s(x_0)$. Luego, cualquier recta horizontal $y = \lambda$ intersecta al

gráfico de g en un único punto el cual es el punto fijo de f_λ . Más aún suponiendo, como el Caso 1, que $\frac{\partial f_{g(x)}}{\partial \lambda}(x) > 0$ y si g es creciente (resp. decreciente) entonces $g'(x) > 0$ (resp. $g'(x) < 0$) y de (7) se concluye que $f'_{g(x)}(x) < 1$ (resp. > 1) y por tanto el único punto fijo es asintóticamente estable (resp. inestable). Y por tanto no tenemos bifurcación. El siguiente teorema resume los resultados obtenidos.

Teorema 4.1 Sea $f_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ familia a un parámetro, donde $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$ y $\lambda_0 \in \Lambda$. Si para un $x_0 \in I$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$
2. $f'_{\lambda_0}(x_0) = 1$
3. $f''_{\lambda_0}(x_0) = f'''_{\lambda_0}(x_0) = \dots = f^{(N-1)}_{\lambda_0}(x_0) = 0$ y $f^{(N)}_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$, para algún entero $N > 2$.
4. $\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) \neq 0$

Entonces si N es par, la familia f_λ presenta una bifurcación tipo silla-nodo en el punto x_0 para el parámetro λ_0 , pero si N es impar, la familia no presenta bifurcación.

5. Bifurcaciones no genéricas del tipo 1 y 2

Ahora vamos a considerar una familia a un parámetro $f_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$ para la cual existen $x_0 \in I$ y $\lambda_0 \in \Lambda$ con $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$, $f'_{\lambda_0}(x_0) = 1$, tales que

- $f''_{\lambda_0}(x_0) = f'''_{\lambda_0}(x_0) = \dots = f^{(N-1)}_{\lambda_0}(x_0) = 0$ y $f^{(N)}_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$, para algún entero $N > 2$.
- $\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) = 0$ y $\frac{\partial f'_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) \neq 0$

Se debe observar que con λ representa a los parámetro, la condición $\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) = 0$ implica que

$$\frac{\partial^k f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^k}(x_0) = 0, \quad \forall k \geq 2 \quad (8)$$

Como en la sección anterior, volvemos a tratar con la función

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x, \quad (9)$$

pero como $\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0) = \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) = 0$, no podemos aplicar el Teorema de la función implícita. Para salvar esta dificultad, analizamos desarrollo de Taylor de G alrededor del punto (x_0, λ_0) .

$$G(x, \lambda) = G(x_0, \lambda_0) + \sum_{k=1}^N P_k(x, \lambda) + R(x, \lambda) \quad (10)$$

donde P_k es el polinomio homogéneo de grado k

$$P_k(x, \lambda) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k G}{\partial x^{k-i} \partial \lambda^i}(x_0, \lambda_0) (x - x_0)^{k-i} (\lambda - \lambda_0)^i \quad (11)$$

y R es el resto de orden N , es decir

$$\lim_{(x,\lambda) \rightarrow (x_0,\lambda_0)} \frac{R(x,\lambda)}{((x-x_0)^2 + (\lambda-\lambda_0)^2)^{N/2}} = 0 \quad (12)$$

De (9), un fácil cálculo muestra que

$$\frac{\partial^k G}{\partial x^{k-i} \partial \lambda^i}(x,\lambda) = \frac{\partial^i f_\lambda^{(k-i)}}{\partial \lambda^i}(x), \quad \forall 0 \leq i \leq k \leq N \quad (13)$$

Como x_0 es punto fijo de $f_{\lambda_0}(x_0)$ tal que $f'_{\lambda_0}(x_0) = 1$, se tiene que

$$G(x_0, \lambda_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = 0 \quad (14)$$

De (13) y las condiciones impuestas sobre f , se tiene

$$\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x_0, \lambda_0) = f_{\lambda_0}^{(k)}(p_0) = 0, \quad (k = 2, \dots, N-1) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^N G}{\partial x^N}(x_0, \lambda_0) = f_{\lambda_0}^{(N)}(p_0) \neq 0 \quad (15)$$

además de (13) y (8)

$$\frac{\partial^i G}{\partial \lambda^i}(x_0, \lambda_0) = \frac{\partial^i f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^i}(x_0) = 0, \quad \forall i \geq 1 \quad (16)$$

De (10), (14), (15) y (16) tenemos

$$\begin{aligned} P_1(x, \lambda) &\equiv 0, \\ P_2(x, \lambda) &= \frac{\partial f'_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0)(x-x_0)(\lambda-\lambda_0), \\ P_k(x, \lambda) &= \frac{(x-x_0)^{k-1}}{k!} \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{\partial^i f_\lambda^{(k-i)}(x_0)}{\partial \lambda^i} (x-x_0)^{k-i-1} (\lambda-\lambda_0)^i, \quad 3 \leq k \leq N-1 \\ P_N(x, \lambda) &= \frac{(x-x_0)^{N-1}}{N!} \left[f_{\lambda_0}^{(N)}(x_0)(x-x_0)^{N-1} + \sum_{i=1}^{N-1} \binom{N}{i} \frac{\partial^i f_\lambda^{(N-i)}(x_0)}{\partial \lambda^i} (x-x_0)^{N-i-1} (\lambda-\lambda_0)^i \right] \end{aligned} \quad (17)$$

luego G puede ser escrito como el producto

$$G(x, \lambda) = (x-x_0)H(x, \lambda) \quad (18)$$

donde

$$H(x, \lambda) = \frac{\partial f'_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0)(\lambda-\lambda_0) + \sum_{k=3}^N \tilde{P}_k(x, \lambda) + \tilde{R}(x, \lambda) \quad (19)$$

y

$$\tilde{P}_k(x, \lambda) = \frac{P_k(x, \lambda)}{(x-x_0)}, \quad \tilde{R}(x, \lambda) = \frac{R(x, \lambda)}{(x-x_0)}$$

Observe que \tilde{P}_k es un polinomio homogéneo de dos variables de grado $k-1$.

Se tiene que $H(x_0, \lambda_0) = 0$, $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0) = \frac{\partial f'_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, existen $s, r > 0$ tales que los intervalos abiertos $I_s(x_0) =]x_0 - s, x_0 + s[$, $I_r(\lambda_0) =$

$]\lambda_0-r, \lambda_0+r[$ están contenidos en I y Λ respectivamente, y existe una función $h : I_s(x_0) \rightarrow I_r(\lambda_0)$ de clase C^∞ tal que $h(x_0) = \lambda_0$, $H(x, h(x)) = 0$, $\forall x \in I_s(x_0)$ y

$$\text{Graf}(h) = H^{-1}(0) \cap [I_s(x_0) \times I_r(\lambda_0)] \quad (20)$$

De (18) y (20) se concluye que la curva de los puntos fijos tiene dos ramas suaves: la recta vertical $x = x_0$ y la gráfica $\lambda = h(x)$ y que ambas ramas se intersectan en (x_0, λ_0) . Por tanto, para estudiar los puntos fijos que aparecen en el nivel λ , necesitamos estudiar la gráfica de h . En primer lugar, de (20) tenemos

$$H(x, h(x)) = 0, \quad \forall x \in I_r(x_0),$$

derivando con respecto a x , por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, h(x))h'(x) = 0,$$

evaluando en x_0 y teniendo en cuenta que, por (19), $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = 0$ se tiene que $h'(x_0) = 0$ y por tanto x_0 es un punto crítico de h . Para clasificarlo, vamos a hallar las derivadas de orden superior. Aplicando el Lema 4.1 a la función H , para $k \geq 2$ tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, h(x))h^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{k-1} A_{k-1,j}(x)h^{(j)}(x) - \frac{1}{k+1}f_{h(x)}^{(k+1)}(x), \quad \forall x \in I_s(x_0); \quad (21)$$

donde $A_{k-1,1}, \dots, A_{k-1,k-1}$ son funciones de clase C^∞ en el intervalo $I_s(x_0)$. Si $k = 2$, de (21) tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0)h''(x_0) = A_{1,1}(x_0)h'(x_0) - \frac{1}{3}f_{\lambda_0}'''(x_0) = 0$$

Por tanto $h''(x_0) = 0$. Procediendo por inducción, supongamos que $h^{(j)}(x_0) = 0$, con $2 \leq j \leq N-2$, usando (21) para $k = N-2$ y evaluando en x_0 tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0)h^{(N-1)}(x_0) = \sum_{j=1}^{N-2} A_{N-2,j}(x_0)h^{(j)}(x_0) - \frac{1}{N}f_{\lambda_0}^{(N)}(x_0) = -\frac{1}{N}f_{\lambda_0}^{(N)}(x_0)$$

Por las condiciones impuestas sobre f , se llega a que

$$h^{(N-1)}(x_0) = -\frac{1}{N} \cdot \frac{f_{\lambda_0}^{(N)}(x_0)}{\frac{\partial f_{\lambda_0}'}{\partial \lambda}(x_0)} \neq 0 \quad (22)$$

De esta manera $h'(x_0) = \dots = h^{(N-2)}(x_0) = 0$ y $h^{(N-1)}(x_0) \neq 0$. Para usar el criterio de la derivada de orden superior, debemos considerar dos casos.

Caso 1: N par. Luego $N-1$ es impar y por tanto x_0 es punto de inflexión (ni máximo ni mínimo).

Más aún, dependiendo de los signos de $f_{\lambda_0}^{(N)}(x_0)$ y $\frac{\partial f_{\lambda_0}'}{\partial \lambda}(x_0)$, se presentan cuatro subcasos. Para

fijar ideas, vamos a trabajar con el subcaso $f_{\lambda_0}^{(N)}(x_0) < 0$ y $\frac{\partial f_{\lambda_0}'}{\partial \lambda}(x_0) > 0$.

En primer lugar observamos que, de acuerdo al Teorema 2.2, x_0 es punto fijo semi-asintóticamente estable por la derecha de f_{λ_0} .

Usando (22) se concluye que $h^{(N-1)}(x_0) > 0$, por otro lado, de (19) se tiene que

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0) = \frac{\partial f_{\lambda_0}'}{\partial \lambda}(x_0) > 0$$

Por tanto, reduciendo $r > 0$ y $s > 0$ de ser necesario, podemos suponer que

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, \lambda) > 0, \quad \forall (x, \lambda) \in I_r(x_0) \times I_s(\lambda_0) \quad (23)$$

Afirmación: Existe $\delta > 0$ tal que $h'(x) > 0$, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$. En efecto, considerando el desarrollo de Taylor de orden $N - 2$ para h' alrededor de x_0 tenemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sum_{j=0}^{N-3} \frac{1}{j!} h^{(j+1)}(x_0)(x - x_0)^j + \frac{1}{(N-2)!} h^{(N-1)}(x_0)(x - x_0)^{N-2} + r(x - x_0) \\ &= \left[\frac{1}{(N-2)!} h^{(N-1)}(x_0) + \frac{r(x - x_0)}{(x - x_0)^{N-1}} \right] (x - x_0)^{N-2} \end{aligned} \quad (24)$$

Como $r(x - x_0)$ es un resto de orden $N - 2$, se desprende que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x - x_0)}{(x - x_0)^{N-2}} = 0$, luego existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{r(x - x_0)}{(x - x_0)^{N-2}} \right| < \frac{1}{(N-2)!} h^{(N-1)}(x_0)$$

Se sigue que

$$\frac{1}{(N-2)!} h^{(N-1)}(x_0) + \frac{r(x - x_0)}{(x - x_0)^{N-2}} > 0$$

y como N es par multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por $(x - x_0)^{N-2}$ y de (24) se llega a que $h'(x) > 0$, lo cual prueba la afirmación.

Si reducimos el radio del intervalo centrado en x_0 , de la afirmación anterior se colige que h es creciente en $I_r(x_0)$. En particular, usando (23) se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, h(x)) = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, h(x))h'(x) < 0, \quad \forall x \in I_r(x_0) \quad (25)$$

De esta manera, para cualquier parámetro $\lambda_1 \in I_s(\lambda_0) - \{\lambda_0\}$, la función f_{λ_1} tiene dos puntos fijos: x_1 y x_0 , donde $h(x_1) = \lambda_1$. Para clasificar estos puntos fijos, de (9) y (18) observamos que

$$f_{\lambda}(x) = x + (x - x_0)H(x, \lambda), \quad \forall x \in I_r(x_0), \forall \lambda \in I_s(\lambda_0)$$

Derivando la igualdad anterior y evaluando en $x = x_1$ y $\lambda = \lambda_1$ llegamos a

$$f'_{\lambda_1}(x_1) = 1 + (x_1 - x_0) \frac{\partial H}{\partial x}(x_1, \lambda_1) \quad (26)$$

y si evaluamos en $x = x_0$ y $\lambda = \lambda_1$, obtenemos

$$f'_{\lambda_1}(x_0) = 1 + H(x_0, \lambda_1) \quad (27)$$

Existen dos posibilidades de elegir el parámetro λ_1

- a) Si $\lambda_0 - s < \lambda_1 < \lambda_0$. Como h es estrictamente creciente, entonces es inversible y su inversa h^{-1} también es creciente, luego

$$x_1 = h^{-1}(\lambda_1) < h^{-1}(\lambda_0) = x_0$$

De lo anterior y de (25) se tiene que

$$(x_1 - x_0) \frac{\partial H}{\partial x}(x_1, \lambda_1) > 0$$

y usando esta desigualdad en (26) se llega a que $f'_{\lambda_1}(x_1) > 1$, luego x_1 es punto fijo hiperbólico de f_{λ_1} , del tipo repulsor local (y por tanto inestable).

Por otro lado, si definimos $\phi(\lambda) = H(x_0, \lambda)$ entonces $\phi'(\lambda) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} H(x_0, \lambda)$.

Usando (23) deducimos que ϕ es creciente y como $\lambda_1 < \lambda_0$ entonces $\phi(\lambda_1) < \phi(\lambda_0) = 0$ y de (27) concluimos que $f'_{\lambda_1}(x_0) < 1$, por tanto x_0 es punto fijo hiperbólico de f_{λ_1} , asintóticamente estable (atractor local).

- b) Si $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_0 + s$ entonces se procede de manera completamente análoga al caso a) y se concluye que x_1 es punto fijo hiperbólico asintóticamente estable (atractor local) de f_{λ_1} mientras que x_0 es punto fijo hiperbólico inestable (repulsor local) de f_{λ_1} .

Los resultados obtenidos en este subcaso nos motivan a definir un nuevo tipo de bifurcación.

Definición 5.1 (Bifurcación Tipo I.) La familia a un parámetro f_λ tiene una *bifurcación del Tipo I* en λ_0 si y solo si existen $J \subseteq I$ intervalo abierto, $x_0 \in J$ y $\epsilon > 0$ tales que

1. x_0 es punto fijo de $f_\lambda, \forall \lambda \in]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[$
2. Si $\lambda_0 - \epsilon < \lambda < \lambda_0$ entonces f_λ tiene un segundo punto fijo hiperbólico $x_1 \in J$ el cual es inestable (repulsor local) mientras x_0 es punto fijo hiperbólico asintóticamente estable (atractor local).
3. Si $\lambda = \lambda_0$ entonces x_0 es el único punto fijo no hiperbólico de f_{λ_0} el cual es semi-asintóticamente estable.
4. Si $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$ entonces f_λ vuelve a tener un segundo punto fijo hiperbólico $x_1 \in J$ el cual es estable (atractor local) mientras x_0 es punto fijo hiperbólico inestable (repulsor local).

Observación: En familia de ecuaciones diferenciales también aparece este tipo de bifurcaciones, las cuales son llamadas *transcríticas*.

La Figura 1 muestra, en un sistema de coordenadas λ vs. x , uno de los cuatro casos de bifurcación Tipo I que pueden presentarse, los otros tres se obtienen cambiando la dirección de las flechas (atractores por repulsores) y tomando h^{-1} decreciente en vez de creciente.

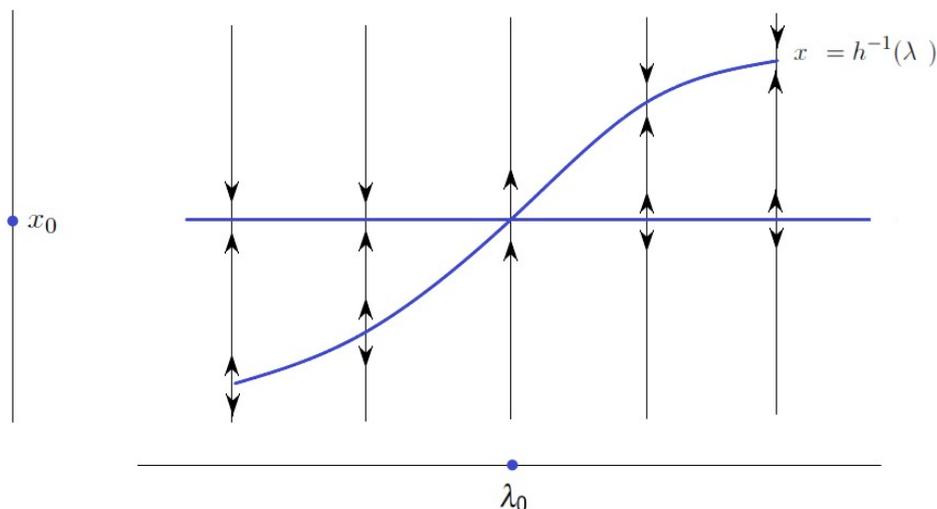


Figura 1. Bifurcación Tipo I

Caso 2: N impar. Luego $N - 1$ es par y para fijar ideas, vamos a suponer que $f_{\lambda_0}^{(N)}(x_0) > 0$ y $\frac{\partial f_{\lambda_0}'}{\partial \lambda}(x_0) > 0$.

Una primera consecuencia de esta suposición es que, por el Teorema 2.2, x_0 es punto fijo inestable de la función f_{λ_0} . Por otro lado, de (22), se tiene que $h^{(N-1)}(x_0) < 0$ y por el criterio de la derivada de orden superior concluimos que x_0 es el máximo local de h . Reduciendo $r > 0$ y $s > 0$, podemos suponer que x_0 es el máximo de h y por tanto h es creciente en el intervalo $]x_0 - r, x_0[$ y decreciente en $]x_0, x_0 + r[$. Como consecuencia de lo anterior, el número de puntos fijos de f_{λ_1} depende de la ubicación del parámetro λ_1 , en efecto, debemos considerar dos subcasos

- a) Si $\lambda_0 - s < \lambda_1 < \lambda_0$ entonces f_{λ_1} tiene tres puntos fijos: q_1, x_0 y q_2 , donde $q_1 < x_0 < q_2$ y $h(q_1) = h(q_2) = \lambda_1$ (ver Figura 2). Vamos a clasificar a los puntos fijos.

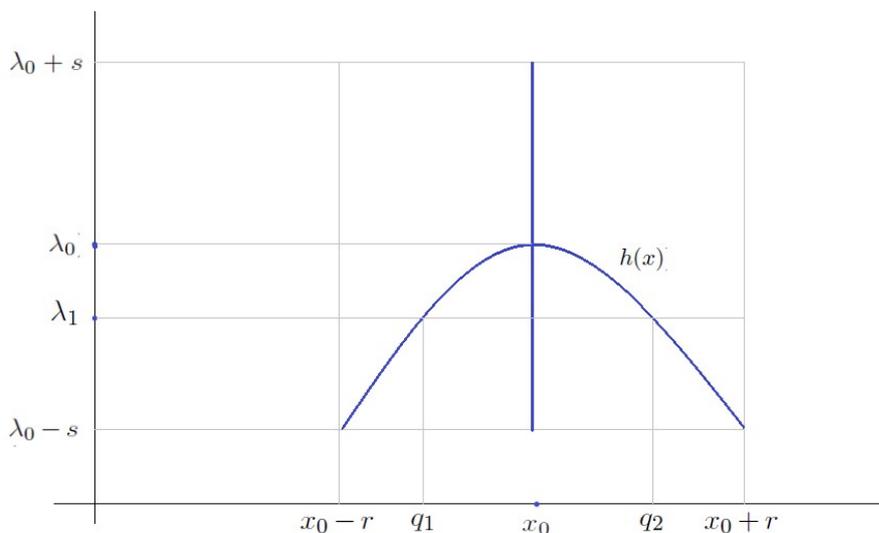


Figura 2.

Sabemos que

$$f_{\lambda}(x) = x + (x - x_0)H(x, \lambda)$$

luego

$$f'_{\lambda}(x) = 1 + H(x, \lambda) + (x - x_0) \frac{\partial H}{\partial x}(x, \lambda)$$

Evaluando la igualdad anterior en (q_1, λ_1) , (x_0, λ_1) y (q_2, λ_1) respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} f'_{\lambda_1}(q_1) &= 1 + (q_1 - x_0) \frac{\partial H}{\partial x}(q_1, \lambda_1) \\ f'_{\lambda_1}(x_0) &= 1 + H(x_0, \lambda_0) \\ f'_{\lambda_1}(q_2) &= 1 + (q_2 - x_0) \frac{\partial H}{\partial x}(q_2, \lambda_1) \end{aligned} \tag{28}$$

De (23) podemos suponer que

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, \lambda) > 0$$

y por (25) tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, h(x)) = - \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, h(x)) h'(x),$$

luego

$$\frac{\partial H}{\partial x}(q_1, \lambda_1) = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}(q_1, \lambda_1)h'(q_1) < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial x}(q_2, \lambda_1) = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}(q_2, \lambda_1)h'(q_2) > 0$$

considerando estos resultados en la primera y tercera ecuación de (28) se tiene que

$$f'_{\lambda}(q_1) > 1 \quad \text{y} \quad f'_{\lambda}(q_2) > 1$$

Por tanto q_1 y q_2 son puntos fijos hiperbólicos de f_{λ_1} ambos inestables (repulsores locales). Por otro lado, si definimos $\phi : I_s(\lambda_0) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi(\lambda) = H(x_0, \lambda)$, entonces $\phi'(\lambda) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x_0, \lambda) > 0$, luego ϕ es creciente y como $\lambda_1 < \lambda_0$ y considerando la segunda ecuación de (28)

$$f'_{\lambda_1}(x_0) = 1 + H(x_0, \lambda_1) = 1 + \phi(\lambda_1) < 1 + \phi(\lambda_0) = 1$$

Se concluye que x_0 también es punto fijo hiperbólico de f_{λ_1} pero asintóticamente estable (atractor).

- b) Si $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_0 + s$ entonces f_{λ_1} tiene como único punto fijo a x_0 y para clasificarlo, seguimos usando la función $\phi(\lambda) = H(x_0, \lambda)$ la cual es creciente. Como $\lambda_0 < \lambda_1$, de la segunda ecuación de (28) se tiene

$$1 = 1 + \phi(\lambda_0) < 1 + \phi(\lambda_1) = 1 + H(x_0, \lambda_1) = f'_{\lambda_1}(x_0)$$

Por tanto x_0 es punto fijo hiperbólico inestable (repulsor) de f_{λ_1} .

Los resultados obtenidos nos motiva a definir un segundo nuevo tipo de bifurcación.

Definición 5.2 (Bifurcación Tipo II.) La familia a un parámetro f_{λ} tiene una *bifurcación del Tipo II* en λ_0 si y solo si existen $J \subseteq I$ intervalo abierto, $x_0 \in J$ y $\epsilon > 0$ tales que

1. x_0 es punto fijo de f_{λ} , $\forall \lambda \in]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[$
2. Si $\lambda_0 - \epsilon < \lambda < \lambda_0$ entonces f_{λ} tiene dos puntos fijos adicionales $q_1, q_2 \in J$ ambos hiperbólicos y ambos repulsores (resp. atractores) mientras que x_0 es punto fijo hiperbólico atractor local (resp, repulsor local).
3. Si $\lambda = \lambda_0$ entonces x_0 es el único punto fijo no hiperbólico de f_{λ_0} el cual no hiperbólico y repulsor local (resp. atractor local).
4. Si $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$ entonces x_0 es el único punto fijo hiperbólico repulsor local (resp. atractor local) de f_{λ} .

Observaciones:

1. También se puede definir la bifurcación Tipo II si invertimos la orientación de las desigualdades.
2. La bifurcación Tipo II también aparece en ecuaciones diferenciales ordinarias en donde se le denomina *bifurcación tipo horquilla*. (ver [11]).

La Figura 3 muestra, en un sistema de coordenadas λ vs. x , uno de los cuatro casos de bifurcación Tipo I que pueden presentarse, los otros tres se obtienen cambiando la dirección de las flechas (atractores por repulsores) y tomando h abriéndose a la derecha.

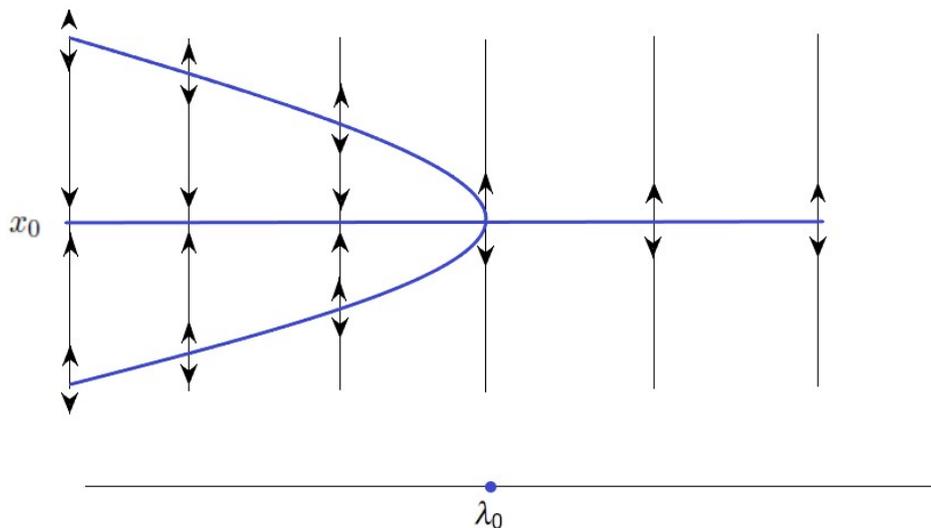


Figura 3. Bifurcación Tipo II

Resumimos los resultados obtenidos en el siguiente teorema

Teorema 5.1 Sea $f_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ familia a un parámetro, donde $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$ y $\lambda_0 \in \Lambda$. Si para un $x_0 \in I$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$
2. $f'_{\lambda_0}(x_0) = 1$
3. $f''_{\lambda_0}(x_0) = f''_{\lambda_0}(x_0) \cdots = f_{\lambda_0}^{(N-1)}(x_0) = 0$ y $f_{\lambda_0}^{(N)}(x_0) \neq 0$
4. $\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) = 0$ y $\frac{\partial f'_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) \neq 0$.

Entonces

- Si N es par, la familia presenta una bifurcación del tipo I.
- Si N es impar, la familia presenta una bifurcación del tipo II.

6. Conclusión

En el presente artículo hemos considerado la familia a un parámetro de ecuaciones en diferencias

$$x_{k+1} = f_\lambda(x_k), \quad (29)$$

y hemos visto que el tipo de bifurcación más frecuente que se presenta es la denominada “silla-nodo”. Ella se caracteriza por la existencia de un parámetro λ_0 (llamado valor de bifurcación) tal que si $\lambda < \lambda_0$ entonces f_λ no tiene puntos fijos, f_{λ_0} tiene un único punto fijo no hiperbólico y si $\lambda > \lambda_0$, entonces f_λ tiene dos puntos hiperbólicos uno atractor y el otro repulsor. El Teorema 3.1 nos da condiciones suficientes para que el sistema a un parámetro (29) presente bifurcación tipo silla-nodo en $\lambda = \lambda_0$, en efecto, estas condiciones son

$$f_{\lambda_0}(x_0) = x_0, \quad f'_{\lambda_0}(x_0) = 1, \quad f''_{\lambda_0}(x_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) \neq 0$$

Las dos primeras condiciones simplemente establecen que x_0 es un punto fijo no hiperbólico de f_{λ_0} . Una pregunta natural es, por tanto es natural preguntarse que ocurre si alguna de las dos últimas condiciones no se cumple.

En la Sección 4 hemos reemplazado la penúltima condición por $f''_{\lambda_0}(x_0) = f'''_{\lambda_0}(x_0) = \dots = f_{\lambda_0}^{(N-1)}(x_0) = 0$ y $f_{\lambda_0}^{(N)}(x_0) \neq 0$, para algún entero $N > 2$; pero hemos mantenido la última condición y se ha demostrado (ver Teorema 4.1) que si N es par, se sigue presentando la bifurcación tipo silla-nodo, pero si N es impar no hay bifurcación, sin embargo se presenta un resultado cualitativo interesante si $\lambda < \lambda_0$ el único punto fijo de f_λ es hiperbólico del tipo atractor (resp. repulsor) y si $\lambda > \lambda_0$ el único punto fijo de f_λ sigue siendo hiperbólico pero ahora del tipo repulsor (resp. atractor).

En la Sección 5 hemos reemplazado las dos últimas condiciones por las siguientes dos:

1. $f''_{\lambda_0}(x_0) = 0, \dots, f_{\lambda_0}^{(N-1)}(x_0) = 0$ y $f_{\lambda_0}^{(N)}(x_0) \neq 0$
2. $\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) = 0$ y $\frac{\partial f'_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(x_0) \neq 0$.

y hemos demostrado que aparecen dos nuevos tipos de bifurcaciones cualitativamente distintas a la silla-nodo. En efecto, en el Teorema 5.1 se demuestra que si N es par entonces la familia presenta una bifurcación que la hemos denominado Tipo I y que es el análogo discreto de la bifurcación transcítica que ocurre en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Pero si N es impar, entonces aparece la bifurcación que hemos denominado Tipo II que puede considerarse el análogo discreto de la bifurcación horquilla (o tridente) que aparecen en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Referencias bibliográficas

- [1] Barnett, W. and Chen, Guo (2015). Bifurcation of macroeconomic models and robustness of dynamical inferences. *Foundations and Trends in Econometrics Vol. 8 Num 1-2*, 1 – 144.
- [2] Bartle, R. y Sherbert, D. (2010). *Introducción al análisis matemático de una variable - Tercera Edición*. Mexico, D.F.: Editorial Limusa, S.A.
- [3] Chatelain, J-B and Ralf, K. (2021). Hopf bifurcation from new-keynesian taylor rule to ramsey optimal policy. *Macroeconomic Dynamics Vol. 25 Num 8*, 2204 – 2236.
- [4] Devaney, R. (2020). *A First Course in Chaotic Dynamical Systems- Theory and Experiment. Second Edition*. United States of America, Florida: Chapman and Hall/CRC.
- [5] Devaney, R. (2021). *An introduction to chaotic dynamical Systems - Third Edition*. United States of America, Florida: Chapman and Hall/CRC.
- [6] Elaydi, S. (2005). *An introduction to Difference Equations - Third edition*. United States of America, NY: Springer.
- [7] Dannan, F., Elaydi, S. and Ponomarenko, V. (2003). Stability of hyperbolic and nonhyperbolic fixed points of one-dimensional maps *J. Difference Equ. Appl. 9*, 449–457.
- [8] Gu, H., Pan, B., Chen, G. y Duan, L. (2014). Biological experimental demonstration of bifurcations from bursting to spiking predicted by theoretical models. *Nonlinear Dynamics*, 78 (1), 391-407.
- [9] Hennig, D. et al. (2019). Principles for the application of bifurcation theory for the systematic analysis of nuclear reactor stability, Part 1: Theory *Progress in Nuclear Energy 115*, 231-249.
- [10] Hennig, D. et al. (2019). Principles for the application of bifurcation theory for the systematic analysis of nuclear reactor stability, Part 2: Application *Progress in Nuclear Energy 113*, 263-280.
- [11] Hirsch, M. - Smale, S. - Devaney, R. (2013) *Differential equations, Dynamical Systems, and an introduction to chaos*. United States of America, California: Elsevier Inc.
- [12] Lima, E. (2020). *Curso de Análise Vol. 2. - 12⁰ Edição*. Brasil, Rio de Janeiro: Projeto Euclides.
- [13] Verma, P. , Kienle, A. , Flockerzi, D. and Ramkrishna, D. (2020). Using Bifurcation Theory for Exploring Pain *Industrial and Engineering Chemistry Research Vol. 59 Num 6*, 2524 – 2535.