

Conectividad algebraica máxima para caminos con resistencia total fija

*Alonso Cruz Ortega*¹ y *Federico Menéndez Conde Lara*²

Resumen: Se considera el problema de encontrar los pesos en las aristas de un grafo que maximizan la conectividad algebraica, bajo la restricción de que la resistencia total del grafo sea igual a una constante dada. Se da la solución del problema para los caminos P_3 y P_4 . Se propone la conjetura de que en general la solución está dada por una distribución de pesos invariante bajo automorfismos del grafo.

Palabras clave: conectividad algebraica, teoría espectral de gráficas, resistencia efectiva, optimización de eigenvalores

Maximal algebraic connectivity for paths with fixed total resistance

Abstract: We consider the problem on finding the edge weights that maximize the algebraic connectivity of a graph, subject to the condition that the total resistance remains constant. For the paths P_3 y P_4 the solution to the problem is given. It is conjectured that for general graphs the solution is given for weights distributions that are invariant under graph automorphisms.

Keywords: algebraic connectivity, spectral graph theory, effective resistance, eigenvalue optimization

Recibido: 04/07/2023. *Aceptado:* 10/10/2023. *Publicado online:* 30/12/2023.

¹UAEH, Área Académica de Matemáticas y Física. e-mail: fenixcru.alonso@gmail.com

²UAEH, Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Área Académica de Matemáticas y Física. e-mail: fmclara@uaeh.edu.mx

1. Introducción

En este trabajo estudiamos la relación entre dos cantidades asociadas a un grafo con pesos: la conectividad algebraica y la resistencia total. Estas dos cantidades constituyen formas distintas de medir qué tan conectados entre sí están los vértices del grafo. En particular, nos interesa encontrar la distribución de pesos óptima que maximiza una de las dos cantidades cuando la otra permanece fija. Encontramos la respuesta a esta cuestión para los ejemplos específicos de caminos con tres y cuatro vértices, y proponemos algunas conjeturas para caminos en general.

En 1973 M. Fiedler acuñó el término *conectividad algebraica* para referirse al segundo menor eigenvalor del laplaciano de un grafo [Fiedler, 1973]. En ese artículo y numerosos trabajos subsecuentes se han mostrado notables relaciones entre ese eigenvalor y la idea geométrica de conectividad del grafo. Para los vectores asociados a la conectividad algebraica, Fiedler usó el término *valuaciones características* del grafo. En la literatura es común referirse a la conectividad algebraica y a las valuaciones características como *valores Fiedler* y *vectores Fiedler*, de manera respectiva. Estos objetos matemáticos han sido objeto de un gran interés desde entonces, tanto desde el punto de vista teórico como por numerosas aplicaciones que han surgido en situaciones diversas. Referimos a las reseñas [Abreu, 2007, Mohar, 1992] para un panorama histórico del estudio de la conectividad algebraica. Entre las aplicaciones podemos mencionar por ejemplo en su uso en sistemas computacionales: el agrupamiento espectral en análisis de datos [Blum et al., 2020, Pavia and Steinerberger, 2021], la segmentación de imágenes [Shi and Malik, 2000], los procesos paralelos [Simon, 1991], así como también trabajos en evolución biológica [Nikoloski et al., 2010], en neurociencias [Buldú and Porter, 2017], y en transporte aéreo [Wei et al., 2014]. En general, los valores y vectores Fiedler resultan de interés siempre que haya una red de nodos interconectados para los que se quiera entender la robustez de su conectividad desde un punto de vista global.

Un poco después de haber introducido la noción de conectividad algebraica, el mismo M. Fiedler extendió la definición para incluir grafos con pesos [Fiedler, 1975], y en [Fiedler, 1990] definió la *conectividad absoluta de un grafo* como el máximo valor que puede tomar la conectividad algebraica de un grafo bajo la restricción de que la suma de los pesos de sus aristas permanezca constante. De manera más precisa, la conectividad algebraica absoluta \hat{a} de un grafo G está dada por

$$\hat{a}(G) = \max \left\{ \lambda_2(G; \omega) \mid \sum \omega_{i,j} = \#E \right\}, \quad (1)$$

donde λ_2 es la conectividad algebraica del grafo con pesos $(G; \omega)$, $\omega_{i,j}$ es el peso en la arista $\{v_i, v_j\}$ y $\#E$ es la cantidad de aristas del grafo. En esa misma referencia, se resuelve el problema de encontrar la conectividad algebraica absoluta para árboles (grafos sin ciclos), y se encuentran los pesos para los que se alcanza el máximo. También, Fiedler demostró que la distribución de pesos para los que se alcanza $\hat{a}(G) = \lambda_2(G; \omega)$ son invariantes bajo automorfismos para todo grafo. Como una consecuencia específica, la conectividad absoluta algebraica de un ciclo es igual a la conectividad algebraica del ciclo sin pesos.

Calcular la conectividad algebraica absoluta corresponde a maximizar el segundo eigenvalor del laplaciano del grafo, bajo la condición de que la suma de los pesos sea igual al número de aristas. Esto es lo mismo que pedir que

$$\lambda_2(G; \omega) + \cdots + \lambda_n(G; \omega) = \lambda_2(G) + \cdots + \lambda_n(G)$$

puesto que la traza del laplaciano de un grafo (con o sin pesos) es igual a la suma de los grados de sus vértices, lo que a su vez es igual al doble de la suma de los pesos de las aristas. Esto es, encontrar la conectividad algebraica absoluta equivale a maximizar el eigenvalor λ_2 sujeto a la condición de que la suma de todos los eigenvalores permanezca constante. En este trabajo

consideramos el problema análogo de maximizar λ_2 para gráficas conexas, bajo la condición de que lo que permanezca constante sea la suma de los recíprocos de sus eigenvalores positivos

$$\frac{1}{\lambda_2(G; \omega)} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n(G; \omega)} = \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}.$$

Esta cantidad, conocida como el *índice de Kirchhoff*, es igual a la traza de la pseudo-inversa de Moore - Penrose del laplaciano del grafo. En [Klein and Randić, 1993], Klein y Randić probaron que el índice de Kirchhoff y la *resistencia total* del grafo están relacionadas por la identidad

$$R(G) = n \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j}, \tag{2}$$

donde n es el número de vértices. De este modo, nuestro problema de interés consiste en optimizar la conectividad algebraica λ_2 , manteniendo la resistencia total constante. La resistencia total de un grafo conexo se define como la suma de las distancias entre los vértices del grafo, con respecto a una métrica conocida como la *métrica de resistencia efectiva*. Esta métrica se originó en el estudio de circuitos eléctricos [Doyle and Snell, 1984], y tiene la peculiaridad de que se reduce al agregar aristas o aumentar pesos en ellas. Esto es, la distancia se reduce al agregar aristas o aumentar pesos, por lo que resulta un a métrica natural en situaciones en las que más conectividad debiera significar menor distancia. En vista de ello, esta métrica se ha estudiado en situaciones diversas como estructuras moleculares [Babić et al., 2002], diseño de rutas aéreas [Yang et al., 2019], geometría discreta [Devriendt and Lambiotte, 2022], agrupamiento de redes [Alev et al., 2018], entre otros. La extensión de la métrica de resistencia efectiva a conjuntos infinitos juega un papel importante en la construcción de laplacianos en fractales autosimilares [Kigami, 2001, Strichartz, 2006] y en gráficas infinitas [Jorgensen and Pearse, 2010]. En [Ghosh et al., 2008] se consideró el problema de minimizar la resistencia total sujeta a la condición de que la suma de los pesos del grafo permanezca constante.

En este trabajo planteamos la cuestión de maximizar la conectividad algebraica de un grafo sin modificar su resistencia total. Los resultados principales, referentes a caminos, están contenidos en la sección 5. En la sección 2 introducimos la notación y los conceptos básicos que usamos en el resto del trabajo. En la sección 3 presentamos algunos resultados fundamentales sobre valores y vectores Fiedler, y en la sección 4.1 damos la definición y algunas propiedades de la métrica de resistencia efectiva.

2. Preliminares

En esta sección presentamos las definiciones básicas y la notación que usaremos en el resto del artículo.

Un *grafo* G está formado por un conjunto de vértices $V = (v_1, \dots, v_n)$ que siempre consideraremos ordenados, junto con un conjunto de parejas no ordenadas de vértices (las *aristas* del grafo). Al conjunto de aristas lo denotamos por E . En las aristas del grafo pueden asignarse pesos mediante una función $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, donde escribimos $\omega_{i,j} = \omega(\{v_i, v_j\})$. La pareja $(G; \omega)$ es un *grafo con pesos*. Por *grafo sin pesos* nos referiremos al caso cuando $\omega_{i,j} = 1$ para toda arista. Denotamos por P_n al *camino* de n vértices, es decir el grafo con vértices (v_1, \dots, v_n) y aristas $\{\{v_i, v_{i+1}\}\}_{i=1}^{n-1}$. Enfatizamos que los vértices de P_n siempre los ordenamos de modo que van de un extremo al otro por vértices conectados. A los pesos de P_n los denotamos por $c_i = \omega_{i,i+1}$, como se ilustra en la figura 1. También usaremos la notación $r_i = 1/c_i$, lo que corresponde a las distancias entre los vértices consecutivos v_i y v_{i+1} respecto a la métrica de resistencia (ver sección 4).



Figura 1: El camino P_n con pesos.

Denotamos por $\ell(V)$ al espacio de funciones definidas en los vértices V y valores reales. Para $x \in \ell(V)$ escribimos $x = (x_1, \dots, x_n)$ donde $x_j = x(v_j)$. En $\ell(V)$ consideramos el producto interno usual $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Escribimos $x \perp y$ para expresar que los vectores x y y son ortogonales respecto a ese producto interno.

El *laplaciano* de un grafo con pesos $(G; \omega)$ es el operador en $\ell(V)$ dado por

$$(L_{G,\omega}x)_j = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} \omega_{i,j}(x_i - x_j).$$

De manera equivalente, el laplaciano es el operador auto-adjunto determinado por la forma cuadrática

$$\langle L_{G,\omega}x, x \rangle = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} \omega_{i,j}(x_i - x_j)^2.$$

Cuando sea claro del contexto cuál es el grafo en cuestión, lo omitiremos del subíndice escribiendo L_ω en vez de $L_{G,\omega}$. Si omitimos ω en el subíndice nos estaremos refiriendo al grafo sin pesos.

Para todo grafo con pesos, el laplaciano es un operador singular, no-negativo definido. El vector constante $J = (1, 1, \dots, 1)$ es siempre elemento del kernel. Denotamos a los eigenvalores del operador $L_{G,\omega}$ por $0 = \lambda_1(G; \omega) \leq \lambda_2(G; \omega) \leq \dots \leq \lambda_n(G; \omega)$, omitiendo la dependencia de G y ω cuando no sea necesario especificarlos.

La pseudo-inversa de Moore–Penrose de L_ω que denotamos por L_ω^+ está definida por la condición de que $L_\omega^+ L_\omega = L_\omega L_\omega^+$ sea la proyección ortogonal sobre $(\text{Ker } L_\omega)^\perp$, que en el caso de grafos conexos es igual a J^\perp .

3. La conectividad algebraica

Por el teorema de Courant-Fischer-Weyl la conectividad algebraica es igual a

$$\lambda_2(G; \omega) = \min_{x \perp J} \frac{\langle L_{G,\omega} x, x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

El cociente del lado derecho es el *cociente de Rayleigh* de $L_{G,\omega}$ evaluado en el vector x . Hechos bien conocidos que se siguen de eso son que $\lambda_2 > 0$ si y solo si el grafo es conexo, y que λ_2 no puede decrecer si se agregan aristas o si se aumentan pesos.

Se conocen algunas condiciones que deben cumplir los dominios nodales de los eigenvectores del laplaciano (esto es, subgrafos conexos en los que el eigenvector no cambia de signo) e.g. [Fiedler, 1975, Kirkland and Fallat, 1998]. Para el caso particular de vectores Fiedler en caminos P_n con pesos se tiene la siguiente condición:

Proposición 3.1. *Si u es un vector Fiedler de $(P_n; \omega)$, entonces u es monótono (creciente o decreciente).*

La siguiente proposición describe los vectores Fiedler para caminos con un número par de vértices y distribución simétrica de sus pesos y nos será muy útil para maximizar la conectividad algebraica de P_4 .

Proposición 3.2. *Supongamos que en $(P_n; \omega)$ los pesos $\{c_1, \dots, c_{n-1}\}$ son simétricos, en el sentido de que $c_i = c_{n-i}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Si $u = (x_1, \dots, x_n)$ es un vector Fiedler para $(P_n; \omega)$ entonces*

$$x_j + x_{n+1-j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Demostración. Sea L_ω el laplaciano para $(P_n; \omega)$, y x un vector Fiedler. Definimos un nuevo vector $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$, donde $x'_j = x_{n+1-j}$.

Adoptando la convención $c_0 = c_n = 0$ se tiene para todo $j = 1, 2, \dots, n$ que

$$\begin{aligned} (L_\omega x')_j &= c_{j-1}(x'_j - x'_{j-1}) + c_j(x'_j - x'_{j+1}) \\ &= c_{n-j+1}(x_{n-j+1} - x_{n-j+2}) + c_{n-j}(x_{n-j+1} - x_{n-1}) \\ &= (Lx)_{n-j+1} \\ &= \lambda_2 x_{n+1-j} \\ &= \lambda_2 x'_j. \end{aligned}$$

De este modo, se observa que x' es eigenvector para λ_2 . Como la matriz laplaciana del camino es una matriz tri-diagonal simétrica, sus eigenvalores son simples. Se sigue que la multiplicidad de la conectividad algebraica es 1 y por lo tanto x' y x son vectores linealmente dependientes. Pongamos que $x' = \alpha x$. Esto implica que $x_{n+1-j} = \alpha x_j$, y como las entradas del vector x no pueden tener signo constante, necesariamente $\alpha < 0$. Al ser x eigenvector no constante de L_ω se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + \dots + x_n \\ &= (1 + \alpha) \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} x_j. \end{aligned}$$

Pero las entradas x_j en la suma tienen todas el mismo signo, por lo que se concluye necesariamente que $\alpha = -1$ de donde se sigue el resultado enunciado. □

De las proposiciones 3.1 y 3.2 se sigue que los vectores Fiedler de $(P_n; \omega)$ son antisimétricos respecto a la arista central, son monótonos crecientes o decrecientes y no se anulan en ningún vértice.

4. La métrica de resistencia efectiva

Sea $(G; \omega)$ un grafo conexo con pesos cualquiera y sea $U \subset V$ un subconjunto de sus vértices. Dado $x \in \ell(U)$ existe un único vector $\tilde{x} \in \ell(V)$ que coincide con x en U para el que $L_\omega v$ se anula para todo $v \in V \setminus U$. Al vector \tilde{x} se le conoce como la *extensión armónica* de x .

Definición 4.1. *Dados v_i y v_j vértices distintos en $(G; \omega)$ y $U = \{v_i, v_j\}$, sea $h \in \ell(V)$ la extensión armónica de la función $h \in \ell(U)$ dada por $h_i = 1$, $h_j = 0$. Definimos*

$$r(v_i, v_j) = (L_\omega h)_i^{-1} = \langle L_\omega h, h \rangle^{-1}.$$

A $r(v_i, v_j)$ se le conoce como la *métrica de resistencia efectiva* entre el par de vértices

Puede verificarse que $r(\cdot, \cdot)$ define en efecto una métrica (e.g. [Kigami, 2001]), desde luego adoptando la convención de que $r(v_i, v_j) = 0$ cuando $i = j$. Existen diversas formulaciones equivalentes para esta métrica, una de las cuales está dada en términos de la pseudo-inversa. En concreto, la resistencia efectiva puede escribirse como la forma cuadrática

$$r(v_i, v_j) = \langle L_\omega^+(\chi_i - \chi_j), \chi_i - \chi_j \rangle \tag{3}$$

donde χ_k es la función indicadora del vértice v_k .

Definición 4.2. *La resistencia total de un grafo con pesos es la suma de las distancias, respecto a la métrica de resistencia efectiva, sobre todas las parejas de vértices del grafo. Esto es*

$$R(G; \omega) = \sum_{\{v_i, v_j\}} r(v_i, v_j).$$

Enfatizamos que en la definición anterior la suma se toma sobre todas las parejas de vértices del grafo, y no solo entre parejas de vértices conectados.

Usando la relación (3), en [Klein and Randic, 1993] se demostró la igualdad

$$R(G; \omega) = n \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j(G; \omega)}.$$

Notemos que la suma en el lado derecho de la igualdad, el *índice de Kirchhoff*, es la traza de la pseudo-inversa L_ω^+ .

El siguiente resultado fundamental es bien conocido (ver e.g. [Doyle and Snell, 1984]) y nos permite calcular la resistencia total de los caminos P_n de forma directa y simple. Incluimos la prueba con fines de autoreferencia en la exposición.

Teorema 4.3. *Sea G un grafo formado por dos subgrafos Γ_1 y Γ_2 que tienen un único vértice en común v . Supongamos además que ningún vértice en $\Gamma_1 \setminus \{v\}$ comparte arista con ningún vértice de $\Gamma_2 \setminus \{v\}$. Si w_j es un vértice en Γ_j para $j = 1, 2$, entonces*

$$r(w_1, w_2) = \rho_1 + \rho_2,$$

donde ρ_j es la distancia dada por la métrica de resistencia efectiva en Γ_j entre los vértices w_j y v .

Demostración. Para $j = 1, 2$, sea φ_j armónica en $G \setminus \{w_j, v\}$, y con $\varphi_j(w_j) = 1$ y $\varphi_j(v) = 0$. Notemos que φ_1 se anula en Γ_2 y φ_2 se anula en Γ_1 . También se tiene, de la definición 4.1, que

$$\rho_j = (L\varphi_j)(w_j)^{-1}.$$

Buscamos una función ψ de la forma

$$\psi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2,$$

con α_j constantes, que sea armónica fuera de $\{w_1, w_2\}$. Para ello, basta que sea armónica en v , y notando que

$$\begin{aligned} (L\psi)(v) &= \alpha_1(L\varphi_1)(v) + \alpha_2(L\varphi_2)(v) \\ &= -\frac{\alpha_1}{\rho_1} - \frac{\alpha_2}{\rho_2} \end{aligned}$$

podemos tomar

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\rho_2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\rho_1}.$$

Observando que $\psi(w_j) = \alpha_j$, se sigue que la función φ definida por

$$\varphi = \frac{\psi - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

es la extensión armónica en G de la función $\varphi(w_1) = 1$ y $\varphi(w_2) = 0$.

De lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} (L\varphi)(w_1) &= \frac{(L\psi)(w_1)}{\alpha_1 - \alpha_2} \\ &= \frac{\alpha_1(L\varphi_1)(w_1) + \alpha_2(L\varphi_2)(w_1)}{\alpha_1 - \alpha_2} \\ &= \frac{\alpha_1(L\varphi_1)(w_1)}{\alpha_1 - \alpha_2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo por las resistencias respectivas, tenemos que

$$\frac{1}{r(w_1, w_2)} = \frac{\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}}$$

de donde se concluye que $r(w_1, w_2) = \rho_1 + \rho_2$, como se quería demostrar. □

Corolario 4.4. *Sea $(P_n; \omega)$ un camino con pesos $\{c_1, \dots, c_{n-1}\}$, y sean v_i y v_j dos vértices de P_n , con $i < j$. La distancia entre v_i y v_j es igual a la suma de las distancias entre vértices adyacentes. En concreto*

$$r(v_i, v_j) = \sum_{k=i}^{j-1} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=i}^{j-1} r_k.$$

Demostración. Inmediato del teorema 4.3, por inducción sobre n . □

5. Conectividad algebraica en caminos

De manera similar a (1), definimos

$$\check{\alpha}(G) = \max \{ \lambda_2(G; \omega) \mid R(G; \omega) = R(G) \}. \quad (4)$$

Proponemos la conjetura de que, como sucede para la conectividad algebraica absoluta, el máximo en (4) se alcanza siempre para distribuciones de pesos que son invariantes bajo automorfismos de la gráfica. Abajo calculamos este máximo para dos ejemplos, los caminos P_3 y P_4 , mostrando que en esos casos se cumple lo propuesto. El cálculo del primero de esos caminos resulta considerablemente más sencillo que el segundo, y no parece en general plausible encontrar de manera explícita el valor de $\check{\alpha}(P_n)$ para n en general.

De la definición de resistencia efectiva, se sigue que $r(v_i, v_j)$ es inversamente proporcional a multiplicación de todos los pesos del grafo por una constante. Se tiene entonces que en general

$$R(G; c\omega) = \frac{1}{c}R(G; \omega).$$

Por lo tanto, para toda gráfica con pesos $(G; \omega)$ se tiene que el producto $\lambda(G; c\omega)R(G; \omega)$ no depende de c . El problema de determinar $\check{\alpha}$ es entonces equivalente a maximizar dicho producto.

El resultado para P_3 está dado a continuación.

Teorema 5.1. *Consideramos $(P_3; \omega)$ con pesos $\{c_1, c_2\}$ que satisfacen la igualdad*

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 2.$$

Entonces

$$\lambda_2(P_3; \omega) \leq \lambda_2(P_3),$$

con igualdad si y solamente si $c_1 = c_2 = 1$. Esto es

$$\check{\alpha}(P_3) = \lambda_2(P_3) = 1.$$

Demostración. Sea $u = (1 + t, 1 - t, -2)$ un eigenvector para el laplaciano L_ω con eigenvalor λ . De las igualdades $(L_\omega u)_1 = 2c_1t$ y $(L_\omega u)_3 = c_2(t - 3)$ se sigue que

$$\lambda = \frac{2c_1t}{1+t} = \frac{c_2(3-t)}{2}. \quad (5)$$

Usando la notación $b = c_2/c_1$, escribimos la segunda igualdad como la ecuación cuadrática

$$bt^2 + (4 - 2b)t - 3b,$$

cuyas soluciones están dadas por

$$t_\pm = \frac{b - 2 \pm 2\sqrt{b^2 - b + 1}}{b} \quad (6)$$

y sustituyendo en (5) se tiene que los dos eigenvalores positivos de L_ω están dados por

$$\lambda_\pm = \frac{c_2(3 - t_\pm)}{2}, \quad (7)$$

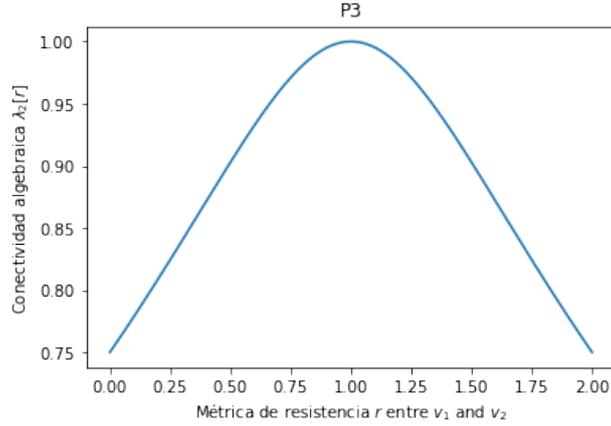


Figura 2: Conectividad algebraica para P_3 con resistencia total $r_1 + r_2 = 2$.

de donde es claro que el eigenvector para la conectividad algebraica $\lambda_2(P_3; \omega)$ corresponde a la elección de signo t_+ en (6).

Sea $r > 0$ la distancia entre los vértices v_1 y v_2 , es decir $r = r_1 = 1/c_1$ y también $b = r/(2-r)$. Como r determina de forma única los pesos del grafo, tenemos que la conectividad algebraica λ_2 es función de r , lo que denotamos por $\lambda_2[r]$. Queremos mostrar que $\lambda_2[r]$ alcanza su máximo cuando $r = 1$, que corresponde al grafo sin pesos. Sustituyendo la expresión para el signo $+$ de (6) en (7), y escribiendo todo en términos de r se obtiene, tras simplificar la expresión

$$\begin{aligned} \lambda_2[r] &= \frac{2 - \sqrt{3r^2 - 6r + 4}}{r(2 - r)} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3r^2 - 6r + 4}}{r(2 - r)} \cdot \frac{2 + \sqrt{3r^2 - 6r + 4}}{2 + \sqrt{3r^2 - 6r + 4}} \\ &= \frac{3}{2 + \sqrt{3r^2 - 6r + 4}}. \end{aligned}$$

Como la parábola $3r^2 - 6r + 4$ alcanza su mínimo cuando $r = 1$, se concluye que $\lambda_2[r]$ alcanza su (único) máximo para dicho valor. Esto se ilustra en la figura 2 \square

NOTA: observamos que el mayor eigenvalor de $(P_3; \omega)$ corresponde a elegir la raíz t_- en (6), de donde procediendo como arriba se obtiene:

$$\lambda_3[r] = \frac{3}{2 - \sqrt{3r^2 - 6r + 4}}.$$

pudiendo verificar en este caso la identidad 2 al tener

$$\frac{1}{\lambda_2[r]} + \frac{1}{\lambda_3[r]} = \frac{4}{3}.$$

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema 5.1, por lo observado arriba.

Corolario 5.2. *Para toda elección de pesos ω en P_3 se tiene que*

$$R(P_3; \omega) \lambda_2(P_3; \omega) \leq 4,$$

con igualdad si y solamente si los pesos son constantes.

Para resolver el problema de encontrar $\check{\alpha}$ para el camino P_4 primero vamos a mostrar que la distribución óptima de pesos debe ser simétrica. En particular, probaremos que la conectividad algebraica aumenta al sustituir ambos pesos en los extremos por su media armónica.

Lema 5.3. *Sean $\{c_1, c_2, c_3\}$ los pesos en las aristas de $(P_4; \omega)$ y sea d la media armónica de c_1 y c_3 . Si $\{d, c_2, d\}$ son los pesos en las aristas de $(P_4; \omega')$ entonces se tiene que*

$$\lambda_2(P_4; \omega) \leq \lambda_2(P_4; \omega').$$

Demostración. En vista de la proposición 3.2, sabemos que existe un vector Fiedler u para $(P_4; \omega')$ de la forma $u = (-1, -a, a, 1)$, para algún $a \in (0, 1)$.

$$\lambda_2(P_4; \omega') = \frac{2d(a-1)^2 + 4c_2a^2}{2(1+a^2)}. \quad (8)$$

Encontraremos un vector ortogonal a J , para el cual se tenga que su cociente de Rayleigh para $(P_4; \omega)$ sea menor que $\lambda_2(P_4; \omega')$. Al ser aquel valor una cota superior para $\lambda_2(P_4; \omega)$, de ello se sigue la desigualdad buscada.

Poniendo

$$v[\alpha] = (-1, -a, a, 1) + \alpha(1, -1, -1, 1)$$

se tiene que el cociente de Rayleigh de L_ω evaluado en $v[\alpha]$ es

$$\frac{\langle L_\omega v[\alpha], v[\alpha] \rangle}{\|v[\alpha]\|^2} = \frac{4\alpha^2(c_1 + c_3) + 4\alpha(1-a)(c_3 - c_1) + (1-a)^2 + (c_1 + c_3) + 4c_2a^2}{2(1+a^2) + 4\alpha^2}. \quad (9)$$

Al ser el denominador en (9) mayor que el denominador en (8) resulta suficiente encontrar un α para el cual el numerador en (9) sea menor o igual que el numerador en (8). Para simplificar las expresiones, ponemos $\alpha = \beta(1-a)$ para algún $\beta \in \mathbb{R}$ por determinar. La desigualdad buscada resulta así equivalente a

$$(1 + 4\beta^2)(c_1 + c_3) + 4\beta(c_3 - c_1) \leq 2d. \quad (10)$$

La media armónica puede escribirse como

$$\begin{aligned} d &= \frac{2}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3}} = \frac{2c_1c_3}{c_1 + c_3} \\ &= \frac{(c_1 + c_3)^2 - (c_1 - c_3)^2}{2(c_1 + c_3)} \\ &= \frac{c_1 + c_3}{2} - \frac{(c_1 - c_3)^2}{2(c_1 + c_3)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (10) se obtiene

$$4\beta^2(c_1 + c_3) + 4\beta(c_3 - c_1) \leq -\frac{(c_1 - c_3)^2}{c_1 + c_3},$$

desigualdad que tiene solución para $\beta \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, si elegimos

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{c_1 - c_3}{c_1 + c_3}$$

se alcanza la igualdad. □

Corolario 5.4. Si $\omega = \{c_1, c_2, c_3\}$ son pesos para una P_4 tales que $\check{a}(P_4) = \lambda_2(P_4; \omega)$ entonces $c_1 = c_3$.

Demostración. Se sigue de inmediato del lema 5.3, al observar que $(P_4; \omega)$ y $(P_4; \omega')$ tienen la misma resistencia total. \square

Ahora, vamos a usar el resultado del lema 5.3 para encontrar $\check{a}(P_4)$. Sabemos que dicho máximo se alcanza cuando los pesos de $(P_4; \omega)$ son de la forma (d, c, d) para algunas constantes c y d que satisfacen la relación

$$\frac{3}{d} + \frac{2}{c} = 5, \tag{11}$$

dada por la condición impuesta por la resistencia total. Tomando el eigenvector $(-1, -t, t, 1)$ para λ_2 , se sigue que

$$\lambda_2 = d(1 - t) = d + 2c - \frac{d}{t}.$$

Definiendo $b = (d + 2c)/d$ con el fin de simplificar las expresiones que resultan a continuación, se obtiene

$$t^2 + (b + 1)t - 1 = 0.$$

De las dos raíces de esa ecuación, la que corresponde al menor eigenvalor λ_2 es

$$t = \frac{1 - b}{2} + \frac{\sqrt{(b - 1)^2 + 4}}{2},$$

puesto que sabemos que $0 < t < 1$ y $b > 1$. La conectividad algebraica está dada entonces por

$$\lambda_2 = d \left(\frac{b + 1}{2} - \frac{\sqrt{(b - 1)^2 + 4}}{2} \right).$$

Poniendo, como se hizo para P_3 , r como la resistencia entre los primeros dos vértices se obtienen de (11) las relaciones $d = 1/r$, $c = 2/(5 - 3r)$ y $b = (r + 5)/(5 - 3r)$. La conectividad algebraica puede entonces escribirse en términos de $r \in (0, 5/3)$. Haciendo las operaciones correspondientes, se obtiene la expresión:

$$\lambda_2[r] = \frac{1}{r(5 - 3r)} \left(5 - r - \sqrt{13r^2 - 30r + 25} \right).$$

el grafo de $\lambda_2[r]$ se ilustra en 3 de donde se aprecia que alcanza su máximo en un único punto. El máximo está dado por

$$\lambda_2[r_0] = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{5}, \quad r_0 = \frac{5}{13} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

De este resultado pueden calcularse de manera directa los pesos para los que el valor Fiedler es igual a $\check{a}(P_4)$.

Hemos mostrado:

Teorema 5.5. Sea $(P_4; \omega_0)$ donde los pesos $\{d_1, d_2, d_3\}$ de ω_0 están dados por

$$d_1 = d_3 = \frac{13\sqrt{3}}{5(\sqrt{3} - 1)}, \quad d_2 = \frac{5}{26} \left(6 - (\sqrt{3} - 1) \right).$$

Si $(P_4; \omega)$ tiene pesos $\{c_1, c_2, c_3\}$ tales que

$$\frac{3}{c_1} + \frac{4}{c_2} + \frac{3}{c_3} = 10.$$

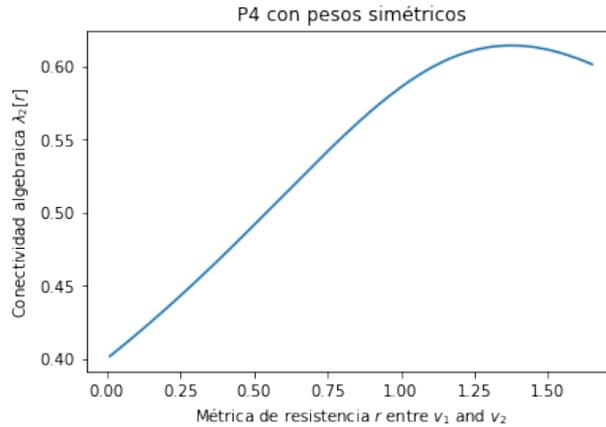


Figura 3: Conectividad algebraica para P_4 con resistencia total 10 y $r_1 = r_3$.

Entonces

$$\lambda_2(P_4; \omega) \leq \lambda_2(P_4; \omega_0) = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{5},$$

con igualdad si y solamente si $\omega = \omega_0$. En particular $\check{a}(P_4) = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{5}$.

Corolario 5.6. El máximo valor del producto $\lambda_2(P_4; \omega)R(P_4; \omega)$ es $10(2 - \frac{4\sqrt{3}}{5})$.

Notamos que el valor de $\check{a}(P_4)$ es irracional. Esto se contrapone al resultado de que la conectividad algebraica absoluta $a(T)$ es racional para todo árbol T [Fiedler, 1990].

6. Conclusión

Habiendo planteado el problema de calcular $\check{a}(G)$, el valor máximo de $\lambda_2(G; \omega)$ con resistencia total fija, y habiendo resuelto el problema para P_3 y P_4 se observa que en ambos casos la solución está dada por una distribución simétrica de pesos. Esta observación motiva la conjetura de que para una gráfica G en general, los pesos para los que $\lambda_2(G; \omega) = \check{a}(G)$ sean invariantes bajo automorfismos de la gráfica.

Referencias bibliográficas

- [Abreu, 2007] Abreu, N. M. (2007). Old and new results on algebraic connectivity of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 423(1):53–73.
- [Alev et al., 2018] Alev, V. L., Anari, N., Lau, L. C., and Gharan, S. O. (2018). Graph Clustering using Effective Resistance. In Karlin, A. R., editor, *9th Innovations in Theoretical Computer Science Conference (ITCS 2018)*, volume 94 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 41:1–41:16, Dagstuhl, Germany. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.
- [Babić et al., 2002] Babić, D., Klein, D., Lukovits, I., Nikolić, S., and Trinajstić, N. (2002). Resistance-distance matrix: A computational algorithm and its application. *Int. J. Quantum Chem.*, 90:166–176.
- [Blum et al., 2020] Blum, A., Hopcroft, J., and Kannan, R. (2020). *Foundations of Data Science*. Cambridge University Press.
- [Buldú and Porter, 2017] Buldú, J. M. and Porter, M. A. (2017). Frequency-based brain networks: From a multiplex framework to a full multilayer description. *Network Neuroscience*, 2(4):418–441.
- [Devriendt and Lambiotte, 2022] Devriendt, K. and Lambiotte, R. (2022). Discrete curvature on graphs from the effective resistance. *J. Phys. Complex.*, 3.
- [Doyle and Snell, 1984] Doyle, P. G. and Snell, D. J. (1984). *Random Walks and Electrical Networks*. Carus Mathematical Monographs. MAA.
- [Fiedler, 1973] Fiedler, M. (1973). Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23:298–305.
- [Fiedler, 1975] Fiedler, M. (1975). A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 25(4):619–633.
- [Fiedler, 1990] Fiedler, M. (1990). Absolute algebraic connectivity of trees. *Linear and Multilinear Algebra*, 26(1-2):85–106.
- [Ghosh et al., 2008] Ghosh, A., Boyd, S., and Saberi, A. (2008). Minimizing effective resistance of a graph. *SIAM Review*, 50(1):37–66.
- [Jorgensen and Pearse, 2010] Jorgensen, P. and Pearse, E. (2010). A Hilbert space approach to effective resistance metric. *Complex Anal. Oper. Theory*, 4:975–1013.
- [Kigami, 2001] Kigami, J. (2001). *Analysis on Fractals*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press.
- [Kirkland and Fallat, 1998] Kirkland, S. and Fallat, S. (1998). Perron components and algebraic connectivity for weighted graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, 44(2):131–148.
- [Klein and Randić, 1993] Klein, D. and Randić, M. (1993). Resistance distance. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12(1):81–95.
- [Mohar, 1992] Mohar, B. (1992). Laplace eigenvalues of graphs—a survey. *Discrete Mathematics*, 109(1):171–183.
- [Nikoloski et al., 2010] Nikoloski, Z., May, P., and Selbig, J. (2010). Algebraic connectivity may explain the evolution of gene regulatory networks. *Journal of Theoretical Biology*, 267(1):7.

- [Pavia and Steinerberger, 2021] Pavia, A. D. and Steinerberger, S. (2021). Spectral clustering revisited: Information hidden in the Fiedler vector. *Foundations of Data Science*, 3(2):225–249.
- [Shi and Malik, 2000] Shi, J. and Malik, J. (2000). Normalized cuts and image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(8):888–905.
- [Simon, 1991] Simon, H. (1991). Partitioning of unstructured problems for parallel processing. *Computing Systems in Engineering*, 2(2):135–148. Parallel Methods on Large-scale Structural Analysis and Physics Applications.
- [Strichartz, 2006] Strichartz, R. S. (2006). *Differential Equations on Fractals: A Tutorial*. Princeton University Press.
- [Wei et al., 2014] Wei, P., Chen, L., and Sun, D. (2014). Algebraic connectivity maximization of an air transportation network: The flight routes’ addition/deletion problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 61:13–27.
- [Yang et al., 2019] Yang, C., Mao, J., Qian, X., and Wei, P. (2019). Designing robust air transportation networks via minimizing total effective resistance. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 20(6):2353–2366.