PESQUIMAT 25(2): 1–15 (2022) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v25i2.24334 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Buen Planteamiento Global de un Modelo no Lineal Tipo Burgers

Luis Milla García [1] ***y Yolanda Santiago Ayala*** [2]

Resumen: Estudiamos el buen planteamiento global del problema de Cauchy no lineal asociado a la ecuación de Burgers unidimensional periódica:

$$\begin{cases} u \in ([0,\infty); H^s_{per}),\ s \geq 1 \\ \partial_t u + u\partial_x u - \eta \partial_x^2 u = 0, \quad t > 0,\ \eta > 0 \\ u(0) = \psi \in H^s_{per}, \end{cases}$$

en los espacios de Sobolev periódicos H^s_{per}. Realizamos esto usando la teoría de Semigrupos, teoría de Fourier en distribuciones periódicas e inmersiones en dichos espacios.
Palabras claves: Ecuación de Burgers no lineal, espacios de Sobolev periódico, regularidad de solución global, teoría de Semigrupos, teoría de Fourier, Teorema del Punto fijo de Banach. Principio de extensión.

Global Well Posedness of a Non-Linear Burgers Type Model

Abstract: We study the well posedness global of the nonlinear Cauchy problem associated with the periodic one-dimensional Burgers equation:

$$\begin{cases} u \in ([0,\infty); H^s_{per}),\ s \geq 1 \\ \partial_t u + u\partial_x u - \eta \partial_x^2 u = 0, \quad t > 0,\ \eta > 0 \\ u(0) = \psi \in H^s_{per}, \end{cases}$$

in the periodic Sobolev spaces H^s_{per}. We do this using Semigroup theory, Fourier theory on periodic distributions and inmersions in such spaces.
Keywords: Nonlinear Burgers equation, periodic Sobolev spaces, regularity of the global solution, Semigroups theory, Fourier theory, Banach's fixed point theorem. Extension principle.

Recibido: 14/04/2022. *Aceptado:* 22/09/2022. *Publicado online:* 30/12/2022.

[1] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: lmillag@unmsm.edu.pe
[2] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: ysantiagoa@unmsm.edu.pe

1. Introducción

En este artículo estudiaremos las soluciones de valores reales del problema de Cauchy asociado a la siguiente ecuación,

$$\begin{cases} u \in ([0,\infty); H^s_{per}),\ s \geq 1 \\ \partial_t u + u\partial_x u - \eta\partial_x^2 u = 0, \quad t > 0,\ \eta > 0 \\ u(0) = \phi \in H^s_{per}, \end{cases} \tag{1}$$

considerando el parámetro $\eta > 0$ la constante de viscosidad, s un número real mayor o igual a 1 y H^s_{per} es el espacio de Sobolev periódico de orden s.
La ecuación de Burgers es una ecuación diferencial parcial que ocurre en varias áreas de la matemática aplicada, como la mecánica de fluidos, la acústica no lineal, la dinámica de gases y el flujo de tráfico.
Para la velocidad en un punto del fluido $u(x,t)$, aceleración $\partial_t u(x,t)$ y coeficiente de difusión o viscosidad cinemática del fluido, η , la forma general de la ecuación de Burgers, también conocida como la ecuación de Burgers viscosa, en una dimensión espacial es dado por el modelo disipativo (1). Cuando el término de difusión viscosa está ausente es decir, cuando $\eta = 0$, la ecuación de Burgers es un prototipo para las ecuaciones de conservación que puede desarrollar discontinuidades, como la onda de choque.
Yolanda en [7] desarrollo el buen planteamiento global de la parte lineal en los espacios de Sobolev periódicos H^s_{per} para todo $s \in \mathbb{R}$. Por esta razón, seguimos las ideas encontradas en los artículos [2,5,7,8] para estudiar el buen planteamiento local y global de (1).
El plan de este artículo es el siguiente: La sección 2 recopila algunos resultados de [7]. En la sección 3 estudiamos el buen planteamiento local del modelo no lineal, asociado a la ecuación (1). La sección 4 esta dedicada al estudio y análisis del planteamiento global de la ecuación (1) en los espacios de Sobolev reales h^s_{per} para $s \geq 1$.

Notaciones:

- PC_{per}: el espacio de las funciones periódicas de periodo 2π.
- $\mathcal{P} = C^\infty_{per}$: la colección de todas las funciones $\xi : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$, que son infinitamente diferenciables y periódicas con periodo 2π.
- $\mathcal{P}'$: el espacio de las distribuciones periódicas de periodo 2π.
- $\widehat{f} = \mathcal{F}f$: es la transformada de Fourier de f, $\mathcal{F}^{-1}$ la transformada inversa de Fourier, donde $\widehat{f}(k) = c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ y $f \in PC_{per}$.
- $\|\cdot\|_s$: la norma en $H^s_{per} = H^s_{per}([-\pi,\pi])$ (el espacio de Sobolev periódico de tipo L^2) , $s \in \mathbb{R}$, $\|f\|_s^2 = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{f}(k)|^2 < \infty$, $f \in \mathcal{P}'$.
- $C(I;X)$: el espacio de las funciones continuas en el intervalo I sobre el espacio de Banach X.
- $B(X,Y)$ el conjunto de los operadores lineales acotados en X sobre Y. Si $X = Y$ denotaremos $B(X) := B(X,X)$ y a la norma en $B(X,Y)$ por $\|\cdot\|_{B(X,Y)}$.

2. La ecuación lineal

En esta sección consideremos el problema de Cauchy asociado a la parte lineal de la ecuación (1), a saber,

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty); H^s_{per}) \\ \partial_t u - \eta \partial_x^2 u = 0 \\ u(0) = \phi \in H^s_{per} \end{cases} \tag{2}$$

para $s \in \mathbb{R}$ y $\eta > 0$.
Aplicando la transformada de Fourier en (2) se obtiene

$$\widehat{u}(t)(k) = e^{-\eta k^2 t}\widehat{\phi}(k),$$

para $t \geq 0$ y $k \in \mathbb{Z}$. Se definen los operadores

$$\begin{aligned} Q_\eta(D)f &= \eta\partial_x^2 f = \left(Q_\eta(k)\widehat{f}(\cdot)\right)^{\vee}, \quad D = \frac{1}{i}\partial_x \\ V_\eta(t)f &= e^{Q_\eta(D)t}f = e^{\eta\partial_x^2 t}f, \end{aligned}$$

donde $f \in \mathcal{P}'$. Entonces (2) puede escribirse como

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty); H^s_{per}), \\ \partial_t u = Q_\eta(D)u \in H^{s-2}_{per} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per} \end{cases} \tag{3}$$

y

$$u_\eta(t) = V_\eta(t)\phi,\ t \in [0,\infty),\ \eta > 0. \tag{4}$$

Teorema 1 *Sea $\eta > 0$ fijo. Entonces $t \in [0,\infty) \to V_\eta(t) \in \mathcal{B}(H^s_{per})$ es un semigrupo de contracción para todo $s \in \mathbb{R}$. El mapeo $\phi \in H^s_{per} \to V_\eta(t)\phi$ es continuo en el siguiente sentido. Para todo $s \in \mathbb{R}$*

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|V_\eta(t)\phi_1 - V_\eta(t)\phi_2\|_s \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_s,$$

Demostración. Ver [7]. Seguidamente veamos el resultado sobre la diferenciabilidad de la solución, siempre en el caso lineal.

Teorema 2 *Sea $\eta > 0$ fijo. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{V_\eta(t+h)\phi - V_\eta(t)\phi}{h} - Q_\eta(D)V_\eta(t)\phi \right\|_{s-2} = 0 \tag{5}$$

uniformemente con respecto a $t \geq 0$.

Demostración. Ver [7]. De todo lo expuesto, obtenemos el buen planteamiento global de (3).

Corolario 1 *El problema (3) tiene buen planteamiento global en H^s_{per}, para todo $s \in \mathbb{R}$. Esto es, para todo $\phi \in H^s_{per}$, (3) posee una única solución $u \in C([0,\infty); H^s_{per})$ que depende continuamente del dato inicial. Además, $u \in C^1([0,\infty); H^{s-2}_{per})$.*

Demostración. Ver [7]. Veamos algunos resultados del semigrupo $\{V_\eta(t)\}$, obtenido de la parte lineal, necesarios para el caso no lineal.

Teorema 3 (Desigualdad de regularización) . *Sea $\phi \in H^s_{per}, s \geq 0, \lambda \geq 0, \eta > 0, t > 0$. Entonces existe $K_\lambda > 0$, que depende solo de λ, tal que*

$$\|V_\eta(t)\phi\|_{s+\lambda} \leq K_\lambda \left[1 + \left(\frac{1}{\eta t}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\right] \|\phi\|_s, \tag{6}$$

para todo $t > 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|V_\eta(t)\phi\|^2_{s+\lambda} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s+\lambda} |e^{Q_\eta(k)t}|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s} (1+k^2)^{\lambda} e^{-2\eta k^2 t} |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\leq \|\phi\|^2_s \left\{ \underset{k\in\mathbb{Z}}{sup} (1+k^2)^\lambda e^{-2\eta t k^2} \right\}, \\
&\leq M_\lambda \|\phi\|^2_s \left\{ \underset{k\in\mathbb{Z}}{sup} (e^{-2\eta k^2 t} + k^{2\lambda} e^{-2\eta t k^2}) \right\} \\
&\leq M_\lambda \|\phi\|^2_s \left\{ 1 + \underset{k\in\mathbb{Z}}{sup}\, k^{2\lambda} e^{-2\eta k^2 t} \right\} \\
&\leq M_\lambda \|\phi\|^2_s \left\{ 1 + \underset{|k|\geq 2}{sup}\, k^{2\lambda} e^{-2\eta k^2 t} \right\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Luego, (6) se obtiene de (7) y de que la función $G(r) = r^{2\lambda} e^{-2\eta t r^2}$, $r > 0$ alcanza su máximo valor en $r = \sqrt{\frac{\lambda}{2\eta t}}$.

Teorema 4 *La función $t \in [\epsilon, \infty) \to V_\eta(t)\phi = e^{\eta \partial_x^2 t}\phi$, $\eta > 0$, es uniformemente continua con respecto a $H^{s+\lambda}_{per}$ para todo λ no negativo y todo $\epsilon > 0$. Esto es, existe una constante $K(\lambda, \epsilon, \eta, 2)$ tal que*

$$\|V_\eta(t)\phi - V_\eta(\tau)\phi\|_{s+\lambda} \leq K|t-\tau| \|\phi\|_s \tag{8}$$

$\forall\, t, \tau \geq \epsilon$. En particular, $V_\eta(\cdot)\phi \in C((0,\infty); \mathcal{P})$.

Demostración. Consideremos, sin perdida de generalidad, que $t \geq \tau \geq \epsilon$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|V_\eta(t)\phi - V_\eta(\tau)\phi\|^2_{s+\lambda} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s+\lambda} \left| e^{-\eta k^2 t} - e^{-\eta k^2 \tau} \right|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s+\lambda} e^{-2\eta k^2 \tau} \left| e^{-\eta k^2 (t-\tau)} - 1 \right|^2 \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2.
\end{aligned}$$

El teorema del valor medio implica que

$$\left| e^{-\eta k^2 (t-\tau)} - 1 \right| \leq |-\eta k^2| |t-\tau|.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&\|V_\eta(t)\phi - V_\eta(\tau)\phi\|_{s+\lambda}^2 \\
&\qquad \le \eta^2|t-\tau|^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s+\lambda} e^{-2\eta k^2\tau}|k^2|^2|\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\qquad \le \eta^2|t-\tau|^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s}(1+k^2)^{\lambda} e^{-2\eta k^2\tau}(1+k^2)^2|\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\qquad \le \eta^2|t-\tau|^2\|\phi\|_s^2 \left\{ \sup_k (1+k^2)^{\lambda+2} e^{-2\eta k^2\tau} \right\} \\
&\qquad \le C_\lambda \eta^2|t-\tau|^2\|\phi\|_s^2 \left\{ 1+\sup_k k^{2(\lambda+2)} e^{-2\eta\tau k^2} \right\} \\
&\qquad \le C_\lambda \eta^2|t-\tau|^2\|\phi\|_s^2 \left\{ 1+\sup_{|k|\ge 2} k^{2(\lambda+2)} e^{-2\eta\epsilon k^2} \right\}.
\end{aligned}
$$

Considerando la función $H(r) = r^{2\lambda+4}e^{-2\eta\epsilon r^2}$, $r > 0$, que alcanza su máximo en $r = \sqrt{\frac{\lambda+2}{2\eta\epsilon}}$, resulta

$$\|V_\eta(t)\phi - V_\eta(\tau)\phi\|_{s+\lambda} \le K(\lambda,\epsilon,\eta,2)|t-\tau|\|\phi\|_s.$$

3. Análisis local no lineal en H^s_{per}

En esta sección obtendremos, el buen planteamiento local en los espacios de Sobolev periódicos H^s_{per}, del problema no lineal:

$$
\begin{cases}
u \in C([0,T]; H^s_{per}) \\
\partial_t u + u\partial_x u - \eta\partial_x^2 u = 0, \quad t>0,\ \eta>0 \\
u(0) = \phi \in H^s_{per}
\end{cases}
\tag{9}
$$

para $s > 1/2$.
Considerando los resultados de la parte lineal de la sección anterior y el principio de Duhamel, estudiaremos la ecuación integral

$$u(t) = V_\eta(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt' \tag{10}$$

donde $\{V_\eta(t)\}$ es el semigrupo obtenido en la sección anterior. Veremos la equivalencia de (10) con (9).

Teorema 5 *Sea $s > 1/2$, $\phi \in H^s_{per}$ y $T > 0$. El problema diferencial (9) es equivalente a la ecuación integral (10) en H^s_{per}. Esto es, para $u \in C([0,T]; H^s_{per}), u \in C^1([0,T]; H^{s-2}_{per})$ se tiene u es una solución de (9), si y solo si, u satisface (10).*

Demostración. Sea $u \in C([0,T]; H^s_{per})$.

1. Supongamos que $u \in C^1([0,T]; H^{s-2}_{per})$ es solución de (9). Como consecuencia del teorema 2, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\partial_{t'}(V_\eta(t-t')u(t')) &= -\eta\partial_x^2 V_\eta(t-t')u(t') + V_\eta(t-t')\partial_{t'}u(t') \\
&= V_\eta(t-t')[-\eta\partial_x^2 u(t') + \partial_{t'}u(t')] \\
&= V_\eta(t-t')(-\frac{1}{2}\partial_x(u^2)(t')).
\end{aligned}
$$

Debido al segundo teorema fundamental del cálculo, se consigue

$$u(t) - V_n(t)\underbrace{u(0)}_{\phi} = \int_0^t \partial_{t'}(V_\eta(t-t')u(t'))dt' = -\frac{1}{2}\int_0^t V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt'$$

para $0 < t' < t$.

2. Ahora demostraremos la suficiencia. Supongamos que u es solución de la ecuación integral (10). Entonces satisface

$$\begin{aligned}\partial_t u(t) &= \partial_t V_\eta(t)\phi - \frac{1}{2}\partial_t\int_0^t V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt' \\ &= \eta\partial_x^2 V_\eta(t)\phi - \frac{1}{2}\partial_t\int_0^t V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt'. \qquad (10')\end{aligned}$$

Luego, para demostrar que u satisface (9), resta calcular $\partial_t \int_0^t V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt'$. Sea $t > 0$ fijo y considerando $h > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} V_\eta(t+h-t')\partial_x(u^2)(t')dt' - \int_0^t V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt'\right] \\ &\qquad = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^t (V_\eta(t+h-t') - V_\eta(t-t'))\partial_x(u^2)(t')dt' \\ &\qquad + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt'. \qquad (11)\end{aligned}$$

De (11) y aplicando el teorema del valor medio obtenemos una función continua (teorema 4) en un intervalo que se reduce a cero cuando $h \to 0$. Por lo tanto debe converger al integrando en t, osea,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} V_\eta(t+h-t')\partial_x(u^2)(t')dt' - \partial_x(u^2)(t)\right\|_{s-2} = 0. \qquad (12)$$

De la convergencia uniforme que lo garantiza el teorema 2, se tiene que

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^t \left[V_\eta(t+h-t') - V_\eta(t-t')\right]\partial_x(u^2)(t')dt' \\ &= \int_0^t \partial_t V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt' \\ &= 2\eta\partial_x^2\int_0^t V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt' \qquad (13)\end{aligned}$$

donde el límite es tomado en H^{s-2}_{per}. Usando (10) podemos reescribir (13) como

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^t \left[V_\eta(t+h-t') - V_\eta(t-t')\right]\partial_x(u^2)(t')dt' = \eta\partial_x^2\{-u(t) + V_\eta(t)\phi\}. \qquad (13')$$

Luego, de (10′), usando (12) y (13′) obtenemos

$$\begin{aligned}\partial_t u(t) &= \partial_t V_\eta(t)\phi - \frac{1}{2}\partial_t\int_0^t V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt' \\ &= \eta\partial_x^2 V_\eta(t)\phi - \frac{1}{2}\partial_x(u^2)(t) + \eta\partial_x^2\{u(t) - V_\eta(t)\phi\} \\ &= \eta\partial_x^2 u(t) - \frac{1}{2}\partial_x(u^2)(t).\end{aligned}$$

La demostración de la existencia de soluciones para la ecuación integral (10) es consecuencia del teorema del punto fijo de Banach. Por tal motivo, antes de abordar la demostración del buen planteamiento local, introduciremos algunos espacios espacios y una aplicación que serán útiles en el transcurso de la prueba. Sean $T > 0$, $s > 1/2$, $M > 0$ y $\phi \in H^s_{per}$ definimos el conjunto:

$$\triangle_s(T, M, \phi) = \{w \in C([0, T]; H^s_{per}) \,/\, \|w(t) - V_\eta(t)\phi\|_s \leq M, \, \forall t \in [0, T]\} \tag{14}$$

dotado de la métrica

$$d(v, w) = \underset{[0,T]}{sup}\|v(t) - w(t)\|_s, \; v, w \in \triangle_s(T, M, \phi). \tag{15}$$

Así $\triangle_s(T, M, \phi)$ es un espacio métrico completo. Ahora introducimos la aplicación

$$A(u)(t) = \underbrace{V_\eta(t)\phi}_{\in H^s_{per}} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t V_\eta(t - t')\partial_x(u^2)(t')dt'}_{I_1:=} \tag{16}$$

para $0 \leq t \leq T$.

Proposición 1 *Sea $s > 1/2$, $u \in C([0, T]; H^s_{per})$, entonces $A(u) \in C([0, T]; H^s_{per})$.*

Demostración. Probaremos la proposición en los pasos siguientes.

1. Para $t > 0$ fijo, probaremos que $A(u)(t) \in H^s_{per}, \forall t \geq 0$. En efecto, usando el teorema 3 para $\lambda = 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_s &\leq \int_0^t K_1\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\eta(t - t')}}\right)\|\partial_x(u^2)(t')\|_{s-1}dt', \\
&\leq \int_0^t K_1\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\eta(t - t')}}\right)\|u(t')\|_s^2 dt' \,, s > 1/2 \\
&\leq K_1 \underset{t'\in[0,T]}{sup}\|u(t')\|_s^2 \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\eta(t - t')}}\right)dt' \\
&\leq K' \underset{t'\in[0,T]}{sup}\|u(t')\|_s^2 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t - t')}}dt' \\
&\leq K \underset{t'\in[0,T]}{sup}\|u(t')\|_s^2 \, T^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

Luego $I_1 \in H^s_{per}$. Desde que $V_\eta(t)\phi \in H^s_{per}$, entonces $Au(t) \in H^s_{per}$, para $t > 0$. El caso $t = 0$, $Au(0) = \phi \in H^s_{per}$. Luego $Au(t) \in H^s_{per}, \forall t \geq 0$.

2. Seguidamente analicemos la continuidad de $Au(\cdot)$. Como ya se tiene la continuidad del C_0-semigrupo $V_\eta(t)\phi$ en H^s_{per} , solo falta ver la continuidad de W, $W(t) := \int_0^t V_\eta(t - t')\partial_x(u^2)(t')dt'$. Sea $h > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
W(t + h) - W(t) &= \int_0^{t+h} V_\eta(t + h - t')\partial_x(u^2)(t')dt' - \int_0^t V_\eta(t - t')\partial_x(u^2)(t')dt' \\
&= \int_0^t [V_\eta(t + h - t') - V_\eta(t - t')]\partial_x(u^2)(t')dt' \\
&+ \int_t^{t+h} V_\eta(t + h - t')]\partial_x(u^2)(t')dt' \\
&= \underbrace{(V_\eta(h) - I)\int_0^t V_\eta(t - t')\partial_x(u^2)(t')dt'}_{I_3(h):=} + \underbrace{\int_t^{t+h} V_\eta(t + h - t')\partial_x(u^2)(t')dt'}_{I_2(h):=}
\end{aligned} \tag{17}$$

$I_2(h)$ en (17) cumple la desigualdad

$$\|I_2(h)\|_s = \left\| \int_t^{t+h} V_\eta(t+h-t')\partial_x(u^2)(t')dt' \right\|_s \leq \int_t^{t+h} \|V_\eta(t+h-t')\partial_x(u^2)(t')\|_s dt'. \tag{18}$$

Gracias al Teorema 3 (desigualdad de regularización), para $\lambda = 1$, se tiene en (18)

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+h} \|V_\eta(t+h-t')\partial_x(u^2)(t')\|_s dt' &\leq K_1 \int_t^{t+h} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\eta(t+h-t')}}\right) \|\partial_x(u^2)(t')\|_{s-1} dt' \\
&\leq K \sup_{t' \in [0,T]} \|u(t')\|_s^2 \int_t^{t+h} \frac{1}{\sqrt{t+h-t'}} dt' \, , s > 1/2 \\
&\leq K \sup_{t' \in [0,T]} \|u(t')\|_s^2 \, h^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\|W(t+h) - W(t)\|_s \leq \|I_3(h)\|_s + \|I_2(h)\|_s \to 0$ siempre que $h \to 0^+$.
De forma semejante se obtiene la continuidad a izquierda.

Proposición 2 *Sea $s > 1/2$, entonces existe $\widetilde{T} > 0$ tal que la aplicación $A : \triangle_s(T, M, \phi) \to \triangle_s(T, M, \phi)$ es una contracción, $\forall\, T \leq \widetilde{T}$.*

Demostración. La prueba la realizamos de la siguiente forma.

1. Primeramente mostraremos que existe $T_1 > 0$ de manera que $A : \triangle_s(T_1, M, \phi) \to \triangle_s(T_1, M, \phi)$. Sea $u \in \triangle_s(T, M, \phi)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|A(u)(t) - V_\eta(t)\phi\|_s &= \left\| -\frac{1}{2} \int_0^t V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt' \right\|_s \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')\|_s dt'.
\end{aligned} \tag{19}$$

El integrando en la desigualdad (19) es mayorado a partir del teorema 3 con $\lambda = 1$ y del hecho que H^s_{per} es un álgebra de Banach para $s > 1/2$,

$$\begin{aligned}
\|V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')\|_s &= \|V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')\|_{s-1+1} \\
&\leq K_1 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\eta(t-t')}}\right] \|\partial_x(u^2)(t')\|_{s-1} \\
&\leq K_1 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\eta(t-t')}}\right] \|u(t')\|_s^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

De (20) y la desigualdad $\|u(t') - V_\eta(t')\phi\|_s \leq M$ en (19) tenemos

$$\begin{aligned}
\|A(u)(t) - V_\eta(t)\phi\|_s &\leq L_1(M + \|\phi\|_s)^2 \int_o^t \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\eta(t-t')}}\right] dt' \\
&\leq K(M + \|\phi\|_s)^2 \, T^{1/2}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Ahora, tomamos $T_1 > 0$ en (21) tal que

$$L(M + \|\phi\|_s)^2 \, T_1^{1/2} \leq M.$$

En consecuencia $A(\triangle_s(T, M, \phi)) \subseteq \triangle_s(T, M, \phi)$ para cada $T \leq T_1$.

2. Seguidamente veremos que existe T_2 tal que la aplicación A es una contracción. En efecto, sean $u, v \in \triangle_s(T, M, \phi)$, probaremos que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que A satisface

$$d(Au, Av) \leq \alpha \; d(u, v). \, \forall u, v \in \triangle_s(T_2, M, \phi).$$

Para ello procederemos en forma similar que en la primera parte usando el teorema 3 con $\lambda = 1$. Sea $s > 1/2$ y $u, v \in \triangle_s(T, M, \phi)$,

$$\begin{aligned} &\|A(u)(t) - A(v)(t)\|_s \\ &\quad \leq \frac{1}{2}\int_0^t \|V_\eta(t-t')[\partial_x(u^2)(t') - \partial_x(v^2)(t')]\|_s dt' \\ &\quad \leq K_1 \int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{\eta(t-t')}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \|\partial_x(u^2)(t') - \partial_x(v^2)(t')\|_{s-1} dt', \end{aligned} \tag{22}$$

donde $A(u), A(v) \in \triangle_s(T, M, \phi)$.

Desde que $\|u(t')\|_s = \|u(t') - V_\eta(t)\phi + V_\eta(t)\phi\|_s \leq (M + \|\phi\|_s)$, la acotación del operador ∂_x que va de H^s_{per} en H^{s-1} y que H^s es un álgebra de Banach, para $s > 1/2$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|\partial_x(u^2)(t') - \partial_x(v^2)(t')\|_{s-1} &= \|\partial_x(u^2(t') - v^2(t'))\|_{s-1} \leq \|u^2(t') - v^2(t')\|_s \\ &\leq \|u(t') - v(t')\|_s \|u(t') + v(t')\|_s \\ &\leq \|u(t') - v(t')\|_s (\|u(t')\|_s + \|v(t')\|_s) \\ &\leq 2K_s(M + \|\phi\|_s) d(u, v). \end{aligned} \tag{23}$$

Usando (23) en (22) conseguimos:

$$\begin{aligned} \|Au(t) - Av(t)\|_s &\leq L_1 K_s (M + \|\phi\|_s) d(u, v) \int_0^t \left[1 + \left(\frac{1}{\eta(t-t')}\right)^{\frac{1}{2}}\right] dt' \\ &\leq L(M + \|\phi\|_s)\, d(u, v)\, T^{1/2}. \end{aligned}$$

Luego, elegimos $T_2 > 0$, tal que

$$L(M + \|\phi\|_s)\, T_2^{1/2} < 1.$$

Por tanto, la aplicación A es una contracción. Ahora tomando $\overline{T} = min\{T_1, T_2\}$ se tiene que $A : \triangle_s(T, M, \phi) \to \triangle_s(T, M, \phi)$ es una contracción para cada $0 < T \leq \overline{T}$.

Observación 1 *La proposición anterior implica que, gracias al teorema del punto fijo de Banach, existen $T > 0$ y $u \in C([0, T]; H^s_{per})$ de manera que*

$$u(t) = A(u)(t) = V_\eta(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t V_\eta(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt'.$$

En consecuencia, por las proposiciones 1 y 2, se tiene que (1) tiene solución local en H^s_{per}, para $s > 1/2$.

Debido a la proposición (2) solo falta demostrar la unicidad y la dependencia continua respecto del dato inicial. Comenzamos abordando el asunto de la unicidad.

Lema 1 *Supongamos que* $\eta > 0, \gamma > 0, \eta + \gamma > 1$, *que* $a \geq 0, b \geq 0$ *y* g *son no negativos, que* $t^{\gamma-1}g(t)$ *es integrable localmente sobre* $0 \leq t \leq T$ *y que*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t (t-\tau)^{\eta-1}(\tau)^{\gamma-1}g(\tau)d\tau$$

en $[0, T]$. *Entonces*

$$g(t) \leq aE_{\eta,\gamma}\left((b\Gamma(\eta))^{\frac{1}{\nu}}t\right)$$

donde

$$\nu = \eta + \gamma - 1,\ E_{\eta,\gamma}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{m\nu} \text{ con } c_0 = 1 \text{ y } \frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(m\nu+\gamma)}{\Gamma(m\nu+\gamma+\eta)} \text{ para } m \geq 0 \quad (24)$$

.

Demostración. Ver el lema 7.1.2 en [1].

Teorema 6 *Supongamos que* $\phi \in H^s_{per}$, $s > 1/2$. *Entonces la ecuación integral (10) tiene una única solución* $u \in C([0, T]; H^s_{per})$.

Demostración. Debido a la proposición (2) y como se especificó en la observación 1 solo faltaría probar la unicidad y la dependencia continua respecto del dato inicial. Empezamos abordando el asunto de la unicidad. Con este fin, sean $u, v \in C([0, T]; H^s_{per})$ soluciones de (1) con datos iniciales $u(0) = \phi$ y $v(0) = \psi$ respectivamente, usando (10), la desigualdad triangular y el Teorema 3, con $\lambda = 1$ y $s > 1/2$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\|u(t) - v(t)\|_s \\ &\quad \leq \|V_\eta(t)(\phi - \psi)\|_s + \int_o^t \|V_\eta(t-t')(\partial_x(u^2)(t') - \partial_x(v^2)(t'))\|_s \\ &\quad \leq \|\phi - \psi\|_s + \int_o^t L_1\left[1 + \left(\frac{1}{\eta(t-t')}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\|\partial_x(u^2(t') - v^2(t'))\|_{s-1}dt.' \end{aligned} \quad (25)$$

Considerando T_s si fuera necesario, para que $\frac{1}{\sqrt{\eta(t-t')}} \geq 1$, (25) cumple la desigualdad

$$\begin{aligned} &\|u(t) - v(t)\|_s \\ &\quad \leq \|\phi - \psi\|_s + L(\|\phi\|_s + \|\psi\|_s)\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-t'}}\|u(t') - v(t')\|_s dt'. \end{aligned} \quad (26)$$

De (26), por el lema 1 y tomando $g(t) = \|u(t) - v(t)\|_s, a = \|\phi - \psi\|_s, b = L(\|\phi\|_s + \|\psi\|_s), \eta = \frac{1}{2}$ con $\gamma = 1$ se obtiene que si $\psi = \phi$ entonces $u = v$. Seguidamente enunciamos el resultado del buen planteamiento local.

Teorema 7 *El problema de Cauchy (1) para* $s > 1/2$ *está bien planteado localmente. Esto es, dado* $\phi \in H^s_{per}$, *existen* $T > 0$ *y una única* $u \in C([0, T]; H^s_{per})$ *que satisfacen (1). Es más, la aplicación* $\phi \to u$ *es continua en el siguiente sentido: si* $\phi_n \to \phi_\infty$ *en* H^s_{per} *y si* $u_n \in C([0, T_n]; H^s_{per})$, *son las respectivas soluciones de (1) con dato inicial* $u_n(0) = \phi_n$, $n = 1, 2, ...$, *entonces, para* $T \in (0, \infty)$ *las soluciones* u_n *están definidas en* $[0, T]$ *para todo* n *suficientemente grande y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s = 0.$$

Demostración. Como el tiempo de existencia T es una función continua de $\|\phi\|$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T_n > T$ para todo $n \geq N$. Luego u_n está definido en $[0, T]$ para tales n. Por lo tanto $u_n \in \triangle_s(T, M, \phi_n)$ para todo $n \geq N$ satisfaciendo

$$\|u_n(t)\|_s \leq \|\phi_n\|_s + M \leq R + M \tag{27}$$

con $R = \sup_n \|\phi_n\|$. Desde que $s > 1/2$ y usando (26) y (27) obtenemos

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_s + L(R + M)\int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t - t')}}\|u_n(t') - u_\infty(t')\|_s dt' \tag{28}$$

y el resultado se sigue de (28) y el lema 1. Finalmente obtendremos mas regularidad de la solución usando el teorema 3.

Proposición 3 *Supongamos que $u \in C([0, T]; H^s_{per})$, $s > \frac{1}{2}$ es solución de (1) con dato inicial $u(0) = \phi \in H^s_{per}$ obtenida en el teorema (6), entonces $u \in C([0, T]; H^r_{per})$ para $r > s$. Además $u \in C([0, T]; \mathcal{P})$.*

Demostración. Considerando $0 < \lambda < 1$ y $s > 1/2$ por el teorema 3 con $s - 1 > 0$, $\lambda + 1 > 0$ en vez de λ, se obtiene

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{s+\lambda} &\leq \|V_\eta(t)\phi\|_{s+\lambda} + \frac{1}{2}\int_0^t \|V_\eta(t - t')\partial_x(u^2)(t')\|_{s+\lambda}dt' \\
&\leq L_\lambda\left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda+1}{2}}}\right)\|\phi\|_{s-1} + L_\lambda\int_0^t\left(1 + \frac{1}{(\eta(t - t'))^{\frac{\lambda+1}{2}}}\right)\|\partial_x(u^2)(t')\|_{s-1}dt' \\
&\leq L_\lambda\left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda+1}{2}}}\right)\|\phi\|_s + L_\lambda\int_0^t\left(1 + \frac{1}{(\eta(t - t'))^{\frac{\lambda+1}{2}}}\right)\|u(t')\|_s^2 dt' \\
&\leq L_\lambda\left(1 + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{\lambda+1}{2}}}\right)\|\phi\|_s + L_\lambda \sup_{t' \in [0,T]}\|u(t')\|_s^2\int_0^t\left(1 + \frac{1}{(\eta(t - t'))^{\frac{1+\lambda}{2}}}\right)dt'
\end{aligned} \tag{29}$$

como la integral de (29) es finita, tenemos que $u \in C([0, T]; H^{s+\lambda}_{per})$. Con este argumento obtenemos lo requerido.

4. Teoría Global en h^s_{per}, $s \geq 1, \eta > 0$

En esta sección por razones técnicas, consideraremos solo soluciones de valor real, es decir, nos limitaremos a los espacios de Sobolev reales

$$h^s_{per} = \{f \in H^s_{per} : Imf = 0\},\ s \geq 1, \eta > 0.$$

La proposición 4 nos proporciona estimativas a priori que usaremos en la prueba del caso global, esto es el teorema 8.

Proposición 4 *Sea $\phi \in h^\infty_{per}$, y $u \in ([0, T]; h^\infty_{per})$ solución de (10), para algún $T > 0$. Entonces existe una constante $c > 0$ independiente de $\eta > 0$ tal que*

$$\|u\|_0 \leq \|\phi\|_0 e^{CT} \tag{30}$$

$$\|u_x\|_0 \leq \|\phi'\|_0\, e^{\frac{C}{\eta^3}\|\phi\|_0^4 T} \tag{31}$$

$$\|u_{xx}\|_0 \leq \|\phi''\|_0\, e^{\frac{C}{\eta^3}\|\phi\|_0^4 T} \tag{32}$$

Demostración. La estimativa (30) es consecuencia de la proposición 3, de multiplicar (1) por u y luego integrar por partes teniendo en cuenta que $(u, uu_x) = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|u\|_0^2 &= -(u, uu_x) + \eta(u, u_{xx})\\ &= -\eta(u_x, u_x) = -\eta\|u_x\|_0^2 \leq \|u\|_0^2\end{aligned}$$

luego $\frac{1}{2}\partial_t\|u\|_0^2 \leq \|u\|_0^2$ y resolviendo la desigualdad diferencial se obtiene (30).
Para demostrar (31), hacemos uso de la proposición 3 y luego derivamos (1) con respecto a x, para obtener

$$u_{xt} + (u_x)^2 + uu_{xx} - \eta u_{xxx} = 0. \tag{33}$$

Haciendo $v = u_x$, (33) se transforma en

$$v_t + v^2 + uv_x - \eta v_{xx} = 0, \quad v(0) = \phi.' \tag{34}$$

Ahora, multiplicando (34) por v e integrando obtenemos

$$\frac{1}{2}\partial_t\|v\|_0^2 + (v, v^2)_0 + (v, uv_x)_0 - \eta(v, v_{xx})_0 = 0. \tag{35}$$

Observemos que $2(v, uv_x)_0 = -(v, v^2)_0$, por lo tanto (35) se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|v\|_0^2 &= (v, uv_x)_0 + \eta(v, v_{xx})_0 = (v, uv_x)_0 - \eta(v_x, v_x)_0\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} vuv_x dx - \eta\|v_x\|_0^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |v|u||v_x|dx - \eta\|v_x\|_0^2.\end{aligned} \tag{36}$$

En (36) usando la desigualdad de Hölder, Cauchy-Schwartz y (30) obtenemos

$$\frac{1}{2}\partial_t\|v\|_0^2 \leq \|v\|_\infty\|\phi\|_0\|v_x\|_0 - \eta\|v_x\|_0^2. \tag{37}$$

La desigualdad de Gagliardo-Nirenberg transforma (37) en

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|v\|_0^2 \leq& \|v\|_0^{1/2}\|\phi\|_0\|v_x\|_0^{1/2}\|v_x\|_0 - \eta\|v_x\|_0^2.\\ &= \|v\|_0^{1/2}\|\phi\|_0\|v_x\|_0^{3/2} - \eta\|v_x\|_0^2.\end{aligned} \tag{38}$$

Transformamos (38) usando la desigualad de Young

$$\frac{1}{2}\partial_t\|v\|_0^2 \leq \left(\frac{1}{4\epsilon^4}\|v\|_0^2 + \frac{3}{4}\epsilon^{4/3}\|v_x\|_0^2\right)\|\phi\|_0 - \eta\|v_x\|_0^2. \tag{39}$$

Si hacemos, $\frac{3}{4}\epsilon^{4/3} = \frac{\beta}{\|\phi\|_0} > 0$, esta ultima desigualdad se transforma en

$$\frac{1}{2}\partial_t\|v\|_0^2 \leq \frac{27\|\phi\|_0^4}{163\eta^3}\|v\|_0^2. \tag{40}$$

Integrando entre 0 a t ambos lados de (40) tenemos

$$\|v\|_0^2 \leq \|\phi'\|_0^2 + \frac{C'}{\eta^3}\|\phi\|_0^4\int_{-\pi}^{\pi}\|v\|_0^2 dx. \tag{41}$$

Luego aplicando la desigualdad de Gronwall en (41) resulta

$$\|u_x\|_0^2 \leq \|\phi'\|_0^2 e^{\frac{C'}{\eta^3}\|\phi\|_0^4} \tag{42}$$

obteniéndose (31). Resta probar (32), para ello, hagamos $w = v_x = u_{xx}$ y derivemos (34) respecto a x para obtener:

$$w_t + 3vw + uw_x - \eta w_{xx} = 0. \tag{43}$$

Multiplicando esta ultima ecuación por w e integrando respecto a la variable espacial $x \in [-\pi, \pi]$, se tiene que

$$(w, w_t) + 3(w, vw) + (w, uw_x) - \eta(w, w_{xx}) = 0. \tag{44}$$

Observamos que $(w, vw) = -2(w, uw_x)$, por lo tanto (44) se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t \|w\|_0^2 &= 5(w_x, uw)_0 + \eta(w, w_{xx})_0 = 5\int_{-\pi}^{\pi} uww_x dx - \eta(w_x, w_x)_0 \\ &\leq 5\int_{-\pi}^{\pi} |u||w||w_x| dx - \eta\|w_x\|_0^2. \end{aligned}\tag{45}$$

En (45), usando la desigualad de Hölder, Cauchy-Schwartz y (29) se obtiene

$$\frac{1}{2}\partial_t \|w\|_0^2 \leq 5\|w\|_\infty \|\phi\|_0 \|w_x\|_0 - \eta\|w_x\|_0^2. \tag{46}$$

Por la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (46) se transforma en

$$\frac{1}{2}\partial_t \|w\|_0^2 \leq 5\|w_x\|_0^{3/2} \|\phi\|_0 \|w\|_0^{1/2} - \eta\|w_x\|_0^2. \tag{47}$$

Aplicando la desigualdad de Young en (47)

$$\frac{1}{2}\partial_t \|v\|_0^2 \leq 5\left(\frac{1}{4\epsilon^4}\|w\|_0^2 + \frac{3}{4}\epsilon^{4/3}\|w_x\|_0^2\right)\|\phi\|_0 - \eta\|w_x\|_0^2. \tag{48}$$

Si hacemos, $\frac{3}{4}\epsilon^{4/3} = \frac{\beta}{\|\phi\|_0} > 0$, esta ultima desigualdad se transforma en:

$$\frac{1}{2}\partial_t \|w\|_0^2 \leq \frac{135\|\phi\|_0^4}{163\eta^3}\|w\|_0^2. \tag{49}$$

Integrando entre 0 a t ambos lados de (49) y aplicando la desigualdad de Gronwall, se deduce (32). Seguidamente establecemos el buen planteamiento global del problema de Cauchy (1). Usaremos el principio de extensión, el teorema 6, la proposición 3 y la proposición anterior 4.

Teorema 8 *Sea $\phi \in h^s_{per}$, $s \geq 1$. Entonces, para cada $\eta > 0$, existe una única $u \in ([0, \infty); h^s_{per})$ solución del problema (1) tal que $\partial_t u \in C([0, \infty); h^{s-2}_{per})$.*

Demostración. Gracias a la proposición 3 probaremos el teorema solo para $s = 1$. Por la proposición anterior 4 se tiene

$$\|u\|_1 \leq F(\|\phi\|_1, T),$$

donde F es una función continua y creciente en T. Sea

$$T^* = sup\{T > 0 / \text{ existe } u \in C([0, T]; h^1_{per}) \text{ solución de } (1)\}.$$

Si suponemos que $T^* < \infty$. Gracias al teorema 6 se tiene que para algún T', si $\|\phi'\|_1 \leq F(\|\phi\|_1, T^*)$ existe una $u' \in ([0, T']; h^1_{per})$ solución de (1) con $u'(0) = \phi'$. Luego, si $\phi' = u(T^* - \frac{1}{2}T')$, tenemos que $u'(t) = u(T^* - \frac{1}{2}T' + t)$, para $0 \leq t < \frac{1}{2}T'$. En consecuencia, si

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t < T^* \\ u'(t - T^* + \frac{1}{2}T') & \text{si } T^* \leq t \leq T^* + \frac{1}{2}T', \end{cases} \tag{50}$$

entonces $v(t)$ es solución de (1) en $[0, T^* + \frac{1}{2}T']$. Esto contradice la definición de T^*. Luego, por el principio de extensión, $T^* = \infty$.

5. Conclusión

1. Gracias a la desigualdad de regularización del semigrupo asociado, y el teorema del punto fijo de Banach, se pudo obtener el buen planteamiento local de la solución de la ecuación de Burgers no lineal en los espacios de Sobolev periódico H^s_{per} para $s > 1/2$.

2. Para obtener la existencia de solución global se hizo uso de la teoría del caso local agregando el principio de extensión en los espacios de Sobolev reales h^s_{per} para $s \geq 1$.

3. Gracias a la transformada de Fourier en $\mathcal{P}$ se pudo obtener en forma explicita la solución de la parte lineal de (1), y debido a ello se pudo introducir el semigrupo asociado que fué muy útil al trabajar con la ecuación integral equivalente (10) en los escenarios: lineal homogénea, local no lineal y global.

4. Este trabajo de investigación motiva y contribuye al desarrollo del campo creciente de aplicaciones de la matemática a la mecánica de fluidos.

Referencias

[1] Henry, D.(1981). *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equation*. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer Verlag, Berlin.

[2] Iorio, Rafael and Iorio Valéria.(2002). *Fourier Analysis and partial Differential Equations*. Cambridge University.

[3] Kreyszig, E.(1978). *Introductory Functional Analysis With Applications*. University of Windsor. Jhon Wiley & Sons. Inc.

[4] Liu, Z. and Zheng, S.(1999). *Semigroups associated with dissipative system*. Chapman & Hall/CRC.

[5] Milla García, Luis y Santiago Ayala, Yolanda (2021). *Buen planteamiento local para un problema de Cauchy asociado a una ecuación de evolución no lineal.* Revista PESQUIMAT Universidad Nacional Mayor de San Marcos de Lima. ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439 Vol 24(2): 60–73 (2021).

[6] Pazy, A.(1983). *Semigruops of linear Operator and applications to partial differential equations*. Appl. Math. Sci, 44 Springer Verlag. Berlin.

[7] Santiago Ayala, Yolanda and Rojas, Santiago.(2019). *Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev periódico*. SELECCIONES MATEMÁTICAS. Universidad Nacional de Trujillo. ISSN: 2411-1783 (Online) Vol. 06(01): 49 - 65 (2019).

[8] Santiago, Y. Rojas, S., Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit, Bulletin of the Allahabad Mathematical Society 32(2) (2017) 207-230.

[9] Rubinstein, I. and Rubinstein, L., Partial differential equations in classical mathematical physics. Cambridge University Press, 1998