PESQUIMAT 25(2): 32–43 (2022)
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v25i2.24335
ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Algoritmo Proximal con Funciones de Bregman para Problemas de Equilibrio Cuasi-Monótono en Espacios de Hilbert

Erik A. Papa Quiroz [1] ***y Frank Collantes Sánchez*** [2]

Abstract: Introducimos un algoritmo proximal para resolver problemas de equilibrio definidos sobre conjuntos convexos cerrados donde la bifunción que define el problema tiene propiedades de cuasi-monotonicidad. Definiendo hipótesis apropiadas pero bien generales sobre el problema se prueba la convergencia débil para una solución del problema de equilibrio.

Keywords: Hilbert spaces; equilibrium problems; quasimonotonicity; Bregman distances; proximal methods.

A Proximal Algorithm with Bregman Like Distances to Equilibrium Problems with Quasimonotone Bifunctions in Hilbert Spaces

Abstract: The paper introduces a proximal point algorithm for solving equilibrium problems on convex sets with quasimonotone bifunctions in Hilbert spaces using Bregman distances. Supposing appropriate hypothesis on the model, this paper proves that the sequence of points which are generated for the algorithm converges weakly to certain solution point of the equlibrium problem.

Keywords: Hilbert spaces; equilibrium problems; quasimonotonicity; Bregman distances; proximal methods.

Recibido: 05/09/2022. *Aceptado:* 22/09/2022. *Publicado online:*30/12/2022.

[1]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, erikpapa@gmail.com
[2]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, fcollantess@unmsm.edu.pe

1. Introducción

El presente artículo introduce un algoritmo para resolver problemas de equilibrio (PE en lo que sigue) definido en espacios de Hibert: considerando un espacio de Hibert H, con una norma $||.||$ inducida por el producto interno $\langle .,. \rangle$, un conjunto no vacio $C \subset H$, que es abierto y convexo con $\bar{C}$ siendo la clausura topológica del conjunto C y $f : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$, es una bifunción; encontrar $\bar{x} \in \bar{C}$ satisfaciendo

$$f(\bar{x}, y) \geq 0, \ \ \forall y \in \bar{C}. \tag{1.1}$$

(PE) es un problema bien general y recubre como casos particulares diversos problemas de interés como problemas de optimización, desigualdad variacional, problemas de equilibrio de Nash, entre otros, para mayor información ver por ejemplo los artículos [8, 14, 18]. Es por eso que (PE) es intensamente estudiado por diversos especialistas en el área, tanto en teoria, algoritmos y aplicaciones, [2, 10, 13, 24, 5, 6, 20, 21]. Podemos mencionar también que (PE) se han investigado en espacios de Hilbert, Banach,[7], y en espacios más generales como se puede observar en la referencia [15].

En muchas investigaciones, la bifunción $f(.,.)$ del problema (1.1) fue asumida monótona o pseudomonotona, ver por ejemplo [14, 9, 29, 4, 5]. También fueron usados diversos métodos para hallar la solución de esta clase de problemas como podemos revisar en las siguientes referencias [36, 1, 37, 41, 42, 28].

Uno de estos métodos es el llamado método de punto proximal y que en espacios Euclidianos podemos encontrar en los trabajos de Konnov [30]; Mashreghi y Nasri [35], Langenberg [33] usando las distancias de Bregman; Nguyen et al. [37] usando distancias $\varphi-$ divergencias; Cruz Neto et al. [11] usando distancias homogeneas de segundo orden. Todos estos algoritmos consideraron el caso padrón monótono o pesudomonótono.

Sin embargo, en espacios de Hilbert o Banach algoritmos sobre métodos proximales para resolver (PE) para el caso cuasi-monótono aún no ha sido desarrollado, esto motivó a estudiar el presente trabajo. Nuestro objetivo es desarrollar un algoritmo de punto proximal usando distancias de Bregman para resolver (PE) en espacios de Hilbert pero asumiendo que la bifunción $f(.,.)$ es cuasi-monótona en vez de monótona o pseudomonótona.

Para obtener el objetivo trazado, este artículo propone la siguiente iteración en el algoritmo: dado un punto actual x^{k-1} en el conjunto abierto C, explorar y encontrar $x^k \in C$ satisfaciendo:

$$g^k + \lambda_k \nabla_1 D_h(x^k, x^{k-1}) = e^k,$$

donde D_h es una distancia de Bregman, en la Subsección 2.1 damos una definición específica de este concepto, $\nabla_1 D_h(.,.)$ es el gradiente de D_h con respecto a la primera variable, $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$, ver Sección 2, e^k es un error de approximación del vector 0 y λ_k es un parámetro proximal exógeno. Si el problema (1.1) y e^k satisfacen algunas hipótesis obtendremos propiedades de convergencia del algoritmo proximal.

La contribución de este trabajo es la obtención de la convergencia débil de la sucesión generada por el algoritmo proximal introducido cuando f en (1.1) cumple la condición de ser cuasi-monótono. Debemos observar que esta condición fue estudiada por Mallma et al. [34] para el caso Euclideano.

El artículo está organizado en secciones de la siguiente forma: La sección 2 introduce algunas notaciones, herramientas y resultados que se usarán a lo largo del artículo. La Sección 3 introduce el método de punto proximal. Sección 4 estudia las propiedades de convergencia del método introducido. Finalmente en Sección 5, damos nuestras conclusiones y los futuros trabajos que pueden ser desarrollados.

2. Preliminares

En todo este artículo H será un espacio de Hilbert dotado con producto interno $\langle .,. \rangle$ el cual define la norma dado por $||x|| := \langle x, x\rangle^{1/2}$. Denotamos por $bd(C)$, la frontera del subconjunto $C \subset H$ y $\bar{C}$ la clausura de $C \subset H$.

Definición 2.1 *Considere el conjunto no vacio y convexo C de H y sea $f : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$ una bifunción. $f(.,.)$ es llamada*

(i) monótona en $\bar{C}$ si se cumple: $f(x,y) + f(y,x) \leq 0$, $\forall x, y \in \bar{C}$;

(ii) pseudo-monótona en $\bar{C}$ si se cumple: dados $x, y \in \bar{C}$ y si $f(x,y) \geq 0$ entonces $f(y,x) \leq 0$;

(iii) cuasi-monótona en $\bar{C}$ si se cumple: dados $x, y \in \bar{C}$ y si $f(x,y) > 0$ entonces $f(y,x) \leq 0$.

Es fácil de verificar que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$. Sin embargo, la inversa $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ no es verdad en general, por ejemplo, ver el Ejemplo 3.1 de [16], donde los autores muestran la siguiente bifunción en $H = I\!R^2$, $\bar{C} = [0,1] \times [0,1]$ y

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{-\left(\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4x_2}}{2}\right)}{\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4x_2}}{2} + 1} \;, \frac{-1}{\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4x_2}}{2} + 1} \right),$$

Definición 2.2 *La sucesión $\{y^l\}$ de H converge debilmente a $\bar{y}$ si para cada funcional lineal $g : H \to I\!R$ se tiene que $g(y^l)$ converge a $g(\bar{y})$.*

Lema 2.1 *Considere $\{v_k\}$,$\{\gamma_k\}$, y $\{\beta_k\}$ tres sucesiones no negativas cumpliendo la siguiente condición: $v_{k+1} \leq (1 + \gamma_k)\, v_k + \beta_k$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty$, entonces, $\{v_k\}$ converge.*

Prueba. Polyak [40], Lemma 2, página 44. ∎

Definición 2.3 *Considere C un conjunto no vacio y convexo de H y una bifunción $f : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$. Sea $z \in \bar{C}$ un punto arbitrario. Defina el subdiferencial diagonal de $f(z,.)$ en el punto $x \in \bar{C}$, a partir de ahora denotado por $\partial_2 f(z,x)$, como*

$$\partial_2 f(z,x) = \{g \in H : f(z,y) \geq f(z,x) + \langle g, y - x\rangle, \forall y \in \bar{C}\}.$$

Además, si $f(x,x) = 0$, se tiene que

$$\partial_2 f(x,x) = \{g \in H : f(x,y) \geq \langle g, y - x\rangle, \forall y \in \bar{C}\}.$$

2.1. Distancias de Bregman

Sea $h : H \to I\!R \cup \{+\infty\}$ una función propia con $int(\texttt{domh}) \neq \emptyset$. Si h es diferenciable en $int(\texttt{domh})$, se define la función $D_h(.,.) : H \times H \to I\!R \cup \{+\infty\}$ dado por

$$D_h(x,y) := h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y\rangle. \tag{2.2}$$

Consideremos también los dos conjuntos de nivel inferior de D_h. Para $\beta \in I\!R$, definimos $\Gamma_1(\beta, y) := \{x \in H : D_h(x,y) \leq \beta\}$, y $\Gamma_2(x, \beta) := \{y \in H : D_h(x,y) \leq \beta\}$.

Definición 2.4 *La función propia $h : H \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es llamada una* función de Bregman generalizada *si existe un conjunto no vacio y convexo S, satisfaciendo $\bar{S} = \texttt{domh}$ y*

a. *h es continua en $\bar{S}$;*

b. *h es estrictamente convexa en $\bar{S}$;*

c. *h es diferenciable en S;*

d. *Para cada $\beta \in I\!R$, los conjuntos $\Gamma_1(\beta, y)$ y $\Gamma_2(x, \beta)$ son acotados para cada $y \in S$ y $x \in \bar{S}$.*

La clase de funciones de Bregman generalizados *será denotado por $\mathcal{GB}$. Además, si $h \in \mathcal{GB}$, entonces $D_h(x, y)$ es llamada* distancia de Bregman generalizada *de x a y.*

Definición 2.5 *Una función propia $h : H \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es llamada* función de Bregman, *denotado por $h \in \mathcal{B}$, si existe un conjunto no vacio, convexo y abierto S de tal manera que h satisfaga las condiciones descritas anteriormente, como también, que satisfagan:*

e. *Si $y^k \xrightarrow{w} y^* \in \bar{S}$, entonces $\lim_{k\to+\infty} D_h(y^*, y^k) = 0$,*

f. *Si $\lim_{k\to+\infty} D_h(z^k, y^k) = 0$, $y^k \xrightarrow{w} y^* \in \bar{S}$ y $\{z^k\}$ es acotado, entonces $z^k \xrightarrow{w} y^*$.*

Si h es una función de Bregman entonces $D_h(.,.)$ es una distancia de Bregman *de x a y.*

Lema 2.2 *Considere que $h \in \mathcal{GB}$ con respecto al conjunto S. Tenemos las siguientes implicaciones:*

i. *$\nabla_1 D_h(., y)(z) = \nabla h(z) - \nabla h(y)$, para todo $z, y \in S$.*

ii. *$D_h(., w)$ es estrictamente convexa en $\bar{S}$ for all $w \in S$.*

iii. *Para todo $z \in \bar{S}$ y $w \in S$, $D_h(z, w) \geq 0$ y $D_h(z, w) = 0$ si, y solo si, $z = w$.*

Prueba. Immediato ■

Observe que D_h no es necesariamente una distancia en el sentido estricto de la definición ya que la desigualdad triangular ni la simetria en general son verdaderos.

En este artículo usamos la notación $\nabla_1 D_h(x, y)$ para significar $\nabla_1 D_h(., y)(x)$. Así, obtenemos que $\nabla_1 D_h(x, y) = \nabla h(x) - \nabla h(y)$.

Lema 2.3 *Considere que $h \in \mathcal{GB}$ con su respectivo conjunto S y $w \in S$. Si $z \in S$, entonces,*

$$G(x) := D_h(x, w) - D_h(x, z)$$

es función afín (cóncava y convexa) en $\bar{S}$.

Prueba. Immediata. ■

Proposición 2.1 *Considere que $h \in \mathcal{GB}$ con su respectivo conjunto S. Para todo $w, z \in S$ y $x \in \bar{S}$ obtenemos*

$$\langle \nabla_1 D_h(z, w), x - z \rangle = D_h(x, w) - D_h(x, z) - D_h(z, w).$$

Prueba. Immediata. ■

2.2. Convergencia Cuasi-Fejér con distancias de Bregman

Definición 2.6 *Una sucesión $\{y^k\}$ de H es D_h-*cuasi Fejér convergente *con respecto a un conjunto no vacio $U \subset M$, si existe una sucesión real $\{\epsilon_k\}$, con $\epsilon_k \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon_k < +\infty$ tal que*

$$D_h(x, y^k) \leq D_h(x, y^{k-1}) + \epsilon_k,$$

para todo $x \in U$.

Proposición 2.2 *Sea $h \in \mathcal{GB}$ con respecto al conjunto S. Si $\{y^k\}$ es D_h-Fejér convergente con respecto a un conjunto $U \subset H$, entonces $\{y^k\}$ es acotado. Si, además, $h \in \mathcal{B}$ y un punto de acumulación $\bar{y}$ de $\{y^k\}$ pertenece a U, entonces $\{y^k\}$ converge debilmente y además $y^k \xrightarrow{w} \bar{y}$.*

Prueba. Immediato. ■

Definición 2.7 *Una función de Bregman h es llamado coerciva en la frontera si para todo $\{y^k\} \subset S$ tal que $y^k \to y \in bd(S)$, se tiene que $\nabla h(y^k)^T(x - y^k) \to -\infty$, para cada $x \in S$.*

3. Algoritmo Proximal

En este artículo, asumiremos que C es un conjunto no vacio, abierto y convexo en H y $f : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$ es una bifunción satisfaciendo $f(x, x) = 0$, para todo $x \in \bar{C}$ (f con esta propiedad es llamada función de equilibrio). El problema de equilibrio, denotado por $EP(f, \bar{C})$, consiste en encontrar un punto $\bar{x} \in \bar{C}$ satisfaciendo

$$f(\bar{x}, z) \geq 0, \forall z \in \bar{C}. \tag{3.3}$$

Denotaremos al conjunto de soluciones de $EP(f, \bar{C})$ por $S(f, \bar{C})$.

Las dos primeras hipótesis que asumiremos en este trabajo son:

Hipótesis H1. Given $y \in \bar{C}$ (arbitary but fixed), we have that $f(., y) : \bar{C} \to I\!R$ is upper semicontinuous.

Hipótesis H2. Dado $x \in \bar{C}$ (arbitrario pero fijo), $f(x, .) : \bar{C} \to I\!R$ es convexa.

Observación 3.1 *Observe que las condiciones* **H1** *y* **H2** *son estandard para la investigación de problemas de equilibrio, ver por ejemplo [19, 21, 20] y los teoremas* 13,1 *and* 13,2 *de [31].*

Algoritmo General

Inicialización: Sea $\{\lambda_k\}$ una sucesión de parámetros positivos, llamados parámetros proximales, y un punto inicial arbitrario:

$$x^0 \in C. \tag{3.4}$$

Paso Principal: Para $k = 1, 2, \ldots,$ y dado $x^{k-1} \in C$, encuentre un nuevo punto $x^k \in \bar{C}$ y $e^k \in I\!R^n$ tal que

$$e^k \in \partial_2 f(x^k, x^k) + \lambda_k \nabla_1 D_h(x^k, x^{k-1}), \tag{3.5}$$

donde D_h es una distancia de Bregman.
Stop Criterion: Si $x^k = x^{k-1}$ o $e^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$, entonces finalizar el algoritmo. Caso contrario, hacer $k - 1 \leftarrow k$ y volver a Paso Principal.

De (3.5) podemos concluir que existe un elemento $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ tal que

$$e^k = g^k + \lambda_k \nabla_1 D_h(x^k, x^{k-1}). \tag{3.6}$$

El segundo grupo de hipótesis son los siguientes:

Hipótesis H3. $f(.,.)$ es cuasi-monótona.

Hipótesis H4. Para cada número natural $k \in I\!N$, existe $x^k \in C$ tal que (3.5) se cumple.

Observe que si $x^k = x^{k-1}$, para algún k, entonces $\nabla_1 D_h(x^k, x^{k-1}) = 0$ y así obtenemos $g^k = e^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ y el algoritmo finaliza. Es por eso que el interés de este trabajo se concentra cuando $x^k \neq x^{k-1}$, para todo k.

Definamos el siguiente conjunto

$$S^*(f, \bar{C}) = \{y \in S(f, \bar{C}) : \ f(y, w) > 0, \ \forall w \in C\}. \tag{3.7}$$

Este conjunto fue introducido por la primera vez por Mallma et al. [34] que fue motivado por el artículo [4], página 41.
Asumiremos que el conjunto definido es no vacio, esto es, adicionamos la siguiente hipótesis

Hipótesis H5. $S^*(f, \bar{C}) \neq \emptyset$.

A seguir damos un resultado general que será usado en la convergencia del algoritmo

Proposición 3.1 *Asumiendo las hipótesis* **H2**-**H5**, *y* $h \in \mathcal{GB}$, *tenemos que la sucesión* $\{x^k\}$ *generada del algoritmo general satisface:*

$$D_h(x^*, x^k) \leq D_h(x^*, x^{k-1}) - D_h(x^k, x^{k-1}) + \frac{1}{\lambda_k} \left\langle e^k, x^k - x^* \right\rangle, \tag{3.8}$$

para cada $x^* \in S^*(f, \bar{C})$.

Prueba. Sea x^* un punto del conjunto $S^*(f, \bar{C})$, esto implica que $f(x^*, w) > 0$, para todo $w \in C$ y como $x^k \in C$, se obtiene $f(x^*, x^k) > 0$. Usando la cuasi-monotonicidad de $f(.,.)$, tenemos $f(x^k, x^*) \leq 0$. Debido que $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$, obtenemos de la hipótesis **H2** y Definición 2.3

$$\left\langle g^k, x^* - x^k \right\rangle \leq f(x^k, x^*) \leq 0. \tag{3.9}$$

Reemplazando (3.6) en (3.9) se tiene

$$\left\langle e^k - \lambda_k \nabla_1 D_h(x^k, x^{k-1}), x^* - x^k \right\rangle \leq 0, \tag{3.10}$$

el cual implica

$$\frac{1}{\lambda_k} \left\langle e^k, x^* - x^k \right\rangle \leq \left\langle x^* - x^k, \nabla_1 D_h(x^k, x^{k-1}) \right\rangle.$$

Ahora, usando la Proposición 2.1, obtenemos

$$\frac{1}{\lambda_k} \left\langle e^k, x^* - x^k \right\rangle = \left\langle x^* - x^k, \nabla_1 D_h(x^k, x^{k-1}) \right\rangle \leq D_h(x^*, x^{k-1}) - D_h(x^*, x^k) - D_h(x^k, x^{k-1}),$$

■

4. Convergencia del Algoritmo

Analizaremos la convergencia del algoritmo cuando el error e^k satisface las siguientes condiciones:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\|e^k\|}{\lambda_k} < +\infty \tag{4.11}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\langle e^k, x^k\rangle|}{\lambda_k} < +\infty \tag{4.12}$$

Proposición 4.1 *Supongamos que las hipótesis* **H2**-**H5** *son satisfechas,* $h \in \mathcal{GB}$ *y* $\{x^k\}$ *es generado por el algoritmo dado por (3.4), (3.5), (4.11), (4.12), entonces*

a) $\{x^k\}$ *es* D_h*-cuasi-Fejér convergente a* $S^*(f, \bar{C})$*.*

b) $\{D_h(x^*, x^k)\}$ *converge para cada* $x^* \in S^*(f, \bar{C})$*.*

c) $\{x^k\}$ *es una sucesión acotada.*

Prueba.
a) Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (3.8) obtenemos que

$$D_h(x^*, x^k) \leq D_h(x^*, x^{k-1}) + \frac{1}{\lambda_k}\left(\|e^k\|\|x^*\| + |\langle e^k, x^k\rangle|\right), \tag{4.13}$$

para cada $x^* \in S^*(f, \bar{C})$. Denotando $\epsilon^k = \frac{1}{\lambda_k}\left(\|e^k\|\|x^*\| + |\langle e^k, x^k\rangle|\right)$, obtenemos

$$D_h\left(x^*, x^k\right) \leq D_h\left(x^*, x^{k-1}\right) + \epsilon^k,$$

y de (4.11) y (4.12) se tiene $\sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon^k < \infty$.

b) De **a)** y Lema 2.1 obtenemos el resultado requerido.

c) Usando **a)** y Proposición 2.2 se prueba el presente item. ■

Eckstein [12] introdujo, por la primera vez, las condiciones (4.11) y (4.12). Después de ello estas condiciones fueron utilizados por varios investigadores, entre ellos podemos citar a [18], citekaplan2004. Por otyro lado, la hipótesis (4.12) puede ser retirada de la Proposición 4.1 para una cierta clase de distancias de Bregman, para obtener que $\{D_h(x, x^k)\}$ es convergente y que $\{x^k\}$ es acotada. Estas distancias incluyen por ejemplo todas las funciones fuertemente convexas, ver [23].

Proposición 4.2 *Supongamos que las hipótesis* **H2**-**H5** *cumplen y* $h \in \mathcal{GB}$*. Si solamente la condición* (4,11) *es satisfecha y supongamos que la distancia de Bregman generalizada* $D_h(.,.)$ *satisface la siguiente propiedad adicional:*

(P) *Para cada* $x \in \bar{C}$ *existe* $\alpha(x) > 0$ *y* $c(x) > 0$ *tal que:*

$$D_h(x, v) + c(x) \geq \alpha(x)||x - v||, \forall v \in C;$$

entonces

a. *Para cada $x^* \in S^*(f, \bar{C})$, se tiene*

$$D_h(x^*, x^k) \leq \left(1 + 2\frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}\right) D_h(x^*, x^{k-1}) + 2\frac{\|e^k\| \, c(x^*)}{\lambda_k \alpha(x^*)},$$

para k suficientemente grande y así, $\{D_h(x^*, x^k)\}$ converges.

b. *$\{x^k\}$ es acotada.*

Prueba. Tomando $x^* \in S^*(f, \bar{C})$, y usando (3.8) se tiene

$$D_h(x^*, x^k) \leq D_h(x^*, x^{k-1}) + \frac{1}{\lambda_k} \left\|e^k\right\| \left\|x^k - x^*\right\|. \tag{4.14}$$

Fije $x = x^*$ y $v = x^k$ en (**P**) y de (4.14) obtenemos

$$\left(1 - \frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}\right) D_h(x^*, x^k) \leq D_h(x^*, x^{k-1}) + \frac{c(x^*) \|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}. \tag{4.15}$$

De (4.11), existe $k_0 \equiv k_0(x^*)$ tal que $\frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)} \leq \frac{1}{2}$, for all $k \geq k_0$. Entonces

$$1 \leq \left(1 - \frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}\right)^{-1} \leq 1 + 2\frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)} \leq 2, \quad \forall k \geq k_0. \tag{4.16}$$

De las condiciones (4.15) y (4.16) obtenemos

$$D_h(x^*, x^k) \leq \left(1 + 2\frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}\right) D_h(x^*, x^{k-1}) + 2\frac{\|e^k\| \, c(x^*)}{\lambda_k \alpha(x^*)}, \forall k \geq k_0.$$

Luego, por el Lema 2.1 se tiene que $\left\{D_h(x^*, x^k)\right\}$ es convergente y de la Proposición 2.2, $\left\{x^k\right\}$ es acotado. ∎

Definamos el siguiente conjunto de puntos de acumulación débiles de la sucesión generada por el algoritmo

$$Acc(x^k) = \{z \in \bar{C} : \exists \{x^{k_l}\} \subseteq \{x^k\} \; with \; x^{k_l} \overset{w}{\to} z\}.$$

Teorema 4.1 *Supongamos que las hipótesis* **H1**-**H5** *se cumplen. Si $h \in \mathcal{B}$, $0 < \lambda_k < \bar{\lambda}$, para algún $\bar{\lambda} > 0$, y una de los items se cumplen:*

i) Condiciones (4,11)-(4,12) *se cumplen;*

ii) D_h cumple **(P)** *y solamente se cumple* (4,11)*;*

entonces,

(a) $Acc(x^k) \neq \emptyset$ y $Acc(x^k) \subset S(f, \bar{C})$.

(b) Si $Acc(x^k) \cap S^*(f, \bar{C}) \neq \emptyset$ entonces $\{x^k\}$ tiene una subsucesión que converge debilmente a un elemento de $S^*(f, \bar{C})$.

Prueba. Probaremos inicialmente asumiendo el item i).
Debido a la Proposición 4.1, item **c**, obtenemos que $\{x^k\}$ es una sucesión acotada, y así existe una subsuseción que converge debilmente y por eso, $Acc(x^k) \neq \emptyset$. Sea $L = \{k_1, k_2, ..., k_j, ...\}$, tal que $\{x^{k_l}\} \stackrel{w}{\to} x^*$, de (3.6) y $g^l \in \partial_2 f(x^l, x^l)$ obtenemos

$$f(x^l, x) \geq \left\langle g^l, x - x^l \right\rangle = \left\langle e^l, x - x^l \right\rangle - \lambda_l \left\langle \nabla_1 D_h(x^l, x^{l-1}), x - x^l \right\rangle, \tag{4.17}$$

para todo $l \in L$ y $x \in \bar{C}$. Considerando (4.11) y que $\{\lambda_l\}$ es acotado inferiormente, obtenemos que $||e^l|| \to 0$. Luego, debido que $\{x^l\}$ es acotado, se tiene que $\left\langle e^l, x - x^l \right\rangle \to 0$. Por lo tanto, solo es necesario analizar la sucesión

$$-\lambda_l \left\langle \nabla_1 D_h(x^l, x^{l-1}), x - x^l \right\rangle.$$

De la Proposición 2.1, se tiene

$$-\lambda_l \left\langle \nabla_1 D_h(x^l, x^{l-1}), x - x^l \right\rangle \geq \lambda_l \left[D_h(x, x^l) - D_h(x, x^{l-1}) \right].$$

Fijando $x \in \bar{C}$, analizaremos dos casos:
Si $\{D_h(x, x^l)\}$ converge, entonces $\lambda_l \left[D_h(x, x^l) - D_h(x, x^{l-1}) \right] \to 0$, desde que $\{\lambda_l\}$ es acotado, de (4.17) y **H1**

$$f(x^*, x) \geq \limsup_{l\to\infty} f(x^l, x) \geq 0.$$

Si $\{D_h(x, x^l)\}$ no es convergente, entonces la sucesión no es monotonicamente decreciente y por eso existen infinitos $l \in L$ tal que $D_h(x, x^l) \geq D_h(x, x^{l-1})$. Sea $\{l_j\} \subset L$ tal que $D_h(x, x^{l_j}) \geq D_h(x, x^{l_j - 1})$, para todo $j \in I\!N$, entonces de **H1** obtenemos

$$f(x^*, x) \geq \limsup_{j\to\infty} f(x^{l_j}, x) \geq \limsup_{j\to\infty} \lambda_{l_j} \left[D_h(x, x^{l_j}) - D_h(x, x^{l_j - 1}) \right] \geq 0,$$

entonces en ambos casos obtenemos $f(x^*, x) \geq 0$, que significa que $x^* \in S(f, \bar{C})$.
Ahora, asuma que $x^* \in S^*(f, \bar{C})$.
Si la condición i) es satisfecha y usando la Proposición 4.1, **a)** y Proposición 2.2, tenemos que $\{x^k\}$ es debilmente convergente a x^*.
Finalmente, provaremos nuestra tesis usando el segundo caso ii).
De la Proposición 4.2, **b.**, $\{x^k\}$ es acotada, por eso $Acc(x^k) \neq \emptyset$. Tome una subsecuencia $\{x^{k_j}\}$ tal que $x^{k_j} \stackrel{w}{\to} \bar{x}$, entonces $\bar{x} \in S(f, \bar{C})$, y de la Definición 2.5,(**e**), se tiene que $H(\bar{x}, x^{k_l}) \to 0$. Cuando $H(\bar{x}, x^k)$ es convergente, ver Proposición 4.2, **a**, y la sucesión $H(\bar{x}, x^{k_l})$ converge a cero, obtenemos que $H(\bar{x}, x^{k_j}) \to 0$. De la Definición 2.5,(**f**), obtenemos que $x^{k_j} \stackrel{w}{\to} \bar{x}$ y debido a la unicidad del limite, tenemos $x^* = \bar{x}$. Así, $\{x^k\}$ es debilmente convergente a x^*. ■

5. Conclusiones

Introducimos un algoritmo de punto proximal con distancias de Bregman para resolver problemas de equilibrio donde la bifunción que define el problema satisface la condición de ser cuasi-monótona definida en un espacio de Hilbert. Se prueba bajo algunas hipótesis estandares que la sucesión generada por el algoritmo converge debilmente para una solución del problema.

Este abordaje es la primera tentativa para introducir un algoritmo para esta clase de problemas en espacios de Hilbert de dimensión infinita. Un futuro trabajo puede ser la extensión del algoritmo introducido para resolver problemas de equilibrio en espacios de Banach y espacios métricos

Referencias

[1] Anh PN. A hybrid extragradient method extended to fixed point problems and equilibrium problems. Optimization. 2013; 62: 271-283.

[2] Aoyama K, Kimura Y, Takahashi W. Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems. Journal of Convex Analysis. 2008; 15: 395-409.

[3] Auslender A, Teboulle M. Interior gradient and proximal methods for convex and conic optimization. SIAM Journal of Optimization. 2006; 16: 697-725.

[4] Bianchi M, Schaible S. Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 1996; 90: 31-43.

[5] Bianchi M, Pini R. Coercivity conditions for equilibrium problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 2005; 124: 79-92.

[6] Bianchi M, Kassay G, Pini R. Exitence of equilibria via Ekeland's principle. J. Math. Anal. Appl. 2005; 305: 502-512.

[7] Burachik R, Kassay G. On a generalized proximal point method for solving equilibrium problems in Banach spaces. Nonlinear Analysis. 2012; 75: 6456-6464.

[8] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, Math. Student. 1994; 63: 123-145.

[9] Chadli O, Chbani Z, Riahi H. Equilibrium problems with generalized monotone bifunction and applications to variational inequalities. J. Optim Theory Appl. 2000; 105: 299-323.

[10] Castellani M, Giuli M. Pseudomonotone diagonal subdifferential operators. Journal of Convex Analysis. 2013; 20: 1-12.

[11] Da Cruz Neto JS, Lopes JO, Soares PA. A minimization algorithm for equilibrium problems with polyhedral constraints. Optimization. 2016; 65: 1061-1068.

[12] Eckstein J. Approximate iterations in Bregman-function-based proximal algorithms. Mathematical Programming. 1998; 83: 113-123.

[13] Flores-Bazán F. Existence theorems for generalized noncoercive equilibrium problems: the quasi-convex case. SIAM J. Optim. 2000; 11: 675-690.

[14] Flores-Bazán F. Existence theory for finite dimensional pseudomnonotone equilibrium problems. Acta. Appl. Math. 2003; 77: 249-297.

[15] Flores-Bazán F, Flores-Bazán F. Vector equilibrium problems under asymptotic analysis. Journal of Global Optimization. 2003; 26: 141-166.

[16] Hadjisavvas N, Schaible S. Quasimonotone variational inequalities in Banach spaces. J. Optim. Theory Appl. 1996; 90: 95-111.

[17] Hung PG, Muu LD. The Tikhonov regularization extended to equilibrium problems involving pseudomonotone bifunctions. Nonlinear Analysis. 2011; 74: 6121-6129.

[18] Iusem AN, Pennanen T, Svaiter BF. Inexact variants of the proximal point algorithm without monotonicity. SIAM J. Optim. 2003; 13: 1080-1097.

[19] Iusem AN, Sosa W. New existence results for equilibrium problems. Nonlinear Analysis. 2003; 52: 621-635.

[20] Iusem AN, Sosa W. A proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces. Optimization. 2010; 59: 1259-1274.

[21] Iusem AN, Kassay G, Sosa W. On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems. Math. Program. 2009; 11: 259-273.

[22] Iusem AN. On the maximal monotonicity of diagonal subdifferential operators. Journal of Convex Analysis. 2011; 18: 489-503.

[23] Kaplan A, Tichatschke R. On inexact generalized proximal methods with a weakened error tolerance criterion. Optimization. 2004; 53: 3-17.

[24] Oliveira PR, Santos PSM, Silva AN. A Tikhonov-type regularization for equilibrium problems in Hilbert spaces. J. Math. Anal. Appl. 2013; 401: 336-342.

[25] Kaplan A, Tichatschke R. On inexact generalized proximal methods with a weakened error tolerance criterion. Optimization. 2004; 53: 3-17.

[26] Kaplan A, Tichatschke R. Interior proximal method for variational inequalities on non-polyhedral sets. Discuss. Math. Diff. Inclusions Control Optim. 2007; 30: 51-59.

[27] Kaplan A, Tichatschke R. Note on the paper: interior proximal method for variational inequalities on non-polyhedral sets. Discuss. Math. Diff. Inclusions Control Optim. 2010; 30: 51-59.

[28] Khatibzadeh H, Mohebbi V, Ranjbar S. Convergence analysis of the proximal point algorithm for pseudo-monotone equilibrium problems. Optimization Methods Software. 2015; 30: 1146-1163.

[29] Konnov IV, Schaible S. Duality for equilibrium problems under generalized monotonicity. Journal of Optimization Theory and Applications. 2000; 104: 395-408.

[30] Konnov IV. Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 2003; 119: 317-333.

[31] Konnov IV. Generalized Monotone Equilibrium Problems and Variational Inequalities, Hadbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, 2005; 79: 559-618, Springer New York.

[32] Langenberg N, Tichatschke R. Interior proximal methods for quasiconvex optimization. J. Glob Optim. 2012; 52: 641-661.

[33] Langenberg N. Interior point methods for equilibrium problems. Comput Optim Appl. 2012; 53: 453-483.

[34] Mallma Ramirez, L., Papa Quiroz, E. A., and Oliveira, P. R. (2017). An Inexact Proximal Method with Proximal Distances for Quasimonotone Equilibrium Problems.Journal of Operational Research Soc China, 246 (3), 721-729.

[35] Mashreghi J, Nasri M. Strong convergence of an inexact proximal point algorithm for equilibrium problems in Banach spaces. Numerical Functional Analysis and Opimization. 2010; 31: 1053-1071.

[36] Moudafi A. On the convergence of splitting proximal methods for equilibrium problems in Hilbert spaces. J. Math. Anal. Appl. 2009; 359: 508-513.

[37] Nguyen TTV, Strodiot JJ, Nguyen VH. The interior proximal extragradient method for solving equilibrium problems. J. Glob. Optim. 2009; 44: 175-192.

[38] Papa Quiroz EA, Oliveira PR. An extension of proximal methods for quasiconvex minimization on the nonnegative orthant. European Journal of Operational Research. 2012; 216: 26-32.

[39] Papa Quiroz EA, Mallma Ramirez L, Oliveira PR. An inexact algorithm with proximal distances for variational inequalities. Submitted paper, 2015.

[40] Polyak BT. Introduction to Optimization, Optimization Software, New York. 1987.

[41] Quoc TD, Muu LD. Iterative methods for solving monotone equilibrium problems via dual gap functions. Comput Optim Appl. 2012; 51: 709-728.

[42] Rockafellar RT. Monotone operators and the proximal point algorithm. SIAM Journal of Control and Optimization. 1976; 14: 877-898.

[43] Villacorta KDV, Oliveira PR. An interior proximal method in vector optimization. European Journal of Operational Research. 2011; 214: 485-492.