PESQUIMAT 25(2): 44–57 (2022)
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v25i2.24362

ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Estabilidad exponencial de vigas sándwich Rao-Nakra

Carlos G. Quicaño Barrientos [1]***, Juan C. Sanchez Vargas***[2]***, Luis G. Huamanlazo Ricci***[3] ***y Jimmy R. Támara Albino***[4]

Resumen: En este articulo estudiaremos una viga de sándwich Rao-Nakra; que consta de tres capas distintas de espesor uniforme. En el modelo unidimensional de viga tipo sándwich Rao-Nakra, con amortiguamiento de tipo Kelvin-Voigt e historia, utilizaremos la teoría de semigrupos, la buena colocación del problema se obtiene empleando el Teorema de Lumer Phillips y la estabilidad exponencial se prueba empleando el Teorema de Gearhart-Huang-Prüss.

Palabras clave: Vigas sándwich de Rao-Nakra; la buena colocación; estabilidad exponencial.

Exponential Stability of Rao-Nakra sandwich Beams

Abstract: In this article we will study a Rao-Nakra sandwich beam; consisting of three distinct layers of uniform thickness. The one-dimensional model of a Rao-Nakra sandwich beam, with Kelvin-Voigt type damping and history, we will use semigroup theory, the good placement of the problem is obtained using Lumer Phillips' Theorem and exponential stability is proven using the Gearhart-Huang-Prüss Theorem.

Keywords: Rao-Nakra sandwich beams; the good placement; exponential stability.

Recibido: 21/02/2022. *Aceptado:* 02/06/2022. *Publicado online:* 30/12/2022.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: cquicanob@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: jsanchezv@unmsm.edu.pe
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: lhuamanlazor@unmsm.edu.pe
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: jtamaraa@unmsm.edu.pe

1. Introducción

En el presente articulo, estudiaremos las vigas sándwich de Rao-Nakra, con dos amortiguamientos de tipo Kelvin-Voigt y una historia, esto es, consideremos el siguiente sistema

$$\rho_1 h_1 u_{tt} - E_1 h_1 u_{xx} - k\left(-u + v + \alpha w_x\right) + \int_0^\infty g(s) u_{xx}(x, t-s)\, ds = 0 \text{ en }]0, L[\times\mathbb{R}^+ \quad (1)$$

$$\rho_3 h_3 v_{tt} - E_3 h_3 v_{xx} + k\left(-u + v + \alpha w_x\right) - \mu_1 v_{xxt} = 0 \text{ en }]0, L[\times\mathbb{R}^+ \quad (2)$$

$$\rho h w_{tt} + EI w_{xxxx} - \alpha k\left(-u + v + \alpha w_x\right)_x - \mu_2 w_{xxt} = 0 \text{ en }]0, L[\times\mathbb{R}^+ \quad (3)$$

con condiciones iniciales

$$\begin{array}{rll} (u(x,0), v(x,0), w(x,0)) & = (u_0(x), v_0(x), w_0(x)), & \text{en }]0, L[\\ (u_t(x,0), v_t(x,0), w_t(x,0)) & = (u_1(x), v_1(x), w_1(x)), & \text{en }]0, L[\\ u(x,-s) & = \eta^0(x,s), & \text{en }]0, L[\times\mathbb{R}^+ \end{array} \quad (4)$$

y las condiciones de frontera de Dirichlet-Neumann

$$\begin{array}{r} u(0,t) = u(L,t) = v(0,t) = v(L,t) = 0 \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0 \end{array} \text{ en } \mathbb{R}^+ \quad (5)$$

Donde las funciones u_0, u_1, v_0, v_1, w_0, w_1 y η^0 son datos iniciales dados y los parámetros ρ_1, ρ_3, ρ, h_1, h_3, h, k, α, E e I son constantes no negativos.

La función del núcleo de historia satisface

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+ \text{ tal que } g \in C^1(\mathbb{R}_0^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+),$$

$$b = E_1 h_1 - \int_0^\infty g(s)\, ds > 0 \quad (6)$$

y además existen ctes. positivas k_0, k_1 que verifican

$$-k_0 g(s) \leq g'(s) \leq -k_1 g(s), \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}_0^+ \quad (7)$$

donde $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ y $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$.

Las pequeñas vibraciones de una viga están dadas por el sistema

$$\rho_1 u_{tt} - k(u_x + \varphi)_x = 0 \quad (8)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} + k(u_x + \varphi) = 0 \quad (9)$$

Este modelo muy famoso fue introducido por S. P. Timoshenko [14] en 1921, donde $u(x,t)$ y $\varphi(x,t)$ modelan el movimiento transverso de la viga, el ángulo dirección del filamento del haz, respectivamente y ρ_1, ρ_2, k, b son números reales positivos. Este sistema (8)-(9) ha sido ampliamente estudiado por diversos autores en diferentes contextos. El siguiente modelo para viga laminada de dos capas fue propuesto por S. Hansen y R. Spies [4] en 1997, basado en la teoría de Timoshenko.

$$\rho w_{tt} + G(\varphi - w_x)_x = 0, \text{ en }]0, L[\times\mathbb{R}^+ \quad (10)$$

$$I_\rho(3s_{tt} - \varphi_{tt}) - D(3s_{xx} - \varphi_{xx}) - G(\varphi - u_x) = 0, \text{ en }]0, L[\times\mathbb{R}^+ \quad (11)$$

$$3I_\rho s_{tt} - 3Ds_{xx} + 3G(\varphi - w_x) + 4\gamma s + 4\delta s_t = 0, \text{ en }]0, L[\times\mathbb{R}^+ \quad (12)$$

donde ρ, G, I_ρ, D, γ y δ son constantes positivas y representan la densidad, el esfuerzo cortante, momento de inercia de la masa, rigidez fluxural, rigidez adhesiva y el parámetro adhesivo de amortiguación respectivamente. La función $w(x,t)$ denota el desplazamiento transversal, $\varphi(x,t)$ representa el desplazamiento rotacional y $s(x,t)$ es proporcional a la cantidad de deslizamiento a lo largo de la interfaz en el tiempo t y la variable espacial longitudinal x. Este modelo ha sido de mucho interés para diversos autores en los años recientes, ver por ejemplo [2], donde se consideró la dinámica de las vigas laminadas de Timoshenko.

Los modelos generales de vigas laminadas de tres capas fueron desarrollados en 1999 por Liu-Trogdon-Young [9]

$$\rho_1 h_1 u_{tt} - E_1 h_1 u_{xx} - \tau = 0, \tag{13}$$

$$\rho_3 h_3 v_{tt} - E_3 h_3 v_{xx} + \tau = 0, \tag{14}$$

$$\rho h w_{tt} + EI w_{xxxx} - G_1 h_1 (w_x + \phi_1)_x - G_3 h_3 (w_x + \phi_3)_x - h_2 \tau_x = 0, \tag{15}$$

$$\rho_1 I_1 \phi_{1,tt} - E_1 I_1 \phi_{1,xx} - \frac{h_1}{2}\tau + G_1 h_1 (w_x + \phi_1) = 0, \tag{16}$$

$$\rho_3 I_3 \phi_{3,tt} - E_3 I_3 \phi_{3,xx} - \frac{h_3}{2}\tau + G_3 h_3 (w_x + \phi_3) = 0. \tag{17}$$

Los parámetros físicos h_i, ρ_i, E_i, G_i, E, I y I_i son constantes positivas y representan el espesor, la densidad, el modulo de Young, módulo de corte y momento de inercia de la i-esima capa, para $i = 1, 2, 3$; de abajo hacia arriba, respectivamente. Además

$$\rho h = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 \text{ y } EI = E_1 I_1 + E_3 I_3.$$

El sistema Rao-Nakra

$$\rho_1 h_1 u_{tt} - E_1 h_1 u_{xx} - k(-u + v + \gamma w_x) = 0, \text{ en }]0, L[\times\mathbb{R}^+, \tag{18}$$

$$\rho_3 h_3 v_{tt} - E_3 h_3 v_{xx} + k(-u + v + \gamma w_x) = 0, \text{ en }]0, L[\times\mathbb{R}^+, \tag{19}$$

$$\rho h w_{tt} + EI w_{xxxx} - \alpha k(-u + v + \gamma w_x)_x = 0, \text{ en }]0, L[\times\mathbb{R}^+, \tag{20}$$

se obtiene de (13)-(17), considerando que el material del núcleo es linealmente elástico, es decir $\tau = 2G\zeta$ con la tensión de cizallamiento

$$\zeta = \frac{1}{2h_2}(-u + v + w_x) \text{ y } \gamma = h_2 + \frac{1}{2}(h_1 + h_3),$$

donde $k := \dfrac{G_2}{2h_2}$, el módulo de corte $G_2 = \dfrac{E_2}{2(1+\gamma)}$ y $-1 < v < \dfrac{1}{2}$ es la relación de Poisson. En este sistema de Rao-Nakra, $u(x,t)$ es el desplazamiento longitudinal, $v(x,t)$ representa el angulo de corte de las capas inferiores y superiores, $w(x,t)$ representa el desplazamiento transversal de la viga. Los parámetros físicos que representan las propiedades del material h_i, ρ_i, E_i y I son positivos y representan el espesor, la densidad, módulo de Young, y momento de inercia de la masa.

Diversos autores han investigado recientemente, acerca de las propiedades cualitativas del modelo de Rao-Nakra, sujeto a cierto mecanismo de amortiguación, como la estabilidad y la capacidad de control.

Nuestra motivación es el siguiente modelo de Rao-Nakra con amortiguación interna y amortiguamiento de Kelvin-Voigt, considerado en [6].

$$\rho_1 h_1 u_{tt} - E_1 h_1 u_{xx} - k(-u + v + \alpha w_x) - a_1 u_{xxt} + a_2 u_t = 0, \tag{21}$$

$$\rho_3 h_3 v_{tt} - E_3 h_3 v_{xx} + k(-u + v + \alpha w_x) - b_1 u_{xxt} + b_2 u_t = 0, \tag{22}$$

$$\rho h w_{tt} + EI w_{xxxx} - \alpha k(-u + v + \alpha w_x)_x - c_1 u_{xxt} + c_2 u_t = 0 \tag{23}$$

donde a_i, b_i, c_i son constantes positivas para $i = 1, 2$.

Los autores en [6] mostraron que el sistema (21)-(23) es inestable si solo se impone un amortiguamiento en la ecuación de la viga, sin embargo la estabilidad exponencial se mantiene, cuando los tres desplazamientos se amortiguan, mientras la estabilidad polinomial se mantiene, cuando solo dos de las tres ecuaciones son amortiguadas. Para el caso $a_2 = b_2 = c_2 = 0$, se recupera el sistema (1)-(3), sin el término de historia y sin la amortiguación Kelvin-Voigt en la capa inferior. Para $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ en [8] fue probado la estabilidad polinomial cuando el amortiguamiento esta dado en una de las tres ecuaciones de la onda y la estabilidad exponencial fue obtenida por Ozkan Ozer y Hansen [10], cuando la amortiguación se impone en un extremo de la viga para los tres desplazamientos.

El objetivo principal de este articulo es estudiar el comportamiento asintótico de la solución asociado al sistema (1)-(5), mostrando que el sistema es exponencialmente estable.

Emplearemos la teoría de semigrupos para el desarrollo de este articulo, para ello se debe transformar el problema (1)-(5) a un problema abstracto de Cauchy autónomo

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \quad U(0) = U_0.$$

Para esto se introduce la variable auxiliar para la historia

$$\eta(x,t,s) = u(x,t) - u(x,t-s), \qquad (x,t,s) \in]0,L[\times\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \tag{24}$$

esta variable η satisface

$$\eta_t(x,t,s) + \eta_s(x,t,s) = u_t(x,t). \tag{25}$$

Sustituyendo $u_{xx}(x,t-s)$ de (24) en la ecuación (1), el sistema (1)-(5)se puede escribir de la forma

$$\rho_1 h_1 u_{tt} - b u_{xx} - k\left(-u + v + \alpha w_x\right) - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}\, ds = 0 \qquad \text{en }]0,L[\times\mathbb{R}^+ \tag{26}$$

$$\rho_3 h_3 v_{tt} - E_3 h_3 v_{xx} + k\left(-u + v + \alpha w_x\right) - \mu_1 v_{xxt} = 0 \qquad \text{en }]0,L[\times\mathbb{R}^+ \tag{27}$$

$$\rho h w_{tt} + EI w_{xxxx} - \alpha k\left(-u + v + \alpha w_x\right)_x - \mu_2 w_{xxt} = 0 \qquad \text{en }]0,L[\times\mathbb{R}^+ \tag{28}$$

$$\eta_t(x,t,s) + \eta_s(x,t,s) = u_t(x,t) \text{ en }]0,L[\times\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \tag{29}$$

con datos iniciales

$$\begin{array}{rll} (u(x,0), v(x,0), w(x,0)) & = (u_0(x), v_0(x), w_0(x)), & \text{en }]0,L[\\ (u_t(x,0), v_t(x,0), w_t(x,0)) & = (u_1(x), v_1(x), w_1(x)), & \text{en }]0,L[\\ \eta(x,0,s) & = \eta_0(x,s), & \text{en }]0,L[\times\mathbb{R}^+ \end{array} \tag{30}$$

y las condiciones de frontera, Dirichlet-Newmann

$$\begin{array}{rl} \left.\begin{array}{r} u(0,t) = u(L,t) = v(0,t) = v(L,t) = 0 \\ w(0,t) = w(0,L) = w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0 \end{array}\right. & \text{en } \mathbb{R}^+ \\ \eta(0,t,s) = \eta(L,t,s) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \eta(x,t,0) = 0 & \text{en }]0,L[\times\mathbb{R}^+, \end{array} \tag{31}$$

donde $\eta_0(x,s) = u_0(x) - \eta^0(x,s)$.

De forma natural, realizando ciertos cálculos, se establece que la energía asociado al sistema (26)-(28), tiene la forma siguiente

$$\begin{aligned} E(t) :=& \frac{1}{2}\left[\rho_1 h_1 \int_0^L |u_t|^2\, dx + b\int_0^L |u_x|^2\, dx + \rho_3 h_3 \int_0^L |v_t|^2\, dx + E_3 h_3 \int_0^L |v_x|^2\, dx\right. \\ & + EI\int_0^L |w_{xx}|^2\, dx + \rho h \int_0^L |w_t|^2\, dx + k\int_0^L |-u + v + \alpha w_x|^2\, dx \\ & \left. + \int_0^\infty \int_0^L g(s)\, |\eta_x|^2\, ds\, dx\right] \end{aligned} \tag{32}$$

el cual es no creciente para todo $t \geq 0$, dado que

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\mu_1 \int_0^L |v_{xt}|^2\, dx - \mu_2 \int_0^L |w_{xt}|^2\, dx - k_0 \int_0^\infty \int_0^L g(s)\, |\eta_x|^2\, ds\, dx \leq 0 \tag{33}$$

2. Preliminares

En esta sección presentaremos algunos resultados sin demostración, los cuales serán empleados en el desarrollo del presente trabajo.

Definición 2.1. *Consideremos el operador lineal no acotado $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to \mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $U_0 \in \mathcal{H}$. Se define el problema abstracto de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \quad t > 0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{34}$$

Teorema 2.2. *Sea el operador $\mathcal{A}$ generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones $S(t)$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*

i) *Si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, el problema abstracto de Cauchy* (34)*, admite una solución única de la forma $U(t) = S(t)U_0$, satisfaciendo*

$$U \in C^1(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_0^+; D(\mathcal{A})).$$

ii) *Además, si $U_0 \in \mathcal{H}$, el problema abstracto de Cauchy* (34)*, admite una solución única $U(t) = S(t)U_0$, que satisface*

$$U \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H}).$$

Demostración. Ver [11] □

Definición 2.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert equipado con el producto interno $\langle ; \rangle_{\mathcal{H}}$ y $\mathcal{A}$ un operador lineal densamente definido sobre $\mathcal{H}$. Diremos que el operador $\mathcal{A}$ es disipativo si*

$$Re\,\langle \mathcal{A}x, x\rangle \leq 0 \qquad \text{para todo } x \in D(\mathcal{A}).$$

Teorema 2.4. *Sea $\mathcal{A}$ un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{A}$ genera un C_0-semigrupo de contracciones en $\mathcal{H}$, si y solo si $\mathcal{A}$ es disipativo y además el operador $(I - \mathcal{A})$ es sobreyectivo.*

Demostración. Ver [11] □

El siguiente teorema nos dice que la condición $R(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ se puede debilitar a $R(\lambda_0 I - \mathcal{A})$ para cualquier $\lambda_0 > 0$ dado.

Teorema 2.5 (Lummer Phillips)**.** *Consideremos el operador $\mathcal{A}$ cuyo dominio $D(\mathcal{A})$ es denso en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*

i) *Si $\mathcal{A}$ es operador disipativo y además existe un número real λ_0 positivo tal que el rango $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$, entonces el operador $\mathcal{A}$ es un generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones en $\mathcal{H}$.*

ii) *De otro lado, si $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal del C_0-semigrupo de contracciones $S(t)$ en $\mathcal{H}$, entonces el operador $\mathcal{A}$ es disipativo y $R(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ para cada $\lambda > 0$.*

Demostración. Ver [7]. □

Como corolario del teorema anterior, el siguiente resultado se utiliza frecuentemente en la gran mayoría de trabajos.

Corolario 2.6. *Consideremos el operador $\mathcal{A}$ cuyo dominio $D(\mathcal{A})$ es denso en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{A}$ es un operador disipativo y $\rho(\mathcal{A})$ es el conjunto resolvente de $\mathcal{A}$, donde $0 \in \rho(\mathcal{A})$, entonces $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracciones en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Ver [7]. □

Teorema 2.7. *Sea $\mathcal{A}$ un operador lineal y $\rho(\mathcal{A})$ su conjunto resolvente. Si $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$ el C_0-semigrupo de contracciones generado por $\mathcal{A}$. El semigrupo $S(t)$ decae exponencialmente si y solo, si*

$$i\mathbb{R} \equiv \{i\beta;\ \beta \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$$

y

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$$

Demostración. Ver [7]. □

Lema 2.8. *Consideremos un operador cerrado $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, donde $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Si $i\mathbb{R} \not\subset \rho(\mathcal{A})$, entonces existe un número real ω, con $\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|^{-1} \leq |\omega| < \infty$ tal que el conjunto*

$$\{i\beta;\ |\beta| < |\omega|\} \subset \rho(\mathcal{A})$$

y

$$\sup\left\{\left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})};\ |\beta| < |\omega|\right\} = \infty.$$

Demostración. Ver [7]. □

Corolario 2.9. *Consideremos un operador cerrado $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, donde $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Si $i\mathbb{R} \not\subset \rho(\mathcal{A})$, entonces existen sucesiones (λ_n), (U_n) y (F_n) en $\mathbb{R}$, $D(\mathcal{A})$ y $\mathcal{H}$ respectivamente, tales que*

$$\lambda_n \to w \ \ con\ \ |\lambda_n| < |w|\,;\ \|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$$

y

$$F_n \to 0;\ \ siendo\ (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n,\ \ para\ todo\ n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Ver [7]. □

Corolario 2.10. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ intervalo no acotado y $u \in W^{1,p}(I)$, donde $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$$

Demostración. Ver [1]. □

Lema 2.11. *Consideremos que la función g del término memoria satisface* (6)-(7), *y $\omega \in L^2_g(\mathbb{R}^+; H^1_0(0,L))$ tal que $\omega_s \in L^2_g(\mathbb{R}^+; H^1_0(0,L))$ y $\omega(x,0) = 0$. Entonces*

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} g(s)\omega_x(x,s) &= 0, \\ \lim_{s\to\infty} [g(s)]^{1/2}\omega_x(x,s) &= 0 \qquad y \\ \lim_{s\to\infty} g(s)\left\|\omega_x(x,s)\right\|^2 &= 0. \end{aligned}$$

3. La buena colocación

Definimos las funciones $\varphi = u_t$, $\xi = v_t$ y $z = w_t$, y consideremos $U = (u, \varphi, v, \xi, w, z, \eta)^T$ y $U_0 = (u_0, \varphi_0, v_0, \xi_0, w_0, z_0, \eta_0)^T$, donde T denota la transpuesta. Entonces el sistema (26)-(31), puede formularse por

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \quad t > 0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{35}$$

por lo cual, el operador $\mathcal{A}$ es definido por

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b}{\rho_1 h_1}(\cdot)_{xx} & 0 & \frac{-kI}{\rho_1 h_1} & 0 & \frac{k\alpha}{\rho_1 h_1}(\cdot)_x & 0 & \int_0^\infty g(s)(\cdot)_{xx}\,ds \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \frac{kI}{\rho_3 h_3} & 0 & \frac{E_3 h_3(\cdot)_{xx}}{\rho_3 h_3} - \frac{kI}{\rho_3 h_3} & \frac{-\mu_1 I}{\rho_3 h_3} & \frac{k\alpha(\cdot)_x}{\rho_3 h_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \frac{k\alpha(\cdot)_x}{\rho h} & 0 & \frac{k\alpha(\cdot)_x}{\rho h} & 0 & \frac{EI(\cdot)_{xxxx}}{\rho h} + \frac{k\alpha^2(\cdot)_{xx}}{\rho h} & -\mu_2 I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & (\cdot)_s \end{bmatrix} \tag{36}$$

donde 0 e I representan los operadores nulo e identidad respectivamente. Por lo cual se tiene

$$\mathcal{A}U = \begin{bmatrix} \varphi \\ \frac{1}{\rho_1 h_1}\left[bu_{xx} + k(-u + v + \alpha w_x) + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(x,t,s)\,ds\right] \\ \xi \\ \frac{1}{\rho_3 h_3}\left[E_3 h_3 v_{xx} - k(-u + v + \alpha w_x) + \mu_1 \xi_{xx}\right] \\ z \\ \frac{1}{\rho h}\left[-EIw_{xxxx} + k\alpha(-u + v + \alpha w_x)_x + \mu_2 z_{xx}\right] \\ \varphi - \eta_s \end{bmatrix} \tag{37}$$

Para definir el espacio de fase $\mathcal{H}$, consideremos el espacio estándar $L^2(0, L)$ con su producto interno usual $\langle , \rangle$ y su norma inducida $\|\cdot\|$. Consideremos también los espacios de Hilbert

$$H_*^2(0, L) = \left\{\omega \in H^2(0, L);\ \omega_x(0) = \omega_x(L) = 0\right\}$$

y

$$L_g^2(0, L) = \left\{\eta : \mathbb{R}^+ \to H_0^1(0, L);\ \int_0^\infty g(s)\,\|\eta_x\|^2\,ds < \infty\right\},$$

equipado con el producto interior y la norma inducida

$$\langle \eta, \eta^* \rangle_{L_g^2} = \int_0^\infty g(s)\,\langle \eta_x, \eta_x^* \rangle\,ds \qquad \text{y} \qquad \|\eta\|_{L_g^2} = \left[\int_0^\infty g(s)\,\|\eta_x\|^2\,ds\right]^{1/2}.$$

Se define el espacio de fase $\mathcal{H}$ por

$$\mathcal{H} = [H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^2 \times (H_0^1(0, L) \cap H_*^2(0, L)) \times L^2(0, L) \times L_g^2(0, L), \tag{38}$$

provisto del producto interno

$$\begin{aligned} \left\langle U, U^\sharp \right\rangle =& \rho_1 h_1 \left\langle \varphi, \varphi^\sharp \right\rangle + b\left\langle u_x, u_x^\sharp \right\rangle + \rho_3 h_3 \left\langle \xi, \xi^\sharp \right\rangle + E_3 h_3 \left\langle v_x, v_x^\sharp \right\rangle + EI\left\langle w_{xx}, w_{xx}^\sharp \right\rangle \\ &+ \rho h \left\langle z, z^\sharp \right\rangle + k\left\langle -u + v + \alpha w_x, -u^\sharp + v^\sharp + \alpha w_x^\sharp \right\rangle + \left\langle \int_0^\infty g(s)\eta_x, \eta_x^\sharp \right\rangle \end{aligned} \tag{39}$$

con $U = (u,\varphi,v,\xi,w,z,\eta)^T$ y $U^\sharp = (u^\sharp,\varphi^\sharp,v^\sharp,\xi^\sharp,w^\sharp,z^\sharp,\eta^\sharp)^T$ en $\mathcal{H}$, el cual induce una norma definido por

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 =& \rho_1 h_1\|\varphi\|^2 + b\|u_x\|^2 + \rho_3 h_3\|\xi\|^2 + E_3h_3\|v_x\|^2 + EI\|w_{xx}\| \\ &+ \rho h\|z\|^2 + k\|-u+v+\alpha w_x\|^2 + \|\eta\|_{L_g^2}^2 .\end{aligned} \tag{40}$$

De otro lado, el dominio del operador $\mathcal{A}$ es definido por

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H};\ \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}.$$

Desde que $\mathcal{A}$ esta bien definido por (37) con las condiciones de frontera del sistema (26)-(31), resulta el dominio del operador $\mathcal{A}$

$$D(\mathcal{A}) = \begin{cases} (u,\varphi,v,\xi,w,z,\eta)^T \in \mathcal{H};\ \varphi,\xi \in H_0^1(0,L), z \in H_0^1(0,L)\cap H_*^2(0,L), \\ (bu + \int_0^\infty g(s)\eta\, ds) \in H^2(0,L),\ \eta_s \in L_g^2, \\ (E_3h_3v + \mu_1\xi) \in H^2(0,L) \\ (-EIw_{xx} + k\alpha^2 w + \mu_2 z) \in H^2(0,L); \\ w_x(0) = w_x(L) = 0. \end{cases}$$

Es posible probar que el operador $\mathcal{A}$ es disipativo y también $0 \in \rho(\mathcal{A})$, esto es,

$$Re\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \le -\mu_1\|\xi_x\|^2 - \mu_2\|z_x\|^2 - k_0\int_0^\infty g(s)\|\eta_x\|^2\, ds \le 0. \tag{41}$$

Por tanto del corolario (2.6), se concluye que el operador $\mathcal{A}$ es un generador del C_0-semigrupo de contracciones $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$.

La buena colocación del problema (34) es garantizado por el Teorema (2.2).

4. Decaimiento exponencial

En esta parte probaremos que el C_0-semigrupo de contracciones decae exponencialmente. Para lograr ello, usaremos el siguiente teorema que dá las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad del C_0-semigrupo de contracciones. Esto fue obtenido de forma independiente por Gearhart [3], Huang [5], y posteriormente Prüss [12].

Teorema 4.1. *Sea $\rho(\mathcal{A})$ el conjunto resolvente del operador $\mathcal{A}$ y $S(t)$ el C_0-semigrupo de contracciones generado por $\mathcal{A}$. $S(t)$ decae exponencialmente si y solo si*

$$i\mathbb{R} \equiv \{i\beta;\ \beta \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}) \tag{42}$$

y

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \left\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty \tag{43}$$

Teorema 4.2. *El semigrupo $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$ generado por el operador $\mathcal{A}$ admite decaimiento exponencial, si existen números positivos ω y $M > 1$ por lo cual*

$$\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \le Me^{-\omega t} \quad \textit{para todo } t \ge 0$$

Demostración. Para la demostración es suficiente que se verifique (42) y (43) del Teorema 4.1. En primer lugar se demostrará (42), esto es, $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. La demostración se realizará por contradicción. Supongamos que

$$i\mathbb{R} \not\subset \rho(\mathcal{A}) \tag{44}$$

Puesto que $\mathcal{A}$ es un generador infinitesimal del C_0-semigrupo de contracciones en el espacio $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{A}$ es un operador cerrado, ver Pazy [11].

Por otro lado, desde que $i\mathbb{R} \not\subset \rho(\mathcal{A})$, existe una sucesión $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ y una sucesión de funciones $(U_n) \subset D(\mathcal{A})$ con $\|U\|_{\mathcal{H}} = 1$ tales que

$$\lambda_n \to \lambda \text{ con } |\lambda_n| < |\lambda| .$$

y

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})\, U_n\|_{\mathcal{H}} \to 0 \tag{45}$$

Consideremos

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})\, U_n = F_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{46}$$

donde $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6, f_n^7)^T \in \mathcal{H}$ y $U_n = (u_n, \varphi_n, v_n, \xi_n, w_n, z_n, \eta_n)^T \in D(\mathcal{A})$.
De (45) y (46), se obtiene

$$F_n \to 0 \text{ en } \mathcal{H}, \tag{47}$$

Luego, para obtener la contradicción, demostraremos que cada término de (U_n) converge a cero. Aplicando producto interno en $\mathcal{H}$, (46) con U_n, se obtiene

$$i\lambda_n \|U_n\|^2_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A}U_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}} = \langle F_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}} ,$$

tomando la parte real y utilizando (41), y luego (45), se obtiene

$$\mu_1 \|\xi_{n,x}\|^2 + \mu_2 \|z_{n,x}\|^2 + k_1 \int_0^\infty g(s) \|\eta_{n,x}(t,s)\|^2 \, ds \to 0 \tag{48}$$

De (48) y de la desigualdad de Poincaré, se obtiene

$$\xi_{n,x}, \xi_n \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{49}$$
$$z_{n,x}, z_n \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{50}$$
$$\eta_n \to 0 \text{ en } L^2_g. \tag{51}$$

Por otro lado, de la ecuación resolvente (46), expresando en términos de sus componentes, resulta

$$i\lambda_n u_n - \varphi_n = f_n^1 \to 0 \text{ en } H^1_0(0,L) \tag{52}$$
$$i\lambda_n \rho_1 h_1 \varphi_n - b u_{n,xx} - k\left(-u_n + v_n + \alpha w_{n,x}\right) - \int_0^\infty g(s)\eta_{n,xx}\, ds = \rho_1 h_1 f_n^2 \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{53}$$
$$i\lambda_n v_n - \xi_n = f_n^3 \to 0 \text{ en } H^1_0(0,L) \tag{54}$$
$$i\lambda_n h_3\rho_3 \xi_n - E_3 h_3 v_{n,xx} + k\left(-u_n + v_n + \alpha w_{n,x}\right) - \mu_1 \xi_{n,xx} = \rho_3 h_3 f_n^4 \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{55}$$
$$i\lambda_n w_n - z_n = f_n^5 \to 0 \text{ en } H^1_0 \cap H^2_* \tag{56}$$
$$i\lambda_n z_n + EI w_{n,xxxx} - k\alpha\left(-u_n + v_n + \alpha w_{n,x}\right)_x - \mu_2 z_{n,xx} = \rho h f_n^6 \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{57}$$
$$i\lambda_n \eta_n + \eta_{n,s} - \varphi_n = f_n^7 \to 0 \text{ en } L^2_g(0,L) \tag{58}$$

Ahora, de (58) se obtiene

$$\varphi_n = i\lambda_n \eta_n + \eta_{n,s} - f_n^7 \tag{59}$$

tomando producto interno en L^2_g, (59) con φ_n, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(s)\left\langle \varphi_{n,x}, \varphi_{n,x}\right\rangle ds =& i\lambda_n \int_0^\infty g(s)\left\langle \eta_{n,x}, \varphi_{n,x}\right\rangle ds + \int_0^\infty g(s)\left\langle \eta_{n,sx}, \varphi_{n,x}\right\rangle ds \\ & - \int_0^\infty g(s)\left\langle f^7_{n,x}, \varphi_{n,x}\right\rangle ds,\end{aligned}$$

luego, tomando la parte real en (59) e integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}\|\varphi_{n,x}\|^2\int_0^\infty g(s)\,ds = &-\lambda_n\int_0^\infty g(s)Im\,\langle\eta_{n,x},\varphi_{n,x}\rangle\,ds + \int_0^\infty g(s)Re\,\langle\eta_{n,x},\varphi_{n,x}\rangle\,ds\\ &-\int_0^\infty g(s)Re\,\langle f^7_{n,x},\varphi_{n,x}\rangle\,ds.\end{aligned}\tag{60}$$

Aplicando valor absoluto en (60), utilizando (7) y la desigualdad de Hölder, se obtiene

$$\|\varphi_{n,x}\|\le\frac{1}{|g|^{1/2}_{L^1}}\left(|\lambda|\,\|\eta_n\|_{L^2_g}+k_0\,\|\eta_n\|_{L^2_g}+\left\|f^7_n\right\|_{L^2_g}\right),\tag{61}$$

utilizando en (61) las convergencias de (51), (58) y por Poincaré,

$$\varphi_{n,x},\varphi_n\to 0 \text{ en } L^2(0,L).\tag{62}$$

De otro lado, de (52) se obtiene

$$i\lambda_n u_{n,x}=f^1_{n,x}+\varphi_{n,x},$$

aplicando norma en $L^2(0,L)$ y la desigualdad de Poincaré

$$u_{n,x},\ u_n\to 0\quad\text{en } L^2(0,L)\tag{63}$$

Ahora, de (54) se obtiene

$$i\lambda_n v_{n,x}=f^3_{n,x}+\xi_{n,x}$$

aplicando norma en $L^2(0,L)$ y utilizando la convergencia (49), se obtiene

$$v_{n,x},v_n\to 0 \text{ en } L^2(0,L).\tag{64}$$

En forma similar de (56), aplicando norma en $L^2(0,L)$ y luego Poincaré, se obtiene

$$w_{n,x},w_n\to 0 \text{ en } L^2(0,L).\tag{65}$$

Por lo tanto, de (63), (64) y(65), resulta

$$(-u_n+v_n+\alpha w_{n,x})\to 0 \text{ en } L^2(0,L)\tag{66}$$

multiplicando (57) por w_n en $L^2(0,L)$, se obtiene

$$\begin{aligned}i\lambda_n\rho h\,\langle z_n,w_n\rangle+EI\,\|w_{n,xx}\|^2+k\alpha\,\langle -u_n+v_n+\alpha w_n,w_{n,x}\rangle&\\ +\mu_2\,\langle z_{n,x},w_{n,x}\rangle=\rho h\,\langle f^6_n,w_n\rangle,&\end{aligned}\tag{67}$$

de las convergencias obtenidas, reemplazando en (67), resulta

$$w_{n,xx}\to 0 \text{ en } L^2(0,L).\tag{68}$$

Por lo tanto, de (49)-(51) y (62)-(67), resulta

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}}\to 0,\ \text{cuando } n\to\infty,$$

esto conlleva a una contradicción con $\|U_n\|_{\mathcal{H}}=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$, esto significa que $i\mathbb{R}\subset\rho(\mathcal{A})$.

Ahora, demostraremos la condición (43) del teorema 4.1, esto es

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty}\left\|(i\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}<\infty,\ \lambda\in\mathbb{R},$$

la demostración lo realizaremos por contradicción, supongamos lo contrario, es decir,

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \left\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = +\infty,$$

entonces existe una sucuencia $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ donde $\lambda_n \to +\infty$ y una secuencia de funciones $(F_n) \subset \mathcal{H}$, con $F_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{\left\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1} F_n\right\|_{\mathcal{H}}}{\|F_n\|_{\mathcal{H}}} \geq n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

esto es

$$\left\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1} F_n\right\|_{\mathcal{H}} \geq n \|F_n\|_{\mathcal{H}}. \tag{69}$$

Desde que (42) es cierto, entonces $(\lambda_n) \subset \rho(\mathcal{A})$, por tanto, $(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces existe una única sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{(u_n, \varphi_n, v_n, \xi_n, w_n, z_n, \eta_n)\} \subset D(\mathcal{A})$ con $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n \tag{70}$$

esto es,

$$U_n = (i\lambda_n I - A)^{-1} F_n. \tag{71}$$

De (69) en (71), resulta

$$F_n \to 0 \text{ en } \mathcal{H} \tag{72}$$

esto es

$$F_n = (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n \to 0 \text{ en } \mathcal{H}. \tag{73}$$

Sea $F_n = \left(f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6, f_n^7\right)$, para conseguir la contradicción, mostraremos que cada término de la sucesión U_n converge para cero.
Aplicando producto interno en $\mathcal{H}$, (69) con U_n, resulta

$$\mu_1 \|\xi_{n,x}\|^2 + \mu_2 \|z_{n,x}\|^2 + k_1 \int_0^\infty g(s) \|\eta_{n,x}(t,s)\|^2 \, ds \leq \|F_n\|_{\mathcal{H}} \|U_n\|_{\mathcal{H}},$$

utilizando (71) y la desigualdad de Poincaré, se obtiene

$$\begin{aligned} \xi_{n,x}, \xi_n \to 0 &\quad \text{en } L^2(0,L) \\ z_{n,x}, z_n \to 0 &\quad \text{en } L^2(0,L) \\ \eta_n \to 0 &\quad \text{en } L^2_g(0,L). \end{aligned} \tag{74}$$

De otro lado, multiplicando (53) por $g(s)\overline{\eta_n}$ e integrando sobre $]0, L[\times\mathbb{R}^+$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\rho_1 h_1 \int_0^L \int_0^\infty i\lambda_n g(s)\varphi_n \overline{\eta_n} \, ds \, dx - b \int_0^L \int_0^\infty g(s) u_{n,xx} \overline{\eta_n} \, ds \, dx \\ &- k \int_0^L \int_0^\infty g(s)(-u_n + v_n + \alpha w_{n,x}) \overline{\eta_n} \, ds \, dx - \int_0^L \int_0^\infty g(s) \left(\int_0^\infty g(s) \eta_{n,xx} \, ds \right) \overline{\eta_n} \, ds \, dx \\ &= \rho_1 h_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s) f_n^2 \overline{\eta_n}(x,t,s) \, ds \, dx \end{aligned} \tag{75}$$

tomando la parte real en (75) y utilizando (58), se obtiene

$$
\begin{aligned}
\rho_1 h_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\,|\varphi_n|^2\,ds\,dx &= -\rho_1 h_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\mathrm{Re}(\varphi_n \overline{f_n^7})\,ds\,dx \\
&- \rho_1 h_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\mathrm{Re}(\varphi_n \overline{\eta_{n,s}})\,ds\,dx + b\int_0^L \int_0^\infty g(s)\mathrm{Re}(u_{n,x}\overline{\eta_{n,x}})\,ds\,dx \\
&+ k\int_0^L \int_0^\infty g(s)\mathrm{Re}(u_n\overline{\eta_n})\,ds\,dx - k\int_0^L \int_0^\infty g(s)\mathrm{Re}(v_n\overline{\eta_n})\,ds\,dx \\
&- k\alpha\int_0^L \int_0^\infty g(s)\mathrm{Re}(w_{n,x}\overline{\eta_n})\,ds\,dx + \int_0^L \left|\int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}\,ds\right|^2 dx \\
&- \rho_1 h_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\mathrm{Re}(f_n^2\overline{\eta_n})\,ds\,dx
\end{aligned}
$$

integrando por partes, utilizando (7) y aplicando modulo, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\rho_1 h_1 \|\varphi_n\|^2 |g|_{L^1} \leq & \rho_1 h_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\left|\varphi_n f_n^7\right|ds\,dx + k_0\rho_1 h_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\,|\varphi_n\eta_n|\,ds\,dx \\
&+ b\int_0^L \int_0^\infty g(s)\,|u_{n,x}\eta_{n,x}|\,ds\,dx + k\int_0^L \int_0^\infty g(s)\,|u_n\eta_n|\,ds\,dx \\
&+ k\int_0^L \int_0^\infty g(s)\,|v_n\eta_n|\,ds\,dx + k\alpha\int_0^L \int_0^\infty g(s)\,|w_{n,x}\eta_n|\,ds\,dx \\
&+ \int_0^L \left|\int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}\,ds\right|^2 dx + \rho_1 h_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\left|f_n^2\eta_n\right|ds\,dx. \qquad (76)
\end{aligned}
$$

Acotando cada término del lado derecho de (76), utilizando las convergencias de (74) se obtiene

$$\varphi_n \to 0. \qquad (77)$$

De (54) se obtiene

$$i\lambda_n v_{n,x} = \xi_{n,x} + f_{n,x}^3,$$

aplicando la norma en $L^2(0,L)$, de (71) y (73), se obtiene

$$v_{n.x}, v_n \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \qquad (78)$$

De (52), se obtiene

$$i\lambda_n u_n = f_n^1 + \varphi_n,$$

aplicando norma en $L^2(0,L)$, de (77) y (72), se obtiene

$$u_n \to 0 \text{ en } L^2(0,L). \qquad (79)$$

De (56) se obtiene

$$i\lambda_n w_{n,x} = z_{n,x} + f_{n,x}^5,$$

aplicando norma en $L^2(0,L)$, de (74) y (72), se obtiene

$$w_{n,x}, w_n \to 0 \text{ en } L^2(0,L). \qquad (80)$$

De (78), (79) y (80), resulta

$$-u_n + v_n + \alpha w_{n,x} \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \qquad (81)$$

Multiplicando (53) por u_n en $L^2(0,L)$ e integrando por partes, resulta

$$\begin{aligned} i\lambda_n \rho_1 h_1 \langle \varphi_n, u_n\rangle + b\|u_{n,x}\|^2 - k\langle -u_n + v_n + \alpha w_{n,x}, u_n\rangle \\ + \left\langle \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}\, ds, u_{n,x}\right\rangle = \rho_1 h_1 \left\langle f_n^2, u_n\right\rangle \end{aligned} \tag{82}$$

utilizando las convergencias obtenidas en (82), resulta

$$b\|u_{n,x}\|^2 + \left\langle \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}\, ds, u_{n,x}\right\rangle \to 0. \tag{83}$$

De otro lado, utilizando (51) y la desigualdad de Hölder, se obtiene

$$\left\langle \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}\, ds, u_{n,x}\right\rangle \leq \|u_{n,x}\|\,|g|_{L^1}^{1/2}\,\|\eta_n\| \to 0. \tag{84}$$

Reemplazando (84) en (83), resulta

$$u_{n,x} \to 0 \text{ en } L^2(0,L). \tag{85}$$

Multiplicando (57) con w_n en $L^2(0,L)$ e integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} i\lambda_n \rho h \langle z_n, w_n\rangle + EI\|w_{n,xx}\|^2 - k\alpha\langle -u_n + v_n + \alpha w_{n,x}, w_n\rangle \\ +\mu_2\langle z_{n,x}, w_{n,x}\rangle = \rho h\left\langle f_n^6, w_n\right\rangle \end{aligned}$$

tomando limite y de las convergencias obtenidas, resulta

$$w_{n,xx} \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{86}$$

Finalmente de las convergencias obtenidas (74), (77)-(80) y (85)-(86), resulta

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty,$$

esto contradice el hecho que $\|U\|_{\mathcal{H}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto se concluye que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \left\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < +\infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Luego las condiciones (42) y (43) del Teorema 4.1 son satisfechas, esto significa que $S(t)$ admite decaimiento exponencial. □

5. Consecuencias

En este trabajo hemos considerado, el modelo de sándwich Rao-Nakra, que consiste en tres placas idénticas de espesor uniforme, con tres amortiguamientos. El amortiguamiento de tipo memoria actuá sobre el desplazamiento longitudinal y los otros amortiguamientos de tipo Kelvin-Voigt actúan sobre el ángulo de corte y el desplazamiento transversal de la viga, respectivamente. Además, del estudio realizado al sistema, nos indica que si eliminamos los términos disipativos en cada ecuación del articulo [7] y quitamos el amortiguamiento de Kelvin-Voigt que aparece en el desplazamiento longitudinal y lo reemplazamos por el término de memoria, entonces el sistema sigue decayendo exponencialmente.

Referencias

[1] Brézis H. (1999). *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod. Paris. DL.

[2] Feng B., Ma T. F., Monteiro R. N., & Raposo C. A. (2018). Dynamics of laminated Timoshenko beams. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 30(4), 1489-1507.

[3] Gearharts L. (1978). Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Space. *Transactions of the American Mathematical Society*, 236, 385-394.

[4] Hansen, S. W and Spies, R. D. (1997). Structural Damping in Laminated Beams due to Interfacial Slip. *Journal of Sound and Vibration*, 204, 183-202.

[5] Huang F. (1985). Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilber spaces. *Ann. of Diff. Eqs.*, 1-1:43-56.

[6] Li, Y. and Liu, Z. and Wang, Y. (2018). Weak stability of a laminated beam. *Mathematical Control & Related Fields*. American Institute of Mathematical Sciences, 8(3& 4).

[7] Liu Z. & Songmu Zheng (1999). Semigroups associated with dissipative system. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series. *Chapman and Hall/CRC*, 398.

[8] Liu, Z. and Rao, B. and Zhang, Q. (2020). Polynomial stability of the Rao-Nakra beam with a single internal viscous damping. *Journal of Differential Equations*, 269 (7), 6125-6162.

[9] Liu, Z.; Trogdon, S.A.; Jiongmin Y. (1999). Modeling and analysis of a laminated beam. *Mathematical and Computer Modelling*, 30, 149–167.

[10] Ozer, O. A. and Hansen, S. W. (2013). Uniform stabilization of a multilayer Rao-Nakra sandwich beam. *Evolution Equations & Control Theory*, 2 (4).

[11] Pazy, A. (1983). Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. *Applied Mathematical Science*. New York, NY, United States. Springer.

[12] Prüss J. (1984). On the Spectrum of C_0-Semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 284, 847-857.

[13] Muños Rivera, Jaime E. (2008). Estabilizaçã de Semigrupos e Aplicações. *Textos de métodos matemáticos*. Academia dos Contas.

[14] Timoshenko, S.P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. Taylor & Francis, 41(245), 744-746.