PESQUIMAT 26(1): 32–44 (2023)
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v26i1.24546

ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Forma canónica para una ecuación diferencial con retardo.

Miriam Gisell Pescorán-Florencio [1] ***y Roxana López-Cruz*** [2]

Resumen: En este trabajo, se establece un cambio de variable adecuado que permite transformar una ecuación diferencial con retardo no constante en otra ecuación diferencial con retardo constante. El análisis de dicho cambio de variable conduce a la ecuación funcional de Abel, cuyo estudio garantiza la existencia y unicidad de dicho cambio de variable; además que se establece un método iterativo para la construcción de tal solución.

Palabras clave: forma canónica, ecuación diferencial con retardo, ecuación de Abel, método iterativo.

Canonical form for a delay differential equation.

Abstract: In this work, a suitable change of variable is established that allows transforming a differential equation with non-constant delay into another differential equation with constant delay. The analysis of this change of variable leads to the Abel functional equation, whose study guarantees the existence and uniqueness of this change of variable; in addition, an iterative method for the construction of such solution is established.

Keywords: canonical form, delay differential equation, Abel's equation, iterative method.

Recibido 20/01/2023 *Aceptado 12/04/2023* *Publicado online 30/06/2023*

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: mpescoranf@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: rlopezc@unmsm.edu.pe

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales con retardo (EDRs) tienen actualmente un rol importante en el estudio de muchos fenómenos en campos como la biología, medicina, física, ingeniería, economía; y en general en diversas áreas de la matemática actual, dado que describen de una manera más realista muchos modelos matemáticos en los que la respuesta de los modelos en los valores de las variables dependientes no es instantánea, sino que ocurre después de un determinado lapso de tiempo o tiempo de procesamiento (retardo).

Si bien es cierto que en la modelización de diversas situaciones matemáticas se emplean las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), se hace necesario considerar una variable de retardo en dichas modelizaciones.

En general, diversos autores han desarrollado la teoría de las EDRs bajo un enfoque comparativo, tratando de extender muchos de los resultados conocidos en las EDOs a las EDRs; sin embargo, diversos resultados de las ecuaciones diferenciales ordinarias se tornan dificultosos para las ecuaciones diferenciales con retardo.

Para un estudio profundo de las ecuaciones diferenciales con retardo se citan los libros de Y. Kuang [6] y H.L. Smith [11].

Es conocido que en las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) las formas canónicas de Jordan juegan un papel importante en el estudio de las soluciones de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes; así como también un proceso de linealización de una EDO alrededor de sus puntos de equilibrio permite conocer las propiedades cualitativas de la solución, sin necesidad de obtener dicha solución.

Los procesos mencionados para una EDO han motivado a diversos autores [4], [2] a extender el concepto de formas canónicas para ecuaciones diferenciales funcionales, de las cuales las ecuaciones diferenciales con retardo (EDRs) son un caso particular; sin embargo, la escasa aplicación de las formas canónicas para las ecuaciones diferenciales con retardo es lo que motiva el presente trabajo de investigación; cuya importancia de su estudio radica en que servirá de base para el estudio del comportamiento asintótico de la solución de una EDR.

Los trabajos iniciales de las formas canónicas para algunas ecuaciones diferenciales funcionales fueron desarrollados por T. Kato y J. B. Mcleod [4], quiénes usaron la sustitución logarítmica para obtener una forma canónica para la ecuación,

$$y'(x) = py(x) + qy(\lambda x), \quad x \in [0, +\infty[.$$

Jan Cemárk [2], estudia las formas canónicas para una ecuación diferencial funcional de la forma,

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y(\tau(x)), \quad x \in I = [0, +\infty[$$

en donde $\tau(x) < x$, para cada $x \in I$, y no interseca a la función identidad $y = x$ en su dominio.

Asimismo, recientemente se tiene los trabajos de H. Brunner y Stefano Maset [1] quienes estudian la ecuación diferencial con retardo,

$$\begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t), y(t - \tau(t))), \quad t \geq t_0 \\ y(t) & = g(t), \qquad\qquad\qquad\qquad t \leq t_0 \end{cases}$$

y realizan el cambio de variable $t = \alpha(s)$, con el que la ecuación diferencial de retardo es transformada a una ecuación con retardo constante.

El desarrollo del presente trabajo encuentra su principal motivación en dar respuesta a la siguiente pregunta ¿cómo extender una teoría cualitativa para ecuaciones diferenciales con retardo no constante? La respuesta a dicha interrogante se basa en buscar las herramientas que permitan transformar una EDR con retardo no constante a una EDR con retardo constante (Formas Canónicas), dado que para esta última existen diversos resultados que abordan una teoría cualitativa.

En este trabajo, se estudia la ecuación diferencial funcional de la forma,

$$F(x, y(x), y(\tau(x)), y'(x)) = 0, \tag{1}$$

considerando un retardo no constante $\tau = \tau(x)$, y se establecerán las condiciones bajo las cuales una ecuación de la forma (1) se puede transformar a una forma canónica, es decir una EDR que presente retardo constante.

2. Preliminares

A continuación, se brindará los conceptos básicos para un mejor entendimiento del planteamiento del problema. Se han usado las referencias [9], [7], [11], [8] y [10].

2.1. Ecuaciones Diferenciales con Retardo

Una ecuación diferencial con retardo (EDR) es una ecuación diferencial en el que la variación de la variable de estado que se estudia, depende en cada instante t, no solo de los valores que toma en el presente, sino también de los valores de la función en instantes anteriores.

Esto es, una EDR es de la forma

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \tag{2}$$

donde $\tau > 0$ es el retardo, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ y f es una función adecuada.

Se presenta los siguientes casos:

Si $\tau = \tau_0$ es constante, se dirá que la EDR (2) es de retardo constante.
Si $\tau = \tau(t)$, se dirá que la EDR (2) es con retardo dependiente del tiempo.
Si $\tau = \tau(y(t))$, será una EDR dependiente de la variable de estado.

Ejemplos de EDRs 2.1

Modelo Poblacional de Hutchinson

Este modelo es dado por,

$$x'(t) = rx(t)[1 - \frac{x(t-\tau)}{k}],$$

donde el retardo está representado por τ, y representa la edad de máxima capacidad reproductiva de un individuo de la población, ver [9].

Modelo de Nazarenko

$$x'(t) + px(t) - \frac{qx(t)}{r + x^n(t-\tau)} = 0,$$

donde, $p, q, r, \tau \in]0, +\infty[, n > 0, q/p > r$, ver [7].

El modelo describe una dinámica de control para una sola población de células sanguíneas.

Modelo de Mackey-Glass (Modelo de producción de células sanguíneas) , ver [11]

$$x'(t) = -\alpha x(t) + \beta \frac{x(t-\tau)}{(1 + (x(t-\tau))^n)},$$

donde $\alpha, \beta, \tau > 0$.

En este modelo la densidad de las células maduras en la circulación sanguínea está afectada por un retardo τ, el cual representa el tiempo de retraso propio de la maduración de las células inmaduras presentes en la médula ósea.

2.2. Cambio de Variable

Consideremos la ecuación funcional

$$F(x, \mu(x), \mu(\tau(x))) = 0 \tag{3}$$

definida para funciones $\mu : X \to Y$, donde X e Y son conjuntos arbitrarios.

Para propósitos de simplificar los cálculos al resolver (3) es posible buscar cambios de variables adecuados, que permitan reducir la ecuación planteada en una ecuación más simple,

$$L(\sigma^{-1}(t), \psi(t), \psi(g(t))) = \nu(0) \tag{4}$$

siempre que existan funciones biyectivas $\sigma : X \to S$ y $\nu : Y \to T$ tales que,

$$\sigma(\tau(x)) = g(\sigma(x)) \tag{5}$$

$$\nu(F(x, y, z)) = L(x, \nu(y), \nu(z)) \tag{6}$$

donde $t = \sigma(x)$ y la nueva función desconocida $\psi : S \to T$ está relacionada con μ mediante $\psi = \nu \circ \mu \circ \sigma^{-1}$.

Cuando las ecuaciones (5) y (6) se obtienen para funciones lineales g y L, decimos que se trata de una linealización.

Definición 2.2.1. Consideremos la ecuación diferencial funcional con retardo, de la forma

$$F(x, y(x), y(\tau(x)), y'(x)) = 0 \tag{7}$$

definida sobre un intervalo $I = [x_0, +\infty[$ y con retardo no constante

$$\tau(x), \tau \in C^1(I), \tau(x) < x, \tau'(x) > 0, \forall x \in I.$$

Decimos que la ecuación (7) es transformada a una ecuación diferencial funcional con retardo constante,

$$G(t, z(t), z(t + c), z'(t)) = 0 \tag{8}$$

con respecto al cambio de la variable independiente $x \to t = \varphi(x)$ si la función z tal que $z(t) = y(x) = y(\varphi^{-1}(t))$ es una solución de la ecuación (8), siempre que $y(x)$ es una solución de (7).

3. Formas Canónicas para Ecuaciones Diferenciales con Retardo

Esta sección esta organizada de la siguiente manera:

En la primera parte se busca una función φ adecuada que permita el cambio de la variable independiente x en la nueva variable independiente t.

A continuación se establecen las condiciones que aseguran la existencia y unicidad de dicha función φ.

Finalmente, se enuncia el teorema que da respuesta al objetivo del presente trabajo, y cuya demostración se basa en los resultados obtenidos en las dos primeras partes.

3.1. Notación

Dado un entero k,

$\tau^k(x)$ denota la $k-$ésima iteración de $\tau(x)$, para $k > 0$.

$\tau^{-k}(x)$ denota la $k-$ésima iteración de $\tau^{-1}(x)$, para $k > 0$.

$\tau^0(x) = x$.

Observaciones 3.1

- Con las condiciones planteadas para τ, según (7), la función τ^{-1} está definida, y desde que $\tau'(x) > 0$, se obtiene que τ^{-1} es creciente sobre I.

  Luego, de $\tau(x) < x$ implica que $\tau^{-1}(\tau(x)) < \tau^{-1}(x)$

  de allí, $x < \tau^{-1}(x)$.

  Así se tiene que es posible construir una sucesión creciente de puntos a través de iteraciones sucesivas de τ^{-1}.

- Se denota
$$x_j = \tau^{-j}(x_0), \quad j = -1, 0, 1, ... \tag{9}$$

3.2. La ecuación funcional de Abel

En este trabajo se ha planteado la ecuación diferencial funcional (7) con retardo no constante.

El objetivo es expresar (7) en una ecuación diferencial con variable de retardo constante; es decir de la forma (8), con lo que el camino a seguir es realizar un cambio de la variable independiente x, dado por

$$t = \varphi(x). \tag{10}$$

Paso 1: Consideremos $y(x)$ una solución de (7)

Paso 2: Construimos

$$z(t) = y(\varphi^{-1}(t)) = y(x). \tag{11}$$

la cual se busca que sea una solución de (8), es decir, deberá de cumplir que y evaluada en $\tau(x)$ sea transformada en una solución z evaluada en $(t + c)$.

Esto es,

$$y(\tau(x)) = z(t + c). \tag{12}$$

de (10) y (11), $y(x) = z(\varphi(x))$, luego $y(\tau(x)) = z(\varphi(\tau(x)))$,

así, de (12) se obtiene que $z(t + c) = z(\varphi(\tau(x)))$

con lo que de (10) se tiene,

$$z(\varphi(x) + c) = z(\varphi(\tau(x))). \tag{13}$$

Por otro lado,

$$y'(x) = \frac{dz}{dt}.\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{dz}{dt}.\frac{1}{\frac{dx}{d\varphi(x)}} = z'(t).\frac{1}{\frac{d\varphi^{-1}(t)}{dt}}$$

es decir,

$$y'(x) = z'(t).\frac{dt}{d\varphi^{-1}(t)} \tag{14}$$

Por lo tanto, de (11), (12) y (14) se concluye que es posible transformar la ecuación (7) en una ecuación de la forma (8), a través de un cambio φ en la variable independiente, y tal que cumpla (13).

Se observa que, encontrar una función φ que verifique (13) se reduce a hallar funciones φ, con las condiciones adecuadas, tal que

$$\varphi(\tau(x)) = (\varphi(x) + c) \tag{15}$$

esta última ecuación es llamada la ecuación funcional de Abel.

3.3. Existencia y Unicidad de la función φ

Se inicia esta etapa mencionando que a fin de que el cambio de la variable independiente a través de φ transforme el retardo $\tau(x)$ de (7) en otro retardo de la forma $(t + c)$, será necesario que $\varphi'(x) > 0$ sobre I.

En efecto,

Dado que φ es creciente, se tendrá que la función inversa φ^{-1} está definida. Luego se aplica φ^{-1} a ambos miembros de la igualdad (15),

$$\varphi^{-1}(\varphi(\tau(x))) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + c)$$

así, se tiene que,

$$\tau(x) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + c) \tag{16}$$

por la condición $\tau(x) < x$ planteada para τ , de (16) se tiene,

$$x > \varphi^{-1}(\varphi(x) + c) \tag{17}$$

desde que φ es creciente, de (17) se tiene,

$$\varphi(x) > (\varphi(x) + c),$$

de (10), resulta $t > t + c$.

Por tanto, $(t + c)$ es una variable de retardo constante.

3.3.1. Construcción de φ.

Desde que $\tau(x_0) < x_0$, y de (9) se ha denotado $x_{-1} = \tau(x_0)$; así se tendrá el primer intervalo, $I_0 = [x_{-1}, x_0]$; además por la notación 3.1 se ha considerado $\tau^0(x_0) = x_0$. La construcción de la función φ será por intervalos y teniendo en cuenta que según (9), se ha construido una sucesión creciente de puntos, a través de τ^{-1}. A continuación se tiene,

Primero, se considera una función inicial φ_0 definida en el intervalo $I_0 = [x_{-1}, x_0]$ que sea de clase C^1, con derivada positiva, y tal que verifique las condiciones,

$$\varphi_0(x_{-1}) = \varphi_0(x_0) + c, \quad c < 0 \tag{18}$$

$$\varphi_0'(x_{-1}) = [\varphi_0(x_0) + c]', \quad c < 0 \tag{19}$$

Segundo, en el siguiente intervalo $[\tau^0(x_0), \tau^{-1}(x_0)]$:

$$\tau^0(x_0) \leq x \leq \tau^{-1}(x_0)$$

y, desde que τ es creciente y $\tau^0(x_0) = x_0$ resulta,

$$\tau(x_0) \leq \tau(x) \leq x_0,$$

así, en $I_1 = [\tau^0(x_0), \tau^{-1}(x_0)]$ se define,

$$\varphi(x) = \varphi_0(\tau(x)) - c, \tag{20}$$

de esta manera se procede con la construcción de φ en cada intervalo I_n.

Así se define,

$$\varphi(x) = \varphi_0(\tau^n(x)) - nc, \quad \tau^{-(n-1)}(x_0) \leq x \leq \tau^{-n}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{21}$$

Afirmación 1: φ es continua en $I = \bigcup I_n; \quad n \geq 0$.

De la continuidad de φ_0 y τ, se tiene que φ así definida es continua en cada intervalo I_n, solo resta probar la continuidad en los extremos de I_n.

Veamos la continuidad de φ en x_0:

En efecto,

$$\lim_{x_0^-} \varphi(x) = \lim_{x_0^-} \varphi_0(x)$$

y de la continuidad de φ_0 en I_0, se obtiene

$$\lim_{x_0^-} \varphi(x) = \varphi_0(x_0)$$

Por otro lado,

$$\lim_{x_0^+} \varphi(x) = \lim_{x_0^+}(\varphi_0(\tau(x)) - c) \tag{22}$$

de la continuidad de φ_0 en I_0, y de (18) se obtiene de (22),

$$\lim_{x_0^+} \varphi(x) = (\varphi_0(\tau(x_0)) - c) = \varphi_0(x_0)$$

Luego, φ es continua en x_0.

En general, sea n fijo (arbitrario), veamos la continuidad de φ en $x_n = \tau^{-n}(x_0)$

En efecto, de (21)

$$\lim_{x_n^-} \varphi(x) = \lim_{x_n^-} \varphi_0(\tau^n(x)) - nc = \lim_{\tau^n(x_n)^-} \varphi_0(\tau^n(x)) - nc \tag{23}$$

de la continuidad de φ_0 en I_0, y desde que $\tau^n(x) \in I_0$, y $\tau^n(x_n) = x_0$, resulta que, de (21) en (23),

$$\lim_{x_n^-} \varphi(x) = \varphi_0(\tau^n(x_n)) - nc = \varphi(x_n).$$

Análogamente,

$$\lim_{x_n^+} \varphi(x) = \lim_{x_n^+} \varphi_0(\tau^{n+1}(x)) - (n+1)c = \varphi_0(\tau^{n+1}(x_n)) - (n+1)c = \varphi(x_n).$$

Así, se tiene que φ es continua en x_n, (n fijo arbitrario)

Por lo tanto, φ es continua en $I = \bigcup I_n; n \geq 0$.

Afirmación 2: $\varphi(x) \in C^1(I_{-1}),\ I_{-1} = [\tau(x_0), +\infty[$.

En efecto: veamos que, $\varphi(x) \in C^1([\tau^{-(n-1)}(x_0), \tau^{-n}(x_0)[\ ),\quad n \geq 0$

Por inducción matemática,

$n = 0 : \tau(x_0) \leq x \leq x_0$ y $\varphi(x) = \varphi_0(x) \in C^1([\tau(x_0), x_0])$

$n = h : \varphi(x) \in C^1([\tau^{-(h-1)}(x_0), \tau^{-h}(x_0)[\ )$ (hipótesis inductiva).

Sea, $\tau^{-h}(x_0) \leq x < \tau^{-(h+1)}(x_0)$

luego $\tau(\tau^{-h}(x_0)) \leq \tau(x) < \tau(\tau^{-(h+1)}(x_0))$

entonces, $\tau^{-(h-1)}(x_0) \leq \tau(x) < \tau^{-h}(x_0)$

Por tanto, de la hipótesis inductiva,

$$\varphi(\tau(x)) \in C^1([\tau^{-(h-1)}(x_0), \tau^{-h}(x_0)[\ ). \tag{24}$$

Por otro lado, para $\tau^{-h}(x_0) \leq x < \tau^{-(h+1)}(x_0)$,

$$\varphi(x) = \varphi_0(\tau^{h+1}(x)) - (h+1)c = \varphi_0(\tau^h(\tau(x)) - hc - c = \varphi(\tau(x)) - c, \tag{25}$$

de (24) y (25), se tiene

$$\varphi(x) = \varphi(\tau(x)) - c \in C^1([\tau^{-(h-1)}(x_0), \tau^{-h}(x_0)[\ )$$

se denota $g = \varphi \circ \tau$,

así se tiene, $\varphi(x) \in C^1([\tau^{-h}(x_0), \tau^{-(h+1)}(x_0)[\ )$.

Solo resta demostrar, $\lim_{x_n^-} \varphi^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x_n), k = 0, 1$

El caso $k = 0$, es inmediato, del hecho que φ es continua en I.

Para el caso $k = 1$, se considera n fijo (arbitrario):

$$\lim_{x_n^-} \varphi'(x) = \lim_{x_n^-} [\varphi_0(\tau^n(x)) - nc]' = \lim_{\tau^n(x_n)^-} [\varphi_0(\tau^n(x)) - nc]' \tag{26}$$

desde que $\varphi_0 \in C^1(I_0)$ y de (21) en (26) se tiene

$$\lim_{x_n^-} \varphi'(x) = \left[\varphi_0(\lim_{\tau^n(x_n)^-} \tau^n(x)) - nc\right]' = [\varphi_0(\tau^n(x_n)) - nc]' = \varphi'(x_n).$$

Análogamente,

$$\lim_{x_n^+} \varphi'(x) = \lim_{x_n^+} [\varphi_0(\tau^{n+1}(x)) - (n+1)c]' = \lim_{\tau^{n+1}(x_n)^+} [\varphi_0(\tau^{n+1}(x)) - (n+1)c]' = \varphi'(x_n).$$

Por lo tanto, $\varphi(x) \in C^1(I_{-1}),\ I_{-1} = [\tau(x_0), +\infty[$.

Afirmación 3: φ es solución de la ecuación funcional de Abel

En efecto,

Sea $x \in [\tau^{-(n-1)}(x_0), \tau^{-n}(x_0)] = I_n$,

es decir, $\tau^{-(n-1)}(x_0) \leq x \leq \tau^{-n}(x_0)$, entonces $\tau(\tau^{-(n-1)}(x_0)) \leq \tau(x) \leq \tau(\tau^{-n}(x_0))$

luego, $\tau^{-(n-2)}(x_0) \leq \tau(x) \leq \tau^{-(n-1)}(x_0)$,

de allí, $\varphi(\tau(x)) = \varphi_0(\tau^{n-1}(\tau(x))) - (n-1)c = \varphi_0(\tau^n(x)) - nc + c = \varphi(x) + c$.

Por lo tanto, se verifica la ecuación funcional de Abel (15).

Afirmación 4: φ es solución única

En efecto,

Supongamos que, $\exists\ \overline{\varphi}(x) \in C^1[\tau(x_0), +\infty[$ tal que $\overline{\varphi}(x) = \varphi_0(x);\ \forall x \in [\tau(x_0), x_0]$ y tal que $\overline{\varphi}(x) \neq \varphi(x)$ en $[\tau(x_0), +\infty[$.

De $\overline{\varphi}(x) \neq \varphi(x)$ en $[\tau(x_0), +\infty[$, entonces $\exists m \in [\tau(x_0), +\infty[$ tal que

$$\overline{\varphi}(m) \neq \varphi(m) \tag{27}$$

Caso 1) Si $m \in [\tau(x_0), x_0[$ entonces $\overline{\varphi}(m) = \varphi(m)$, lo cual es una contradicción con (27)

Caso 2) $m \in [\tau^{-(n-1)}(x_0), \tau^{-n}(x_0)]$:

$$\tau^{-(n-1)}(x_0) \leq m \leq \tau^{-n}(x_0)$$

$\rightarrow \tau^n(\tau^{-(n-1)}(x_0)) \leq \tau^n(m) \leq \tau^n(\tau^{-n}(x_0))$

$\rightarrow \tau(x_0) \leq \tau^n(m) \leq x_0$

$\rightarrow \overline{\varphi}(\tau^n(m)) = \varphi_0(\tau^n(m))$ y $\varphi(\tau^n(m)) = \varphi_0(\tau^n(m))$

Luego,

$$\overline{\varphi}(\tau^n(m)) = \varphi(\tau^n(m)) \tag{28}$$

Por otro lado, desde que $\overline{\varphi}$ y φ verifican la ecuación de abel, se tiene que,

$$\begin{aligned} \varphi(\tau(x)) &= \varphi(x) + c \\ \overline{\varphi}(\tau(x) &= \overline{\varphi}(x) + c \end{aligned} \tag{29}$$

de donde, una simple prueba de inducción matemática muestra que,

$$\varphi(\tau^n(m)) = \varphi(m) + nc \tag{30}$$

análogamente, (30) se cumple para $\overline{\varphi}$,

luego de (28) y (30), $\overline{\varphi}(m) + nc = \varphi(m) + nc$.

Luego, $\overline{\varphi}(m) = \varphi(m)$, lo cual contradice (27).

Afirmación 5: $\varphi'(x) > 0, \forall x \in I = [\tau(x_0), +\infty[$.

La positividad de φ' en I es inmediata, desde que de (21), $\varphi'(x) > 0, \forall x \in I_n$.

Con los resultados obtenidos en 3.3, se enuncia la siguiente poposición.

***Proposición* 3.3.1** Sea $\tau(x) \in C^1(I), I = [x_0, +\infty[$ tal que $\tau(x) < x$ y $\tau'(x) > 0, \forall x \in I$. Entonces, dada una función inicial $\varphi_0(x) \in C^1([\tau(x_0), x_0])$ tal que $\varphi_0'(x) > 0, \forall x \in [\tau(x_0), x_0]$ y

$$\varphi_0^{(s)}(\tau(x_0)) = [\varphi_0(x_0) + c]^{(s)}; s = 0, 1$$

existe una única solución $\varphi(x) \in C^1(I_{-1})$ de la ecuación funcional de Abel (15) tal que $\varphi'(x) > 0$, $\forall x \in I_{-1} = [\tau(x_0), +\infty[$ y $\varphi(x) = \varphi_0(x), \forall x \in [\tau(x_0), x_0]$.

Demostración:
Se sigue de las afirmaciones 1 al 5 de la sección 3.3.

Más aún, con lo desarrollado en 3.2 se ha establecido el cambio de variable adecuado que permite cambiar la ecuación diferencial con retardo no constante (7) en una ecuación con retardo constante (8).

Se concluye entonces el siguiente teorema.

***Teorema* 3.3.1** Sea $\tau \in C^1(I)$, tal que $\tau(x) < x$; y $\tau'(x) > 0, \forall x \in I = [x_0, +\infty[$. Entonces la ecuación diferencial (7) con retardo no constante $\tau = \tau(x)$ puede ser transformada en una ecuación diferencial con retardo constante (8) sobre el intervalo $I_{-1} = [\tau(x_0), +\infty[$; a través de un cambio de la variable independiente $x \to t = \varphi(x)$, donde $\varphi \in C^1(I)$, $\varphi'(x) > 0$, $\forall x \in I$.

Demostración:
La demostración se sigue de los resultados obtenidos en la sección 3.2 y de la proposición 3.3.1

4. Conclusiones

En el presente trabajo, se establecen las condiciones necesarias que permiten realizar un cambio en la variable independiente del problema planteado originalmente para reducirlo a su forma canónica, dicho cambio de variable resultó ser la solución de una ecuación de Abel.

La importancia de este estudio radica en que al obtener una EDR en su forma canónica, conoceremos el comportamiento asintótico de las soluciones de una EDR, y así poder establecer sistemas de control, como por ejemplo en la propagación de enfermedades, dinámica de poblaciones, sistemas climáticos, dinámica de extracción de gas de las minas, etc. Ver [3], [5].

Asimismo, a partir de una función inicial se construye un método iterativo para obtener aproximaciones de la función que resuelve la ecuación de Abel.

Un estudio futuro, consecuencia de lo desarrollado, sería implementar un algoritmo que genere la solución de la ecuación de Abel, y hacer una implementación computacional de dicho algoritmo. Los resultados obtenidos en el presente artículo y la generalización de los mismos son parte de la tesis de maestría (en proceso de culminación) desarrollado por M.G. Pescorán.

Referencias

[1] Brunner, H., & Maset, S. (2009). *Time transformations for delay differential equations.* Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A, 25(3), 751-775.

[2] Cermak, J. (2000). *Note on canonical forms for functional differential equations.* Mathematica Pannonica, 29, 39.

[3] Huang, J., Zhang, A., Sun, H., Shi, S., Li, H., & Wen, B. (2018). *Bifurcation and Stability Analyses on Stick-Slip Vibrations of Deep Hole Drilling with State-Dependent Delay.* Applied Sciences, 8(5), 758.

[4] Kato, T., & McLeod, J. B. (1971). *The functional-differential equation* AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 77(6).

[5] Keane, A., Krauskopf, B., & Dijkstra, H. A. (2019). *The effect of state dependence in a delay differential equation model for the El Niño Southern Oscillation* Philosophical Transactions of the Royal Society A, 377(2153), 20180121.

[6] Kuang, Y. (Ed.) (1993). *Delay differential equations: with applications in population dynamics.* Academic press.

[7] Kubiaczyk, I., & Saker, S. H. (2002). *Oscillation and stability in nonlinear delay differential equations of population dynamics. Mathematical and computer modelling*, 35(3-4), 295-301.

[8] Kuczma, M., Choczewski, B., & Ger, R. (1990). *Iterative functional equations (No. 32)* Cambridge University Press.

[9] Liz, E. (2006). *Sobre ecuaciones diferenciales con retraso, dinámica de poblaciones y números primos. Materials matemãtics*, 0001-24.

[10] Neuman, F. (1981). *On transformations of differential equations and systems with deviating argument.* Czechoslovak Mathematical Journal, 31(1), 87-90.

[11] Smith, H. L. (2011). *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences (Vol. 57).* New York: springer.