PESQUIMAT 26(1): 45–70 (2023)
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v26i1.24815

ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

El grupo límite como un álgebra de Hopf

Wilfredo Mendoza Quispe [1]***, Sofia Irena Duran Quiñones*** [2] ***y Gabriel Andre Asmat Medina*** [3]

Resumen: En este trabajo presentaremos preliminarmente la definición de H-espacios, seguidos de ellos estudiaremos la sucesión espectral de Bockstein que conjuntamente con las parejas exactas nos permitirá definir, el denominado grupo límite asociado a cada sucesión espectral. También hacemos una revisión de las propiedades de complejos de cadenas y la homología de complejo de una cadena elemental. En la última sección exponemos la sucesión espectral de Bockstein para H-espacios y algebras de Hopf. En este contexto probamos que el grupo límite se puede expresar isomorficamente como un algebra de Hopf.
Palabras clave: H-espacio, sucesión espectral de Bockstein, parejas exactas, complejos de cadenas, Homología de complejo algebras de Hopf.

The limit group as a Hopf algebra

Abstract: In this work we will preliminarily present the definition of H-spaces, followed by them we will study the Bockstein spectral sequence that together with the exact pairs will allow us to define the so-called limit group associated with each spectral sequence. We also review the properties of string complexes and the complex homology of an elementary string. In the last section we present the spectral Bockstein sequence for H-spaces and Hopf algebras. In this context we prove that the limit group can be expressed isomorphically as a Hopf algebra.

Keywords: H-space, Bockstein spectral sequence, exact pairs, chain complexes, Homology of complex Hopf algebras.

Recibido 18/02/2023 *Aceptado 14/03/2023* *Publicado online 30/06/2023*

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: wmendozaq@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: sduranq@unmsm.edu.pe
[3]UNAC, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, e-mail: gaasmatm@unac.edu.pe

1. Introducción

Recordando que un H-espacio es un espacio topológico X con punto base, juntamente con una operación binaria $m : X^2 \to X$ llamada multiplicación tal que el punto base actúa como una identidad a izquierda y derecha son ejemplos clásicos de H-espacios.

El espacio de lazos, los complejos de Eilemberg - Maclane y así podemos enumerar una serie de muchos ejemplos. También podemos hablar de H-espacio finito que, por definición es homotopicamente equilavente a un CW-complejo con un número finito de celdas, y en terminos locales un H-espacio módulo p-finito es un H-espacio, a menos de p-complementación.

Las propiedades topológicas de los H-espacios han sido estudiados por muchos autores, particularmente la homología y homotopía de grupos. El caso de los grupos de Lie han sido investigados intensamente con resultados muy fructíferos obtenidos por métodos especiales para este grupo. En este paper obtenemos demostraciones de algunos teoremas, usando métodos homológicos. Diferente a otras demostraciones lo cual hace fuerte usar la estructura infinitesimal de grupos de Lie, las pruebas dadas dependen solamente de la estructura homológica y que puede ser aplicado a H-espacios cuya homología es finitamente generada.

Si X es un H-espacio simplemente conexo cuya homología es finitamente generada, entonces por el teorema de Hopf sobre algebras de Hopf se tiene $H^2(X;\mathbb{R}) = 0$ y de aqui $\pi_2(X)$ es finito. El argumento mostraría que un elemento de $x \in H^2(X;\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tiene una altura infinita ($x^n \neq 0$ para todo n) lo cual contradice la hipotesis de homologia finitamente generada. Ahora si $\pi_2(X) \neq 0$, entonces $H_2(X, \mathbb{Z}_p) \neq 0$ para algún primo p.

Los modelos o ejemplos conocidos de H-espacios cuya homología es finitamente generada son: la 7-esfera es decir S^7, el 7-espacio proyectivo real P^7, y producto de estos, que todos son variedades. Se muestra que para un H-espacio X con $H_*(X)$ finitamente generada, la mas alta dimensión del grupo no cero $H_n(X)$ es isomorfico al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$.

Parte de este propósito es para estudiar ciertas algebras de Hopf surgiendo de un H-espacios X, aplicando un funtor llamado la sucesión espectral de Bockstein, el cual es un funtor de complejos de cadenas que origina una sucesión espectral midiendo la p-torsión de la homología su naturaleza funtorial le produce o da ventajas sobre la formulación clasica de los operadores de Bockstein de orden superior. En el caso del complejo de cadenas de un H-espacio, la sucesión espectral de Bockstein es una sucesión espectral de algebras de Hopf, la sucesión espectral para cadenas y cocadenas siendo algebras de Hopf duales.

En la sección 2 presentamos la definición de los H-coespacios, con algunos ejemplos y proposiciones basicas. En la sección 3 definimos la sucesión espectral de Bockstein con sus respectivas propiedades, asi como las parejas exactas que permite la existencia y por ende su definición del llamado "**grupo límite**".

En la sección 4 discutimos las propiedades de complejos de cadenas con algunas proposiciones referente a homología con coeficientes. En la sección 5 discutimos la homología de complejo de una cadena elemental y propiedades de la sucesión espectral de Bockstein resumidos en proposiciones y finalmente en la sección 6 presentamos la sucesión espectral de Bockstein para H-espacios y algebras de Hopf y finalizamos dicha sección expresando mediante un teorema al grupo límite como álgebra de Hopf.

2. H-espacios y H-coespacios

A lo largo de esta sección los espacios topologicos serán considerados con un punto base y las aplicaciones continuas son las que preservan punto base. El espacio de funciones que preservan punto base en la topologia compacta abierta será denotado por Y^X.

2.1. Funciones homotópicas

Definición 2.1. *Sean X, Y dos espacios topólogicos, $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Decimos que f* ***es homotópica a*** *g si existe una aplicación continua $H : I \times X \to Y$ tal que $H(0, x) = f(x)$ y $H(1, x) = g(x)$, para todo $x \in X$, donde $I = [0, 1]$. La aplicación H se llama* ***homotopía entre*** *f* ***y*** *g, denotamos por $f \simeq g$ ó $H : f \simeq g$. Para cada $t \in [0, 1]$ se denota $H(t, x)$ por $H_t(x)$ que dá origen a una familia de aplicaciones contínuas $H_t : X \to Y$.*

Lema 2.1. *La relación de homotopía "$\simeq$" es una relación de equivalencia.*

Demostración. Para la reflexividad, bastará definir $H : I \times X \to X$ como $H(t, x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Para la simetría, si $f \simeq g$ entonces existe $H : I \times X \to Y$ tal que $H(0, x) = f(x)$ y $H(1, x) = g(x)$. Ahora definamos una aplicación $G : I \times X \to Y$ tal que $G(t, x) = H(1 - t, x)$ así G : $g \simeq f$. Finalmente para la transitividad, si $f \simeq g$ y $g \simeq h$ entonces existen aplicaciones continuas $H : I \times X \to Y$ y G : $I \times X \to X$, ahora definimos una aplicación $M : I \times X \to Y$ como

$$M(t, x) = \begin{cases} H(2t, x) & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ H(2t - 1, x) & si \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Claramente M es contínua, pues la restricción a cada uno de los conjuntos cerrados $[0, \frac{1}{2}] \times X$ y $[\frac{1}{2}, 1] \times X$ es contínuas. □

Denotaremos por $[X, Y]$ al conjunto de estas clases de homotopía, de este modo un elemento de $[X, Y]$ será denotado por $[f]$ donde $f : X \to Y$ es una aplicación continua.

Definición 2.2. *Un espacio topológico X, es un espacio con un punto base "x_0" elegido en X el cuál escribiremos como (X, x_0). Sean (X, x_0) y (Y, y_0) dos espacios con punto base una aplicación continua $f : X \to Y$ se dice que preserva punto base si $f(x_0) = y_0$.*

Definición 2.3. *Sea X un espacio topologico y sea $n \geq 0$. El* ***n-ésimo grupo de Homotopía de X con un punto base*** *se denota y define como*

$$\Pi_n(X) = [S^n, X]$$

$\Pi_0(X)$ en general no es un grupo, $\Pi_1(X)$ se denomina ***grupo fundamental*** *de X.*

Proposición 2.1. *Sean X, Y dos espacios topológicos con punto base entonces, se cumple*

$$\Pi_n(X \times Y) = \Pi_n(X) \times \Pi_n(Y), \textit{para } n \geq 0$$

Demostración. Ver [6], para el caso $n = 1$. □

2.2. H-espacios

Definición 2.4. *Sea (Y, y_0) un espacio topologico con punto base. Decimos que Y es un* ***H-espacio*** *si existe una aplicación continua*

$$m : Y \times Y \to Y$$

denominada multiplicación tal que $m \circ i_1 \simeq m \circ i_2 \simeq I_Y$ donde $i_k : Y \to Y \times Y$ para $k = 1, 2$ son las aplicaciones continuas definidas por $i_1(y) = (y, y_0)$, $i_2(y) = (y_0, y)$ y donde además $m(x, x_0) = x = m(x, x_0)$, para todo $x \in X$.
En este caso diremos que Y es:

- ***asociativo homotopicamente****, esto es, $m(m \times 1_Y) \simeq m(1_Y \times m) : Y \times Y \times Y \to Y$ es decir el diagrama conmuta salvo homotopia.*

$$\begin{tikzcd} Y \times Y \arrow[r, "m"] & Y \\ Y \times Y \times Y \arrow[u, "1\times m"] \arrow[r, "m\times 1"] & Y \times Y \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

- ***conmutativo homotópicamente****, es decir, si $T : Y \times Y \to Y \times Y$ es aplicación dada por $T(x, y) = (y, x)$, entonces el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía.*

$$\begin{tikzcd} Y \times Y \arrow[r, "T"] \arrow[d, "m"] & Y \arrow[d, "m"] \\ Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Observación. *Note que el H-espacio Y posee :*

- ***elemento identidad****, pues la aplicación continua constante $e_{y_0} : Y \to Y$ dada como $e_{y_0}(x) = y_0$ para todo $x \in Y$.*
- ***inverso****, pues la aplicación continua $\mathcal{V} : Y \to Y$ tal que: $m(\mathcal{V} \times 1) \simeq m(1 \times \mathcal{V}) \simeq e_{y_0}$ donde $\Delta_Y : Y \to Y \times Y$ es la aplicación diagonal. Es decir el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía.*

$$\begin{tikzcd} & Y \times Y \arrow[r, "\mathcal{V}\times 1"] & Y \times Y \arrow[dr, "m"] & \\ Y \arrow[ur, "\Delta_Y"] \arrow[dr, "\Delta_Y"'] & & & Y \\ & Y \times Y \arrow[r, "1\times\mathcal{V}"] & Y \times Y \arrow[ur, "m"] & \end{tikzcd}$$

Si Y es un H-espacio asociativo con inverso, escribiremos que Y es HAI.

Proposición 2.2. *Sea X un espacio topológico e Y un H-espacio asociativo con inverso. Entonces $[X, Y]$ es un grupo*

Demostración. Sean $[f], [g] \in [X, Y]$. Definimos $[f] \cdot [g] = [m(f \times g)\Delta x]$. Observe el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} & & Y \\ X \arrow[urr, "m(f\times g)\Delta x"] \arrow[r, "\Delta x"] & X \times X \arrow[r, "f\times g"] & Y \times Y \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

Afirmación: La operación dada anteriormente está bien definida. En efecto : Sean f',$g' : X \to Y$ otras aplicaciones continuas tal que $f' \simeq f$, $g' \simeq g$; entonces existen aplicaciones continuas $F, G : I \times X \to Y$ tal que $F : f' \simeq f$ y $G : g' \simeq g$. Ahora definimos una homotopía;

$$M : I \times X \times X \to Y \times Y \text{ como } M(t, x_1, x_2) = (F(t, x_1), G(t, x_2))$$

Observe que

- $M(0, x_1, x_2) = (F(0, x_1), G(0, x_2)) = [f'(x_1), g'(x_2)] = (f' \times g')(x_1, x_2)$
- $M(1.x_1, x_2) = (F(1, x_1), G(1, x_2)) = [f(x_1), g(x_2)] = (f \times g)(x_1, x_2)$
- $M(t, x_0, x_0) = (F(t, x_0), G(t, x_0)) = (y_0, y_0)$

Por lo tanto

$$M : f' \times g' \simeq f \times g$$

De aquí resulta que

$$m(f \times g)\Delta x \simeq m(f' \times g')\Delta x$$

luego

$$[f] \cdot [g] = [m(f' \times g')\Delta x]$$

Notación: $f \cdot g = m(f \times g)\Delta x$
Dada una tercera aplicación $h : X \to Y$, tenemos

$$\begin{aligned}
(f \cdot g) \cdot h = m((f \cdot g) \times h)\Delta x &= m(m(f \times g)\Delta x \times h]\Delta x \\
\text{Ahora: } [m(f \times g)\Delta x \times h](x_1, x_2) &= [m(f \times g)\Delta x(x_1), h(x_2)] \\
&= (m(f \times g)(x_1, x_2), h(x_2)) \\
&= (m(f(x_1), g(x_1)), h(x_2)) \\
&= [(m \times 1)(f(x_1), g(x_1)), h(x_2)] \\
&= (m \times 1)((f \times g)(x_1, x_1), h(x_2)) \\
&= (m \times 1)(f \times g \times h)(x_1, x_1, x_2) \\
&= ((m \times 1)(f \times g \times h)(\Delta x \times 1))(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Es decir

$$m(f \times g)\Delta x \times h = (m \times 1)(f \times g \times h)(\Delta x \times 1) \tag{1}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
(f \cdot g) \cdot h &= m[m(f \times g)\Delta x \times h]\Delta x \\
&= m((m \times 1)(f \times g \times h)(\Delta x \times 1)) \\
&\simeq m[(1 \times m)(f \times g \times h)(\Delta x \times 1)] \\
&\simeq m(f \times m(g \times h)\Delta x)\Delta x \\
&= m(f \times (g \times h))\Delta x \\
&= f \cdot (g \cdot h)
\end{aligned} \tag{2}$$

Luego

$$([f] \cdot [g])[h] = [f]([g][h])$$

Como (Y, y_0) es un espacio con punto base, consideremos la aplicación constante $e : X \to Y$ tal que $e(x) = y_0$. Ahora $f \cdot e = m(f \times e)\Delta x = mi_1 f \simeq 1_Y f = f$, ya que $f \cdot e = m(f \times e)\Delta x =$

$m(f\times e)(x,x)=m(f(x),e(x))=m(f(x),y_0)$. Ahora veamos el inverso, definamos $[f]^{-1}=[\mathcal{V}f]$, donde $\mathcal{V}:Y\to Y$. Así:

$$\mathcal{V}f\cdot f=m(\mathcal{V}f\times f)\Delta x=m(u\times 1)\Delta x f$$

es decir

$$\begin{aligned} m(\mathcal{V}f\times f)\Delta x &= m(\mathcal{V}f\times f)(x,x)=m(\mathcal{V}f(x),f(x))=m\times(\mathcal{V}\times 1)(f(x),f(x))\\ &\simeq m(\mathcal{V}\times 1)(f(x),f(x))=m(\mathcal{V}\times 1)\Delta f(x)\end{aligned}$$

□

Definición 2.5. *Dos espacios X e Y son homotópicamante equivalentes; $X\simeq Y$; si existen las aplicaciones contínuas $f:X\to Y$ y $g:Y\to X$ tal que $g\circ f\simeq 1_X$ y $f\circ g\simeq 1_Y$. En este caso se dice que f es una equivalencia homotópica.*

Proposición 2.3. *Si $g:X_0\to X_1$ es una aplicación contínua e Y es un H-espacio asociativo con inverso entonces $g^*:[X_1,Y]\to[X_0,Y]$ es un homomorfismo. Ahora si "g" es una equivalencia homotópica, entonces g^* es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $f:X_1\to Y$ así $f\circ g:X_0\to Y$. Definamos $g^*([f])=[f\circ g]$. Considere $[f_1]$,$[f_2]\in[X_1,Y]$. Tenemos $f_1\cdot f_2=m(f_1\times f_2)\Delta x$. Entonces

$$f_1\cdot f_2 g=m(f_1\times f_2)\Delta g=m(f_1\times f_2)(g\times g)\Delta=m(f_1g\times f_2g)\Delta=f_1g\cdot f_2g$$

Ahora:

$$g^*([f_1][f_2])=g^*([f_1f_2])=[f_1\cdot f_2\circ g]=[f_1g\cdot f_2g]=[f_1g]\cdot[f_2g]=g^*([f_1])\cdot g^*([f_2])$$

Por lo tanto g^* es un homomorfismo. □

2.3. H-COESPACIOS (CO-H-ESPACIOS)

Definición 2.6. *Un espacio X es un H-espacio (H-coespacio llamado también CO-H-espacio) si existe una aplicación continua $u:X\to X\vee X$, tal que $p_1\cdot u\simeq p_2\cdot u\simeq 1_X$, donde $X\vee X=\{X\times x_0\cup\{x_0\}\times X\}$ y p_1, p_2 son las restricciones a $X\vee X$ de las aplicaciones proyección: $\Pi_1:X\vee X\to X$ tal que $\Pi_1(x,z)=x$ y $\Pi_2:X\vee X\to X$ tal que $\Pi_2(x,z)=z$.*

Un H'-espacio es asociativo o coasociativo si $(u\vee 1)u\simeq(1\vee u)u:X\to X\vee X\times X$; es decir el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía.

$$\begin{tikzcd} X\vee X \arrow[r, "u\vee 1"] & X\vee X\vee X \\ X \arrow[u, "u"] \arrow[r, "u"'] & X\vee X \arrow[u, "(1\vee u)"'] \end{tikzcd}$$

Una aplicación $\mathcal{V}:X\to X$ es un coinverso homotópico si el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} X & X \arrow[l, "c"'] \arrow[r, "c"] & X \\ X\vee X \arrow[u, "(1_X,\mathcal{V})"] & X \arrow[u, equal] \arrow[l, "u"'] \arrow[r, "u"] & X\vee X \arrow[u, "(\mathcal{V},1_X)"'] \end{tikzcd}$$

conmuta salvo homotopía.
Un H'-espacio X es homotopicamente coconmutativo, si el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} X \vee X \arrow[r, "\tau"] & X \vee X \\ X \arrow[u, "u"] \arrow[r, equal] & X \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo salvo homotopía, donde $\tau(x,y) = (y,x)$
Notación: $H'AI$ co-H espacio asociativo inverso.

Proposición 2.4. *Sea Y un espacio y X un $H'AI$ espacio, entonces $[X,Y]$ tiene estructura de grupo; mas aún si $g : Y_0 \to Y_1$, es una aplicación continua entonces, $g_* : [X, Y_0] \to [X, Y]$ es un homomorfismo de grupos. Ahora si g es una equivalencia homotópica, entonces g_* es un isomorfismo de grupos.*

Demostración: Sean $[f_1], [f_2]$ dos elementos en $[X,Y]$. Definimos $[f_1] \cdot [f_2] = [f_1 \cdot f_2]$ donde $f_1 \cdot f_2 = \bigtriangledown(f_1 \vee f_2)$
Afirmación: La operación dada está bien definida :
En efecto: Sean $f'_j \in [f_j]$ para $j = 1,2$. Entonces $f'_1 \simeq f_1$ y $f'_2 \simeq f_2$. Veamos que $[f_1 \cdot f_2] = [\bigtriangledown(f'_1 \vee f'_2)u]$; pues tenemos $f'_1 \vee f'_2 = f_1 \vee f_2$ luego $\bigtriangledown(f'_1 \vee f'_2)u \simeq \bigtriangledown(f_1 \vee f_2)u$ entonces: $[f_1 \cdot f_2] = [\bigtriangledown(f_1 \vee f_2)u] = [\bigtriangledown(f'_1 \vee f'_2)u]$.
Se Verifican:

(i) $[f_1]([f_2][f_3]) = ([f_1][f_2])[f_3]$

(ii) $[f][e] = [e][f] = [f]$

(iii) $[f][f]^{-1} = [f]^{-1}[f] = [e], \text{donde } [f]^{-1} = [fv]$

También: $g_*([f_1][f_2]) = g_*([f_1]) \cdot g_*([f_2])$
La demostración es rutinaria, similar a lo realizado para H-espacios.

Ejemplo 2.1. *S^1 es un co-H-espacio asociativo con inverso. En efecto: definamos $u : S^1 \to S^1 \vee S^1$, consideremos $I = [0,1]$, $J = [-1,1]$ y sean las aplicaciones $l : I \to J$ tal que $l(t) = 2t-1$, para todo $t \in I$ y $\theta : J \to S^1$ tal que $\theta(t) = (cos(\pi t), sin(\pi t))$, está aplicación induce un homeomorfismo entre: $\frac{I}{\sim} \simeq S^1$;*

$$Definamos\ \gamma :\ I \to S^1 \vee S^1\ como\ \gamma(t) = \begin{cases} \theta l(2\pi,\ *),\ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \\ (*,\ \theta l(2t-1)),\ \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

se requiere que γ sea continua; es decir en $t = \frac{1}{2}$ deben de coincidir.

$$(\theta l(1), *) : \theta l(1) = \theta(1) = (\cos\pi, \sin\pi) = (-1, 0)$$
$$(*, \theta l(0)) : \theta l(0) = \theta(-1) = (\cos(-\pi), \sin(-\pi)) = (-1, 0)$$

entonces: γ es continua con $\gamma(0) = (\theta l(0), *)$ y $\gamma(1) = (*, \theta l(1))$ entonces $\gamma(0) = \gamma(1)$, de este modo γ-induce $\mu : S^1 \to S^1 \vee S^1$
Afirmación: (S^1, u) es un CO-H espacio asociativo con inverso.

En efecto: Consideremos la composición

$$I \xrightarrow{u} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{p_1} S^1 \text{ tal que } p_1\gamma(t) = \begin{cases} \theta l(2t) & , 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \\ * & , \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\theta l : I \to S^1$, es un camino, $C : I \to S^1$ es un camino constante es decir: $C(t) = *$, para todo $t \in I$.

$$(\theta l * C)(t) = \begin{cases} \theta l(2t) & , 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \\ C(2t-1) & , \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$p_1\gamma(t) = \theta l * C$; así $C * \theta \simeq \theta l \simeq \theta l * C$ relativo a $\{0,1\}$ entonces $p_1\gamma \simeq \theta l$ relativo a $\{0,1\}$; pasando a cocientes: $p_1 u \simeq 1_{S^1}$ y $p_2 u \simeq 1_{S^2}$.

- ⊙ Sabemos: $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ entonces $\overline{f} \simeq \overline{g} : \dfrac{X}{A} \to \dfrac{Y}{A}$.
- ⊙ Se cumple de manera rutinaria:
  - (i) $(u \vee 1)u \simeq (1 \vee u)u$.
  - (ii) $\nabla_X(v \vee 1)u \simeq \nabla_X(1 \vee v)u \simeq e_X$; donde $v : S^1 \to S^1$ tal que $v(t) = 1 - t$.

Proposición 2.5. *Sean (X, τ), (Y, τ_1) dos espacios topológicos.*

(I) *Si X o Y es $H'AI$, entonces $X \wedge Y$ es $H'AI$.*

(II) *Si X es T_2-espacio $H'AI$ o Y es HAI entonces Y^X es HAI.*

Demostración.

(I) **(A)** Supongamos que X es $H'AI$ espacio:

Mostraremos que $X \wedge Y$ es $H'AI$. En efecto, tenemos $X \xrightarrow{u} X \vee X \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \begin{matrix} X \\ X \end{matrix}$, $v : X \to X$ inverso, así $p_1 u \simeq 1_X$ y $p_2 u \simeq 1_X$, también se tiene

$$X \wedge Y \xrightarrow{u \wedge 1} (X \vee X) \wedge Y \cong (X \wedge Y) \vee (X \wedge Y)$$

Además $\overline{v} : v \wedge 1 : X \wedge Y \to X \wedge Y$.

Ahora veamos las condiciones que debe verificar $X \wedge Y$ para ser un $H'AI$. Estos son

(i) $\overline{p}_1\overline{u} = \overline{p}_2\overline{u} \simeq 1_{X \wedge Y}$

(ii) $(\overline{u} \wedge 1)\overline{u} \simeq (1 \wedge \overline{u})\overline{u}$

(iii) $\nabla(\overline{v} \vee 1)\overline{u} = \nabla(1 \vee \overline{v})\overline{u} = e_{X \wedge Y}$, donde $e_{X \wedge Y}$ es la aplicación constante.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(X \vee X) \wedge Y \arrow[rr, "g \approx"] \arrow[dr, "p_1 \wedge 1_Y"'] & & (X \wedge Y) \vee (X \wedge Y) \arrow[dl, "\overline{p}_1"] \\
& X \wedge Y &
\end{tikzcd}$$

es decir: $\overline{p}_1 g = p_1 \wedge 1_Y$, entonces

$$\overline{p}_1\overline{u} = \overline{p}_1 g(u \wedge 1_Y) = (p_1 \wedge 1_Y)(u \wedge 1_Y) = p_1 u \wedge 1_Y \simeq 1_X \wedge 1_Y \simeq 1_{X\wedge Y}.$$

Análogamente: $\overline{p}_2\overline{u} \simeq 1_{X\wedge Y}$.

Con argumento similar se prueba: (ii) y (iii).

(B) Para el caso: Cuando Y es $H'AI$, se usa y procede de modo similar a la parte (A).

(II) Supongamos que X es un $H'AI$-espacio y además es de Hausdorff. Tenemos $u : X \to X \vee X$ y $v : X \to X$. Mostraremos que $Y^X = \{f : X \to Y/f$ es función$\}$ es HAI, pues tenemos $Y^X \times Y^X \overset{\psi}{\simeq} Y^{X\vee Y} \xrightarrow{1^u} Y^X$, donde $1^u(f) = 1 \circ f \circ u$ de aquí $\overline{m} = 1^u \circ \psi : Y^X \times Y^X \to Y^X$; ahora definamos para el inverso $\overline{v} = 1^v : Y^X \to Y^X$; con esto veamos que: $(Y^X, \overline{m}, \overline{v})$ es un HAI-espacio; para esto bastará verificar de manera rutinaria las siguientes condiciones:

(i) $\overline{m}\overline{i}_1 \simeq \overline{m}\overline{i}_2 \simeq 1_{Y^X}$

(ii) $\overline{m}(\overline{m} \times 1) \simeq \overline{m}(1 \times \overline{m})$

(iii) $\overline{m}(\overline{v} \times 1)\Delta \simeq \overline{m}(1 \times \overline{v})\Delta = e_{Y^X}$

Finalmente veamos que Y^X es un HAI-espacio siempre que Y lo sea. **En efecto:** Supongamos que X es Hausdorff e Y es un HAI-espacio con multiplicación $m : Y \times Y \to Y$ e inverso $\sigma : Y \to Y$ tenemos $Y^X \times Y^X \underset{\simeq}{\xrightarrow{\psi}} (Y \times Y)^X \xrightarrow{m^1} Y^X$, de aquí: $\overline{m} = m^1 \circ \psi : Y^X \times Y^X \to Y^X$, donde $m^1 \circ \psi = m\, g\, 1$. También $\overline{\sigma} = \sigma' : Y^X \to Y^X$-inverso. Luego $(Y^X, \overline{m}, \overline{\sigma})$ es HAI. □

Definición 2.7. *Sea (X, x_0) un espacio topológico con punto base, la* ***n-ésima suspensión*** *de X se denota y define como:*

$$\Sigma^n X = S^n \wedge X$$

Observación.

(i) $\Sigma X = S^1 \wedge X$ *(suspensión reducida).*

(ii) $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$.

(iii) *Si $X \simeq Y$, entonces $\Sigma X \simeq \Sigma Y$*

(iv) *S^n, $n \geq 1$ es un $H'AI$, es decir, S^n es un CO-H-espacio asociativo con inverso.*

Definición 2.8.

⊙ *Sea (X, τ) un espacio topológico.* ***El espacio de caminos*** *LX, es definido por X^I, es decir: $LX = X^I$, $I = [0, 1]$.*

⊙ ***El espacio de lazos*** *ΩX, está definido por: $\Omega X = X^{S^1}$.*

Ejemplo 2.2. *Para todo espacio topológico X e Y los conjuntos de clases de homotopía: $[\Sigma X, Y]$, $[X, \Sigma Y]$ y $[S^n, Y]$ son grupos.*

3. Sucesiones espectrales

3.0.1. Sucesión espectral:

Sea E un grupo abeliano, $d : E \to E$ un endomorfismo tal que $d.d = 0$ la pareja (E, d) se denomina **grupo diferencial**.

- $Z = Ker(d)$, es el subgrupo de E, llamado subgrupo de ciclos de E.
- $B = Im(d)$, es el subgrupo de E, llamado subgrupo de bordes de E.
- Como $d^2 = 0, B \leq Z$, y así el cociente:

$$H(E) = \frac{Z}{B}$$

  es denominado: **grupo de homología** de (E, d).

Definición 3.1. *Una **sucesión espectral** es una sucesión de grupos diferenciales $\{(E_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+}\}$ tal que: $E_{n+1} = H(E_n)$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Definición 3.2. *Sean $\{(E_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+}\}$ y $\{(E'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}_0^+}\}$ dos sucesiones espectrales. Un **homomorfismo** entre estas sucesiones es una secuencia de morfismos.*

$$f_n : E_n \longrightarrow E'_n$$

tal que:

i) $d'_n f_n = f_n d_n$

ii) f_{n+1} *es la aplicación inducida por* f_n *en homología, para todo* n.

Definición 3.3. *Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y sea p un elemento primo en $\mathbb{Z}$. Un complejo de cadena $\mathbb{E}$ es un $\mathbb{Z}$- módulo graduado (grupo abeliano) es decir:*

$$\mathbb{E} = \sum_k E_k$$

con operador borde d de grado s,

$$d : E_k \longrightarrow E_{k+s} \text{ y } dd = 0$$

Definición 3.4. *Un complejo $\mathbb{E}$ es llamado **libre** si E_k es libre para cada k y $\mathbb{E}$ es **libre torsión** si lo es E_k para cada k*

Observación: Similar a lo denotado y definido anteriormente escribimos $Z =$ núcleo de d (los ciclos), $B =$ imagen de d (los bordes) donde $d : E_k \longrightarrow E_{k+s}$ con $d^2 = 0$ y $\mathbb{E} = \sum_k E_k$ es un $\mathbb{Z}$-módulo graduado.
La homología $\mathbb{H}(E)$ del módulo graduado $\mathbb{E}$ es definido por $\mathbb{H}(E) = \frac{Z}{B}$, y es un módulo graduado.

Definición 3.5. *El **homomorfismo** de **Bockstein** es definido clasicamente como sigue; donde $\mathbb{E}$ es un complejo de cadena libre torsión:*

Sea $x \in \mathbb{H}(E \otimes \mathbb{Z}_p)$, $c \in \mathbb{E}$ una cadena representando x en el sentido que si $j : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \otimes \mathbb{Z}_p$ es reducción módulo "p", entonces $j(c)$ es un ciclo representando x.

De esta manera $d(jc) = j(dc) = 0$, lo cual implica que $dc = pe$, para algún $e \in \mathbb{E}$. Como $d^2 = 0$, tenemos $d^2c = pde = 0$, de donde $de = 0$. Ahora definimos el "primer"homomorfismo "β_1" de Bockstein por: $\beta_1(x) = \{je\}$ (donde $\{.\}$ denota clases de homología), entonces:

$$\beta_1 : \mathbb{H}_k(E \otimes \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathbb{H}_{k+s}(E \otimes \mathbb{Z}_p)$$

está bien definido y $\beta_1^2 = 0$.

En general $dc = p^r e$ con $e \in \mathbb{E}$ para algún r, definimos $\beta_r(x) = \{je\}$, facilmente se puede mostrar que β_r es solamente definido sobre la intersección de los núcleos de $\beta_k, k < r$, su valor está en el cociente por la imagen de $\beta_k, k < r$, y $\beta_r^2 = 0$. En otras palabras una sucesión espectral $\mathbb{E}_r(\mathbb{E})$ puede ser definido inductivamente por $\mathbb{E}_1(\mathbb{E}) = \mathbb{H}(\mathbb{E} \otimes \mathbb{Z}_p)$, $d_1 = \beta_1$ y $\mathbb{E}_{r+1} = \mathbb{E}_r$ con respecto a la diferencial β_r en que β_r, asi una diferencial en una sucesión espectral.

3.1. Parejas exactas

Definición 3.6. *Una **pareja exacta** es un par de grupos abelianos D, E; junto con homomorfismos: α, β y γ tal que el triángulo*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\gamma"'] & \\ D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

es exacto en cada vértice. Es decir una pareja exacta es un triángulo exacto.

- *Si escribimos: $d = \beta\gamma : E \longrightarrow E$ entonces $d^2 = 0$ puesto que: $dd = (\beta\gamma)(\beta\gamma) = \beta(\gamma\beta)\gamma = 0$*

  ***Afirmación:** $Ker(d) = \gamma^{-1}(\alpha(D))$. En efecto: sea $x \in Ker(d)$ si y solo si $d(x) = 0 = \beta\gamma(x)$ si y solo si $\gamma(x) \in Ker(\beta) = Im(\alpha) = \alpha(D)$ si y solo si $x \in \gamma^{-1}(\alpha(D))$.*
  También: la imagen de $d = \beta(Ker(\alpha))$. Por tanto:

$$H(E, d) = \frac{\gamma^{-1}(\alpha(0))}{\beta(Ker(\alpha))}$$

Definición 3.7. *Dada una pareja exacta como en la definición anterior. Definamos la pareja derivada como sigue:*

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[dl, "\gamma_1"'] & \\ D_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & D_1 \arrow[ul, "\beta_1"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} D_1 = \alpha(D) \subset D & E_1 = H(E, d) \\ \alpha_1 = \alpha_{|D_1} & \\ \beta_1(\alpha(x)) = [\beta(x)], & x \in D \\ \gamma_1([y]) = \gamma(y), & y \in E \end{cases}$$

***Afirmación 1:** $\beta(x)$ **es un ciclo:** En efecto $d(\beta(x)) = \beta\gamma(\beta(x)) = \beta(\gamma\beta(x)) = 0$, pues $\gamma\beta = 0$ luego: $\beta(x) \in Ker(d)$; por tanto $\beta(x)$ es un ciclo.*

Afirmación 2: $\beta_1(z)$***; depende solo de*** z ***para*** $z \in D_1$*: En efecto:*
Si $\alpha(x) = \alpha(y)$ *si y solo si* $\alpha(x-y) = 0$ *si y solo si* $x-y \in Ker(\alpha)$ *luego:* $\beta(x)-\beta(y) = \beta(x-y) \in \beta(Ker(\alpha)) = Im(d)$. *Es decir* $\beta(x) - \beta(y) = d(z)$*; para algún* $z \in E$. *Entonces tenemos que:* $[\beta(x)] - [\beta(y)] = [\beta(x) - \beta(y)] = [d(z)] = 0$*; osea que:* $\beta_1(\alpha(x)) = [\beta(x)] = [\beta(y)] = \beta_1(\alpha(y))$

Afirmación 3: $\gamma(y) \in D_1 = \alpha(D)$*: En efecto:*
Como "y" es ciclo, entonces $\beta(\gamma(y)) = d(y) = 0$*, de aquí* $\gamma(y) \in Ker(\beta) = Im(\alpha) = \alpha(D) = D_1$.
Por tanto $\gamma(y) \in D_1$

Afirmación 4:$\gamma(y)$***; depende solo de*** $[y]$. *En efecto:*
Es equivalente a mostrar que: $\gamma(y) = 0$*,si "y" es un borde.*
Si $y = d(x)$*, para* $x \in E$ *entonces* $y = \beta\gamma(x)$*; luego* $\gamma(y) = \gamma(d(x)) = \gamma(\beta\gamma(x)) = \gamma\beta(\gamma(x)) = 0$
(Por exactitud: $\gamma\beta = 0$*)*

Afirmación 5:$\beta_1(\alpha(x))$***; depende solo de*** $\alpha(x)$***:****En efecto:*
Es equivalente a mostrar que: $\beta(x)$ *es un borde si* $\alpha(x) = 0$.
$\alpha(x) = 0$ *si y solo si* $x \in Ker(\alpha) = Im(\gamma)$*; de aquí existe un elemento* $y \in E$ *tal que* $x = \gamma(y)$*, luego* $\beta(x) = \beta(\gamma(y)) = d(y)$ *es decir* $\beta(x)$ *es un borde.*

Proposición 3.1. *El triángulo de la definición 3.6 es exacto en cada vértice.*

Prueba: (i) $Ker(\alpha_1) = Im(\gamma_1)$. En efecto:Sea $x \in Ker(\alpha_1)$ si y solo si $\alpha_1(x) = 0$, $x \in D_1 = Im(\alpha) = Ker(\beta)$, entonces $\beta(x) = 0$. Como $\alpha_1 = \alpha_{|_{D_1}}$, $x \in Ker(\alpha_1) = Ker(\alpha) = Im(\gamma)$ de donde $x \in Im(\gamma)$, así existe $y \in E$ tal que $x = \gamma(y)$, luego $d(y))\beta\gamma(y) = \beta(x) = 0$; esto es: "$y$" es un ciclo. Pasando a clases: $[y] \in E_1$, y es tal que $\gamma_1([y]) = \gamma(y) = x$ luego: $x \in Im(\gamma_1)$. Así $Ker(\alpha_1) \subseteq Im(\gamma_1)\ldots(1)$. De otro lado: $\alpha_1\gamma_1[z] = \alpha\gamma(z) = 0$, entonces $Im(\gamma_1) \subseteq Ker(\alpha_1)\ldots(2)$. De (1) y (2): $Ker(\alpha_1) = Im(\gamma_1)$.

(ii)$Ker(\beta_1) = Im(\alpha_1)$: es equivalente a mostrar: $\beta_1\alpha_1 = 0$
En efecto: $\beta_1\alpha_1(x) = \beta_1(\alpha(x)) = [\alpha(x)]$; con $x \in D_1 = Ker(\beta)$ luego: $\beta(x) = 0$; osea: $Im(\alpha_1) \subseteq Ker(\beta_1)\ldots(I)$

De otro lado: sea $\alpha(x) \in Ker(\beta_1)$, entonces $0 = \beta_1(\alpha(x)) = [\beta(x)]$ es decir $\beta(x)$ es un borde; osea: $\beta(x) \in Im(d) = Im(\beta\gamma)$, entonces existe $y \in E$ tal que $\beta\gamma(y) = \beta(x)$; de aqui: $\beta(\gamma(y) - x) = 0$ luego $\gamma(y) - x \in Ker(\beta)$. Llamemos: $x_0 = \gamma(y) - x$ con $x_0 \in Ker(\beta) = Im(\alpha) = D_1$ así: $\alpha_1(\gamma(y)-x) = \alpha_1(x_0) \in Im(\alpha_1)$, de aquí $\alpha_1(\gamma(y)-x) = \alpha(\gamma(y)-x) = \alpha(\gamma(y)) - \alpha(x) = -\alpha(x)$; entonces: $\alpha(x) \in Im(\alpha_1)$; osea $Ker(\beta_1) \subseteq Im(\alpha_1)\ldots(II)$

De (I) y (II): $Ker(\beta_1) = Im(\alpha_1)$

(iii)$Ker(\gamma_1) = Im(\beta_1)$**:**la prueba es similar a (ii).

Repitiendo este proceso obtenemos una sucesión infinita de parejas exactas. La n-ésima pareja derivada es:

$$\begin{tikzcd}
& E_n \arrow[dl, "\gamma_n"'] & \\
D_n \arrow[rr, "\alpha_n"] & & D_n \arrow[ul, "\beta_n"']
\end{tikzcd}$$

donde:

$$\begin{cases} D_n = \alpha^n(D) = \underbrace{\alpha...\alpha}_{n-veces}(D) \\ E_n = \frac{\gamma^{-1}(\alpha^n(D))}{\beta(Ker\alpha^n)} \\ \alpha_n = \alpha_{|D_n} \end{cases}$$

Afirmación:$\beta_n(\alpha^n(x)) = \beta(x) + \beta(Ker\alpha^n)$ está bien definida.
En efecto: si $\alpha^n(x) = \alpha^n(x')$, entonces $x - x' \in Ker(\alpha^n)$ así: $\beta(x) - \beta(x') = \beta(x - x') \in \beta(Ker(\alpha^n))$, entonces:

$$\gamma_n(y + \beta(Ker(\alpha^n))) = \gamma(y) \in \alpha^n(D) = D_n$$

Ahora: $d_n : E_n \longrightarrow E_n$, con $d_n = \beta_n\gamma_n$, tenemos: $d_n(y+\beta(Ker(\alpha^n))) = \beta_n\gamma_n(y+\beta(Ker(\alpha^n))) = \beta_n(\gamma(y)) = \beta_n(\alpha^n(x)) = \beta(x) + \beta Ker(\alpha^n)$
entonces: $d_n(y + \beta(Ker\alpha^n)) = \beta(x) + \beta(Ker\alpha^n)$.

Definición 3.8. *La sucesión (E_n, d_n) construída "líneas antes"se denomina **sucesión espectral** de la pareja exacta D, E junto con los homomorfismos α, β y γ; lo cual denotamos como (E^n, d^n) es decir $E^{n+1} = H(E^n, d^n)$ para todo n.*

Observación: Asociado a cada sucesión espectral existe un importante **grupo limite** denotado y definido como:

$$E_\infty = \frac{\gamma^{-1}(\bigcap_{n\geq 0} Im(\alpha^n))}{\beta(\bigcup_{n\geq 0} Ker(\alpha^n))}$$

Si tomamos un complejo de cadena libre torsión $E = \sum_k E_k$ y lo tensoramos con la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta de complejos de cadena:

$$0 \longrightarrow E \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{1\otimes i} E \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{1\otimes j} E \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

pero $E \otimes \mathbb{Z} \simeq E$; entonces tenemos la sucesión exacta de complejos.

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

por usuales argumentos de homología, esta secuencia da o produce la pareja (β_0) exacta siguiente:

$$\begin{tikzcd} & H(E \otimes \mathbb{Z}_p) \arrow[dl, "\partial_p"'] & \\ H(E) \arrow[rr, "i_*"] & & H(E) \arrow[ul, "j_*"'] \end{tikzcd}$$

3.2. Sucesión espectral de Bockstein

Definición 3.9. *: La sucesión espectral asociada con la pareja exacta β_0 es denominada la **sucesión espectral de Bockstein** de E módulo "p".*

Observación:
(i)Es fácil comprobar que esta sucesión espectral β_0 es la misma como se definió anteriormente con los diferenciales siendo operadores de Bockstein.
(ii)Como E es graduado y el operador "d" tiene grado "s"; entonces E_r es también graduado y d_r tiene grado "s". Observese además que no existe filtración en esta construcción de la sucesión

espectral.
(iii)Una aplicación $f : E \longrightarrow E'$ de complejos de cadenas libre torsión induce una aplicación de parejas exactas y consecuentemente de sucesiones espectrales.

Sea la aplicación inducida $f_r : E_r(E) \longrightarrow E_r(E')$. Las proposiciones que presentaremos a continuación muestran propiedades fundamentales de la sucesión espectral de Bockstein que serán de gran utilidad.
(iv)Sean C y D dos complejos de cadenas libre, con diferenciales de grado: ± 1, y supongamos que: $H_m(C)$ y $H_m(D)$ son finitamente generados para cada "m" entonces $E_{r+1}(C) = E_r(D)$ para $r-$ suficientemente grande, así que uno puede definir $E_\infty(C)$ como en la observación donde se define E_∞.
(v)La aplicación $j : E \longrightarrow C \otimes \mathbb{Z}_p$ induce la aplicación $j_{(1)} = j_* : H(C) \longrightarrow H(C \otimes \mathbb{Z}_p) = E_1$. Como $Im(j_1) \subseteq Ker(d_1)$, entonces $j_{(1)}$ induce $j_{(2)} : H(C) \longrightarrow E_2$, y así sucesivamente nosotros definimos $j_{(r)} : H(C) \longrightarrow E_r$ inductivamente, puesto que: $Im(j_r) \subseteq Ker(d_r)$.

Como $H_m(C)$ es finitamente generado para cada "m", podemos definir $j_{(\infty)} : H(C) \longrightarrow E_\infty$ por $j_{(\infty)} = j_r$, para r-suficientemente grande: $E_\infty = E_r$.
Las siguientes proposiciones conjuntamente con la definición demuestran algunas propiedades de la sucesión espectral de Bockstein, cuyas demostraciones quedarán justificadas directamente con las proposiciones en la sección (5.1).

Proposición 3.2. *(1) Sea $T = \tau(H(C))$ (subgrupo torsión de $H(C)$), $E_\infty = j_{(\infty)}(H(C))$ y $Ker(j_{(\infty)}) = T + pH(C)$, entonces $E_{(\infty)} = (\frac{H(C)}{T}) \otimes \mathbb{Z}_p$.*

(2) Si $x \in E_r(C), x \neq 0$, entonces existe un elemento $x' \in H(C \otimes \mathbb{Z}_{p^r})$ tal que $x = \{k * x'\}$ donde $k : \mathbb{Z}_{p^r} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$. Si "$y$" genera un sumando directo $\mathbb{Z}_{p^r}$ en $H(C)$ entonces $j_r(y) \neq 0$ en E_r.

Definición 3.10. *: Sean C y D dos complejos de cadenas. El producto tensorial de C y D es definido por:*

$$(C \otimes D)_n = \sum_{i+j=n} C_i \otimes D_j$$

tal que:

$$d(a \otimes b) = d(a) \otimes b + (-1)^{dim(a)} a \otimes (db)$$

- *Si $a \in C \otimes \mathbb{Z}_p, b \in D \otimes \mathbb{Z}_p$ con: $da = db = 0$, entoces la clase de homología de $a \otimes b$ en $H(C \otimes D \otimes \mathbb{Z}_p)$ depende solamente de la clase de homología de a en $H(C)$ y la clase de homología de b en $H(D)$. Así podemos definir una aplicación natural $f : H(C \otimes \mathbb{Z}_p) \otimes H(D \otimes \mathbb{Z}) \longrightarrow H(C \otimes D \otimes \mathbb{Z}_p)...(I)$*
  por $f(\alpha \otimes \beta) = \{a \otimes b\}$; donde $\{a \otimes b\}$ es la clase de homología del ciclo $(a \otimes b)mod(p)$ en $H(C \otimes D \otimes \mathbb{Z}_p)$; y donde $a \in C \otimes \mathbb{Z}_p$ y $b \in D \otimes \mathbb{Z}_p$ son ciclos representando α y β con $\alpha \in H(C \otimes \mathbb{Z}_p)$, $\beta \in H(D \otimes \mathbb{Z}_p)$

  Notese que f es un isomorfismo; pues basta recordar la fórmula de Künneth.

Proposición 3.3. *(i)La aplicación natural "f" dada en I induce una aplicación $f(r)$ de la sucesión espectral de Bockstein. Además $f(r) : E_r(C) \otimes E_r(D) \longrightarrow E_r(C \otimes D)$ es un isomorfismo de complejos de cadenas para todo $r \geqslant 1$*
(ii)Para todo $r \geqslant 1$ se tiene que: $E^r = E_r(Hom(C, \mathbb{Z})) = Hom(E_r(C), \mathbb{Z})$ como complejos de cadenas; donde: $d^r = (d_r)^*$, es el adjunto de d_r

NOTA: La prueba de las proposiciones 3.2 y 3.3 se realizan basado en las técnicas de un complejo descomponiendo sobre subcomplejos elementales que están basados en las proposciones de la sección 5.1

3.3. Propiedades de complejos de cadenas

3.3.1. Notaciones previas:

Los complejos de cadenas consistente en una pareja $\{E = \sum_k E_k, d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, donde E_k son basicamente estructuras algebraicas (grupos, anillos, módulos, algebras, etc) y $d_k : E_k \longrightarrow E_{k-1}$ son morfismos diferenciales según sea la categoría, las que juegan un rol importante en el estudio de la homología (Cohomología). En esta ocasión estudiaremos algunas de sus propiedades. Previamente: denotaremos por E y E' dos complejos de cadenas, "d" de grado "-1" (siendo similar el caso cuando el grado es "$+1$"). Ahora, si: $d : E_n \longrightarrow E_{n-1}$; escribimos $Z_n = Ker(d)$ y $B_n = Im(d)$ para $d : E_{n+1} \longrightarrow E_n$. Similar cuando $d : E'_n \longrightarrow E'_{n-1}$ escribimos $Z'_n = Ker(d)$ y $B'_n = Im(d)$ para $d : E'_{n+1} \longrightarrow E'_n$

Proposición 3.4. *Sea E un complejo de cadena libre y E' un complejo de cadena cualesquiera. Si $\varphi : H(E) \longrightarrow H(E')$ es una aplicación de homología de grupos, entonces existe una aplicación de cadena $f : E \longrightarrow E'$ tal que $f_* = \varphi$*

Demostración. Como E es libre, entonces para cada "n" Z_n y B_n también son libres, de este modo la sucesión:

$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow 0 \tag{3}$$

es exacta. También la sucesión:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow E_n \rightleftarrows B_{n-1} \longrightarrow 0 \tag{4}$$

es exacta y existe una aplicación $\rho : E_n \longrightarrow B_{n-1}$ tal que: $d\rho = 1$, y así la sucesión (4) escinde puesto que B_{n-1} es libre. Y así tenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & H_n(E) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow f & & \big\downarrow f & & \big\downarrow \phi & & \\
0 & \longrightarrow & B'_n & \longrightarrow & Z'_n & \longrightarrow & H_n(E') & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donde f existe, ya que Z_n es libre.
Esto define f en Z_n, y por inducción f es definido en B_{n-1}; así podemos definir f sobre todo E_n y usando la escición de (4). Entonces f conmuta con d; y por tanto se tiene la aplicación requerida. □

Proposición 3.5. *Dado E'; existe un complejo libre E y una aplicación de cadena $f : E \longrightarrow E'$ tal que $f_* : H(E) \longrightarrow H(E')$ es un isomorfismo.*

Demostración. Por la proposición anterior bastará construir un complejo libre teniendo grupos de honología H_n. Para lo cual tomamos una resolución libre de H_n.

$$0 \longrightarrow K_n \xrightarrow{j_n} L_n \longrightarrow H_n \longrightarrow 0$$

Pongamos: $A_n = L_n + K_{n-1}$ y $d(c) = 0$ si $c \in L_n$ y $d(c) = j_{n-1}(c)$ si $c \in K_{n-1}$; y por lo tanto el resultado. □

Proposición 3.6. *Sean E un complejo de cadenas libre, $f : E \longrightarrow E'$ un complejo de cadena y $E_n = Z_n + B_{n-1}$, con la sucesión (4)que escinde.*
Si $g : B_{n-1} \longrightarrow Z'_n$ es una aplicación, defínase $\overline{g} : E_n \longrightarrow Z'_n$ por $\overline{g}(c,b) = g(b)$; entonces $(f+\overline{g})$ es una aplicación cadena y $(f+\overline{g})_* = f_* : H(E) \longrightarrow H(E')$

Demostración. Resulta inmediato al aplicar la Definición 3.4. □

3.3.2. Homología con coeficientes

Notese que en la proposición inmediata anterior las aplicaciones de homología entera son las mismas, mientras que las aplicaciones inducidas de homología con otros coeficientes pueden ser diferentes. Así en las construcciones de las aplicaciones dadas en la proposición 3.4 podemos obtener diversas aplicaciones en homología con otros coeficientes para la misma aplicación de homología entera.

Proposición 3.7. *(Teorema de coeficientes universal para homología) Sea R un dominio de ideales y C_n un R- módulo libre para todo número entero "n", entonces existe un homomorfismo*

$$\beta : H_n(C,E) \longrightarrow Tor[H_{n-1}(C), G]$$

Para todo entero "n" tal que

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H_n(C,G) \xrightarrow{k} Tor[H_{n-1}(C), G] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta descomponible, y por lo tanto, $H_n(C;G)$ es isomorfo a la suma directa de $H_n(C) \otimes G$ y $Tor[H_{n-1}(C), G$

Demostración: (Ver Sze-Tsen Hu: Álgebra homológica. pag 180)

Proposición 3.8. *Sean E y E' dos complejos de cadenas, donde E' es libre torsión, y "p" un número primo. Sea φ una aplicación de la sucesión de homología exacta para E surgiendo de la sucesión exacta de coeficientes $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$, sobre la sucesión correspondiente para E'. Entonces existe una aplicación de cadena $f : E \longrightarrow E'$ tal que $f_* = \varphi$ como aplicación de sucesiones.*

Demostración. Por la proposición (3.4) podemos elegir una aplicación $h : E \longrightarrow E'$ tal que $h_* = \varphi$ sobre $H(E)$. Si consideramos $\varphi - h_*$ como una aplicación de la sucesión exacta corta surgiendo de la proposición anterior.
Escribimos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_n(E) \otimes \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d, "\varphi-h_*"] & H_n(E \otimes \mathbb{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi-h_*"] & Tor(H_{n-1}(E), \mathbb{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi-h_*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H_n(E') \otimes \mathbb{Z}_p \arrow[r] & H_n(E' \otimes \mathbb{Z}_p) \arrow[r] & Tor(H_{n-1}(E'), \mathbb{Z}_p) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Las aplicaciones sobre los términos: Tor y tensor son cero, por tanto $\varphi = h_*$ sobre $H(A)$.
Entonces $\varphi - h*$ define una aplicación $\rho : Tor(H_{m-1}(E), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H_m(E') \otimes \mathbb{Z}_p$ por: $\rho(a) = \alpha^{-1}(\varphi - h_*)(\beta a), a \in Tor(H_{m-1}(E), \mathbb{Z}_p)$ es inmediato verificar que "ρ" está bien definido y $a\rho\beta = \varphi - h_*$.
Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tor}(H_{m-1}(E), \mathbb{Z}_p) \arrow[r, shift left, "\mu"] \arrow[d, "\rho"'] & Bm-1 \otimes \mathbb{Z}_p \arrow[l, shift left, "\tau"] \arrow[dl, "\rho'"] & Bm-1 \arrow[l, "\nu"'] \arrow[d, "\psi"] \\ H_m(E') \otimes \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_p \arrow[l, "\gamma'"] & \mathbb{Z}'_m \arrow[l, "\nu"] \end{tikzcd}$$

Las aplicaciones son definidos como sigue:
a) μ proviene de la sucesión definiendo "Tor":
$0 \longrightarrow Tor(H_{m-1}(E), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mu} B_{m-1} \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_{m-1} \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow H_{m-1}(E) \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$
b) γ' proviene de la sucesión anterior con $H_m(E')$ en reemplazo de $H_m(E)$
c)ν y ν' son las aplicaciones reducción módulo "p"
d) Como μ es uno - a - uno y p es un número primo se tiene que $Tor(H_{m-1}(E), \mathbb{Z}_p)$ es sumando directo de $B_{m-1} \otimes \mathbb{Z}_p$, así existe una aplicación τ escindiendo la sucesión, con $\tau\mu = I_d$
e)$\rho' = \rho\tau$
f) $\gamma'\nu' : Z'_m \longrightarrow H_m(E') \otimes \mathbb{Z}_p$ es sobre y B_{m-1} es libre, de este modo la aplicación $\rho'\nu : B_{m-1} \longrightarrow H_m(E') \otimes \mathbb{Z}_p$ levanta a la aplicación $\psi : B_{m-1} \longrightarrow Z'_m$
Como la sucesión: $0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow E_n \rightleftarrows B_{n-1} \longrightarrow 0$ es exacta y escindible pues $d\rho = I_d$.
Ahora usando esta sucesión como en la proposición (3.6) y considerando $f = h + \psi$; entonces por dicha proposición se tiene que esta es una aplicación de cadena y $f_* = h_*$ de homología entera, luego por la observación anterior $\varphi - f_* = \alpha(\alpha^{-1}(\varphi - f_*)\beta^{-1})\beta$ en $H_m(E \otimes \mathbb{Z}_p)$.
También se puede verificar: $\alpha^{-1}\psi_*\beta^{-1} = \rho$; pero $f_* = h_* + \psi_*$ así $\varphi - f_* = \varphi - h_* - \psi_*$, de aquí:
$\alpha^{-1}(\varphi - f_*)\beta^{-1} = \alpha^{-1}(\varphi - h_* - \psi_*)\beta^{-1} = \alpha^{-1}(\varphi - h_*)\beta^{-1} - \alpha^{-1}(\psi_*)\beta^{-1} = \rho - \alpha^{-1}\psi_*\beta^{-1} = 0$
Por tanto: $\varphi = f_*$ en $H(E)$ y $H(E \otimes \mathbb{Z}_p)$. □

4. Homología de complejo de una cadena elemental y propiedades de la sucesión espectral de Bockstein

4.1. Complejo de cadena elemental

Definición 4.1. *Sean k, n dos números enteros con $k \geq 0$. El complejo de la cadena elemental denotada por $E(n,k)$ se define como:*
$E(n,k)_n = \mathbb{Z}$ *con generador* u
$E(n,k)_{n+1} = \mathbb{Z}$ *con generador* v*, si* $dv = ku, k \neq 0$
$E(n,k)_r = 0$*, si* $r \neq n, n+1$
y
$E(n,k)_{n+1} = 0$ *, si* $k = 0$
Entonces:
$H_n(E(n,k)) = \mathbb{Z}_k$*, donde* $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_0$*; y*
$H_m(E(n,k)) = 0$*, para* $m \neq n$

Proposición 4.1. *Con la definición y notaciones de (4.1), reemplazando un complejo por un sumando directo de complejos elementales las cuales poseen una sucesión espectral de Bockstein isomórfica, y la sustitución se puede hacer de tal manera que las aplicaciones inducidas son la misma para una aplicación dada.*

Demostración. Es inmediato de la definición (4.1) y su respectiva conclusión. □

Lema: Sean E y E' dos complejos de cadena libres, $E + E' = \oplus(E + E')_n = \oplus(E_n + E'_n)$ y siendo el diferencial la suma de los diferenciales; entonces $E_k(E + E') = E_k(E) + E_k(E')$

Demostración. Es rutinario de la definición (3.4)y (3.6)y para el caso del diferencial aplicar la definición (3.5). □

Proposición 4.2. *Sean E y E' dos complejos de cadenas de libre torsión, $f : E \longrightarrow E'$ una aplicación de cadena, y supóngase además que el inducido: $f_* : H(E \otimes \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H(E' \otimes \mathbb{Z}_p)$ es un isomorfismo, entonces para todo k se tiene: $f_k : E_k(E) \longrightarrow E_k(E')$ es un isomorfismo.*

Demostración. Para $f_* = f_1$ es un isomorfismo sobre E_1; de aquí inductivamente f_k es un isomorfismo sobre E_k para todo k. □

Proposición 4.3. *Sea $E = \sum_k E_k$ un complejo de cadena donde E_k son complejos cuyas homologías son diferente de cero en el caso un-dimensional y, en tal dimensión es cíclico. Entonces $E_k(E) \cong \sum_j E_k(E_j)$*

Demostración. Usando la proposición (3.8), podemos encontrar aplicaciones $f : E \longrightarrow \sum_j E_j$, $g : \sum_j E_j \longrightarrow E$ tal que las aplicaciones inducidas sobre parejas exactas son aplicaciones identidad sobre cada grupo. Dado una aplicación $\rho : E \longrightarrow E'$ de complejos, y un conjunto similar de aplicaciones para E', es decir: $f' : E' \longrightarrow \sum_i E'_i, g' : \sum_i E'_i \longrightarrow E'$ induciendo aplicaciones identidad sobre parejas exactas, entonces definimos $\rho' : \sum E_j \longrightarrow \sum E'_i$ por $\rho' = f'\rho g$ entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \sum E_j & \xrightarrow{\rho'} & \sum E_i \\ {\scriptstyle f}\Big\uparrow\Big\downarrow{\scriptstyle g} & & {\scriptstyle f'}\Big\uparrow\Big\downarrow{\scriptstyle g'} \\ E & \xrightarrow{\quad\rho\quad} & E' \end{array}$$

y por tanto ρ' induce la misma aplicación de sucesiones espectrales como ρ.

□

4.2. Homología de complejo de cadena elemental

Estos resultados lo establecemos en las proposiciones siguientes:

Proposición 4.4. *Si k y p son dos números enteros coprimos, entonces $E_1(E(n,k)) = E_\infty(E(n,k)) = 0$.*

Demostración. En efecto,

$$E_1(E(n,k)) = H(E(n,k) \otimes \mathbb{Z}_p) = 0$$

□

Proposición 4.5.

$$H(E(n,0) \otimes \mathbb{Z}_p) = E_1(E(n,0)) = E_\infty(E(n,0))$$

Demostración. Para dimensión "n" se tiene que $H(E(n,0) \otimes \mathbb{Z}_p) \neq 0$, de donde $d_r = 0$ para todo r, siendo de este modo que el grado de "d_r" es igual a -1 □

Proposición 4.6. *Sean t y p dos números coprimos y $m \geq 0$, existe una aplicación β de la pareja exacta de Bockstein de $E(n, tp^m)$ sobre la pareja derivada para $E(n, tp^{m+1})$ lo cual es isomorfismo en cada término.*

Demostración. Considerando $E = E(n, tp^{m+1})$, $E' = E(n, tp^m)$ y denótese los generadores por u y v,u' y v' en dimensiones n y $n+1$ respectivamente, con $dv = tp^{m+1}u, dv' = tp^m u'$.

Defínase $q : E' \longrightarrow E$ por $q(u') = pu, q(v') = v$, entonces q es una aplicación cadena y $q_*(H(E')) = i(H(E))$ y q_* es un isomorfismo sobre $i(H(E))$.

Defínase $S : E' \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow E \otimes \mathbb{Z}_p$ por $S(u') = u$ y $S(v') = v$. Si $m > 0$ se tiene $d = 0$ en $E' \otimes \mathbb{Z}_p$ y $d_1 = 0$ en $E_1(E)$. Por eso S induce un isomorfismo $S_* : H(E' \otimes \mathbb{Z}_p) \longrightarrow E_2(E)$. Si $m = 0$ se tiene; $H(E' \otimes \mathbb{Z}_p) = 0 = E_2(E)$, de aquí S induce un isomorfismo trivial.

Como "q" es una aplicación de cadena, $iq_* = q_*i$ de aquí $i'\beta = \beta i$. Ahora tenemos que $< [u'] >= H(E')$, por lo que es suficiente mostrar que $j'\beta = \beta j$ sobre $[u']$. Ahora $j([u']) = [u']_p$ así $\beta j([u']) = \beta([u']_p) = [u]_p$, de donde $j'\beta([u']) = j'([pu]) = j'([i(u)]) = [ju] = [u]_p$.
Finalmente: $\delta_p([u']) = 0 = \delta'_p([u]_p)$, por lo que queda mostrar que: $\beta\delta_p([v]_p) = \delta'_p\beta([v']_p) = \delta'_p([v]_p)$.

Pero si $m > 0$ se tiene que $[v']_p \neq 0$, entonces $\delta'_p([v']_p) = [ap^{m-1}u']$, así $\delta'([v]_p) = [ap^m u]$. Por tanto $\beta([u']) = [pu]$ y así se sigue el resultado, por eso β es un isomorfismo de parejas exactas. □

Proposición 4.7. *Sea E un complejo. Hay un complejo E' y una aplicación β de la pareja exacta para E' sobre la pareja derivada para E la cual es un isomorfismo de parejas. Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación de complejos, uno puede elegir $f' : A' \longrightarrow B'$ así que $\beta f'_* = f\beta$.*

Prueba: La primera parte de este teorema se sigue de la proposición (4.6)y de la proposición (4.1). Ahora la segunda parte es decir la existencia de f' se sigue de la proposición (3.8)

Proposición 4.8. *Sean p y q dos números coprimos. Si $k = qp^r$, entonces $E_1(E(n,k)) = E_r(E(n,k))$ y $E_{r+1}(E(n,k)) = E_\infty(E(n,k)) = 0$*

Prueba: Usando inducción matemática sobre "r"; y al utilizar las proposiciones (4.4)y (4.6) se obtiene el resultado.

Recordando:$Z_n = Nucleo(d)$, $d : E_n \longrightarrow E_{n-1}$; $Z'_n = Nucleo(d')$, $d' : E'_n \longrightarrow E'_{n-1}$; $B_n = Imagen(d)$, $d : E_{n+1} \longrightarrow E_n$ y $B'_n = Imagen(d)$, $d : E'_{n+1} \longrightarrow E'_n$.

Proposición 4.9. *$Z'_1 \otimes Z'_2$ puede ser elegida para $(Z_1 \otimes Z_2)'$.*

Prueba: Será suficiente probar si $Z_1 = E(n, mp^r)$, $Z_2 = E(s, tp^l)$ donde: $(m,p) = 1 = (t,p)$. Entonces $Z'_1 = E(n, mp^{r-1})$, $Z'_2 = E(s, tp^{l-1})$. Podemos asumir: $r, l > 1$; para otro caso $E_2(Z_1 \otimes Z_2) = 0 = E_2(Z'_1 \otimes Z'_2)$. Escribamos $Z_i = gen\{u_i, v_i\}$ con $dv_1 = mp^r u_1, dv_2 = tp^l u_2$; también $Z'_1 = gen\{u'_1, v'_1\}$ y asi sucesivamente. Y asumiendo $r \geq l$. Consideremos:
$\gamma = [m,t]$ (mínimo común múltiplo de m y $t = \alpha m$)
$\delta = (mp^{r-l}, t) = \rho(mp^{r-l}) + \eta t$
$a = \alpha(v_1 \otimes u_2) - (-1)^{dimu_1}\beta p^{r-l}(u_1 \otimes u_2)$
$b = \rho(v_1 \otimes u_2) + (-1)^{dimu_1}\eta(u_1 \otimes u_2)$

Entonces $(Z_1 \otimes Z_2)_{n+s+1}$ posee como base a $\{a, b\}$ y similarmente para los primos de a, b, u_i, v_i; en las igualdades anteriores ponemos los elementos: a', b' los cuales juntamente forman una base para $Z'_1 \otimes Z'_2)_{n+s+1}$. Además $da = da' = 0$, $db = \delta p^l(u_1 \otimes u_2)$, $db' = \delta p^{l-1}(u'_1 \otimes u'_2)$.

Ahora definimos $q : Z'_1 \otimes Z'_2 \longrightarrow Z_1 \otimes Z_2$ por: $q(u'_1 \otimes u'_2) = p(u_1 \otimes u_2)$, $q(x') = px, q(y') = y$ y $q(v'_1 \otimes v'_2) = v_1 \otimes v_2$. Entonces "$q$" es una aplicación cadena y el inducido es un isomorfismo; es decir: $q_* : H(Z'_1 \otimes Z'_2) \cong iH(Z_1 \otimes Z_2)$

Definimos las aplicaciones de cadena $S_j : Z'_1 \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow Z_i \otimes \mathbb{Z}_p$, por $S_j(u'_j) = u_j$, $S_j(v'_j) = v_j$. Entonces si $S = S_1 \otimes S_2$; el inducido verifica:

$$S_* : H(Z'_1 \otimes Z'_2 \otimes \mathbb{Z}_p) \cong H(Z_1 \otimes Z_2 \otimes \mathbb{Z}_p) = E_2(Z_1 \otimes Z_2)$$

Así definimos: $\beta = q_*$ en $H(Z'_1 \otimes Z'_2)$ y $\beta = S_*$ en $H(Z'_1 \otimes Z'_2 \otimes \mathbb{Z}_p)$; entonces por la proposición (4.6) se tiene que la aplicación β de la pareja exacta de Bockstein que existe en dicha proposición es un isomorfismo; y de esta manera queda probado el resultado.

Teorema 4.1. *Si $E = \sum_k E_k$ es un complejo de cadenas con operador borde $d : E_i \longrightarrow E_{i+s}$ con Z =núcleo de "d", entonces la homología de Z es decir $H(Z)$ no tiene p-torsión si y solo si $E_1(Z) = E_\infty(Z)$ en la sucesión espectral de Bockstein módulo "p"*

Prueba: El resultado se obtiene directamente utilizando las proposiciones (4.4),(4.5), (4.8)y (4.1).
Observación: Consideremos la sucesión exacata corta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

y esta induce:

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

la cual a su vez induce:

$$j_{(1)} = j_* : H(Z) \longrightarrow H(Z \otimes \mathbb{Z}_p) = E_1$$

Como $Im(j_{(1)}) \subseteq Ker(d_1)$ entonces $j_{(1)}$ induce:

$$j_{(2)} : H(Z) \longrightarrow E_2$$

y así $j_{(r)} : H(Z) \longrightarrow E_r$ lo cual es obtenido de manera inductiva puesto que $Im(j_{(r)}) \subseteq Ker(d_r)$.

Como $H_m(Z)$ es finitamente generado para cada "m" podemos definir $j_\infty : H(Z) \longrightarrow E_\infty$ por $j_\infty = j_r$ para r suficientemente grande $E_\infty = E_r$.

5. Sucesión espectral de Bockstein para H-espacios y álgebras de Hopf

Sea X un espacio topológico y sea $C_*(X)$ el complejo de cadenas o complejo singular de X y supongamos que cualquier espacio X tiene sus grupos de homología singular $H_n(X)$ finitamente generado para cada n.

5.1. Sucesión espectral de Bockstein, de un complejo singular

Definición 5.1. *La sucesión espectral de Bockstein del complejo singular $C_*(X)$ módulo "p", es denominado: la sucesión espectral de Bockstein de X en homología módulo p y es denotado por $E^r(X)$ o simplemente por $E^{(r)}$.*

Definición 5.2. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. La aplicación inducida de secuencias espectrales se denotará por $f^{(r)} : E^{(r)}(X) \longrightarrow E^{(r)}(Y)$.*

Similarmente si $C^*(X) = Hom(C_*(X), Z)$ es el complejo de cadenas de X; tenemos $E_r(C^*(X)) = E_{(r)}(X)$ o simplemente $E_{(r)}$ la cual llamamos sucesión espectral de Bockstein de X en Cohomología módulo "p" y las aplicaciones inducidas son denotadas por $f_{(r)}$.
En lo que sigue optaremos por no mencionar al número primo "p"

Otras definiciones: Sea K un campo $\Lambda, A, B,$ y C módulos sobre K.
i) Un **álgebra** A es un módulo graduado y una aplicación $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$

ii)Una **Co-álgebra** C es un módulo graduado y una aplicación $\rho : C \longrightarrow C \otimes C$

iii) Una **unidad para álgebra** A es una aplicación $e : K \longrightarrow A$ tal que $\mu(e\otimes 1) = \mu(1\otimes n) = I_d$, donde $K \otimes A = A = A \otimes K$.

iv)Una **Co-unitaria para una co - álgebra** C es una aplicación $l : C \longrightarrow K$ tal que $(l \otimes 1)\rho = (1 \otimes l)\rho = I_d$, donde $K \otimes C = C = C \otimes K$

v) Una **aumentación de un álgebra con unidad** es una aplicación $\omega : A \longrightarrow K$ de álgebras con unidad.

vi)Una **Co - aumentación de una Co- álgebra con Co - unidad** es una aplicación $n : K \longrightarrow C$ de Co - álgebras con Co - unidad. (K está actuando sobre un Co - álgebras enviando $1 \longrightarrow 1 \otimes 1$).

Sea $T : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$ una aplicación dado por: $T(a \otimes b) = (-1)^{dim(a).dim(b)} b \otimes a$

vii) Si A y A' son álgebras entonces $A\otimes A'$ es el álgebra definida por $\bar{\mu} : (A\otimes A')\otimes(A\otimes A') \to A\otimes A'$ donde $\bar{\mu} = (\mu \otimes \mu')(1 \otimes T \otimes 1)$.

viii)Un **álgebra de Hopf** es un módulo A juntamente con aplicaciones $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$, $\rho : A \longrightarrow A \otimes A$, $e : K \longrightarrow A$, $W : A \longrightarrow K$ tal que:

(1)A es un álgebra bajo μ con Co - unidad e, con aumentación ω.

(2)A es un Co- álgebra bajo ρ con Co - unidad ω, con Co - aumentación e.

(3)ρ es una aplicación de álgebras aumentadas con unidad.

ix) Un **álgebra diferencial** (Co - álgebra) es un álgebra equipada con una diferencial d con $d^2 = 0$ tal que $d\mu = \mu d(\rho d = d\rho)$ y $\omega d = 0$, $dn = 0$

x)Un **álgebra de Hopf diferencial** es un álgebra de Hopf con un diferencial lo cual es ambos: un álgebra diferencial y un Co - álgebra diferencial.

xi)Un álgebra (Co - álgebra) es llamada **asociativa** (Co - asociativa) si $\mu(1 \otimes \mu) = \mu(\mu \otimes 1)$, $([\rho \otimes 1]\rho = [1 \otimes \rho]\rho)$

xii)Un álgebra (Co - álgebra) es llamado **conmutativa** (Co - conmutativa) si $\mu T = \mu$, $[T\rho = \rho]$

xiii)Un elemento x en una Co - álgebra, Co - aumentada C, es **primitiva** si $\mu x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$; observese además que para cualquier $y \in C : \rho y = y \otimes 1 + 1 \otimes y + \sum y_i \otimes y_i'$, donde y_i, y_i' son elementos del núcleo de ω.

xiv)Un elemento x en un álgebra aumentada A, es **descomponible** si x es elemento de $\mu(\tilde{A}\otimes\tilde{A})$ donde $\tilde{A} = nucleo(\omega)$

5.2. Propiedades de álgebras, Co - álgebras y álgebras de Hopf

A continuación presentamos algunas propiedades sobre: álgebras, Co- álgebras y álgebras de Hopf cuya demostración es verificación rutinaria; por lo que será omitida. Además todos los K-módulos serán considerados finitamente generados sobre el mismo K y en cada dimensión, y para cada K - módulo M escribiremos $M^* = Hom(M, K).(dualdeM)$

Propiedades 5.2.1:
(1)Un álgebra A es de Hopf si y solamente si su dual lo es.

(2)A es un álgebra si y solamnete si su dual es un Co - álgebra.

(3)El dual de cualquier propiedad P posee la Co - propiedad P tales como la asociatividad dual es Co - asociativa, la conmutativa dual es Co - conmutativa, etc.

(4)Si A es un álgebra, x un elemento de A no es descomponible, entonces existe un elemento $\tilde{x}$ en A^*, tal que $\tilde{x}$ es primitivo y $\tilde{x}(x) \neq 0$.
Además, cualquier primitivo "y" de A^* anula a todo elemento descomponible.

(5)Sea A un álgebra diferencial. Si $x, y \in A, dx = y$, entonces "x" elemento descomponible implica que "y" es elemento descomponible.

(6)Sea C una Co - álgebra diferencial. Si $x, y \in C$ tal que $dx = y$, entonces x como elemento primitivo implica que "y" es elemento primitivo.

(7)Sea A un álgebra diferencial (respectivamente un Co - álgebra). Entonces la homología de A, es decir $H(A)$ es también un álgebra (respectivamente un Co - álgebra) y todas las propiedades algebraicas (respectivamente propiedades Co - algebraicas) antes mencionadas son heredadas por $H(A)$, tal como asociatividad (Co - asociatividad), conmutatividad (Co - conmutatividad).

Definición 5.3. *Sea X un espacio topológico. La aplicación diagonal de X se denota y define como: $\triangle(x) = (x, x)$. Y la aplicación inyección de punto base "x_0" se denota y define como $i : \{x_0\} \hookrightarrow X$ y la aplicacipon colapso se define como $C : X \longrightarrow \{x_0\}$.*

Proposición 5.1. *(Teorema de **Eilemberg - Zilber**) Sean X e Y dos espacios topológicos. Entonces:*

$$H_n(X \times Y) \cong H_n(S(X) \otimes_{\mathbb{Z}} S(Y))$$

donde $S(X)$ es el complejo singular de X.

Demostración: [Ver: Rotman, an introduction to algebraic topology. pag: 266]

Proposición 5.2. *Sea X un espacio topológico.*

(1)La aplicación diagonal $\triangle(r) : E_r(X) \times E_r(X) \longrightarrow E_r(X)$ convierte a $E^{(r)}$ en un álgebra diferencial con unidad $n = e_{(r)}$ y aumentación $\epsilon = i_{(r)}$; esta es asociativa y conmutativa.

(2)La aplicación: $\triangle^{(r)} : E^r(X) \longrightarrow E^r(X) \otimes E^r(X)$ convierte a $E^{(r)}$ en un Co - álgebra diferencial.

(3)$E_{(r)}$ y $E^{(r)}$ son objetos duales; es decir $E^{(r)} = E^*_{(r)}$

Prueba: Los items: (1) y (2) son aplicaciones obtenidas e inducidas del teorema de Eilemberg Zilber juntamente con el inducido de la sucesión espectral de Bockstein, es decir del isomorfismo de aplicación de cadenas: $E_r(E) \otimes E_r(D) \cong E_r(E \otimes D)$, para todo $r \geq 1$.
Mientras que el item (3) es obtenido directamente de la proposición (3.3)parte (ii).

Definición 5.4. *Sea X un espacio con punto base x_0 y p un número primo. Diremos que X es denominado* ***una homología de un H - espacio módulo "p"****, si existe una aplicación $m : X \times X \longrightarrow X$ tal que las aplicaciones: $m_1(x) = m(x_0, x), m_2(x) = m(x, x_0)$ poseen la propiedad que los inducidos $(m_1)_*$ y $(m_2)_*$ son automorfismos de $H_*(X, \mathbb{Z}_p)$. En estos términos X es llamado* ***una homología H - espacio*** *si los inducidos $(m_1)_*$ y $(m_2)_*$ son automorfismos para todos los coeficientes.*

Proposición 5.3. *Si X es un H - espacio entonces $E_{(r)}(X)$ y $E^{(r)}(X)$ son duales de una de la otra como álgebras diferenciales de Hopf; donde la aplicación m induce la estructura de Co - álgebra de $E_{(r)}$ y la estructura de álgebra de $E^{(r)}$.*

Prueba: Recordando la definición del álgebra de Hopf: Un álgebra de Hopf E es un módulo E juntamente con unas aplicaciones $\mu : E \otimes E \to E, \varphi : E \longrightarrow E \otimes E, \eta : K \longrightarrow E$ y $\epsilon : E \longrightarrow K$ tal que:

(1)E es un álgebra bajo μ con unidad φ y aumentación ϵ.

(2)E es un Co - álgebra bajo φ con Co - unidad ϵ y Co - aumentación ϵ.

(3)φ es una aplicación de álgebras aumentadas con unidad.

Una prueba, como en la proposición (5.2), donde μ induce estructura de álgebra en $E^{(r)}$ y estructura de Co - álgebra en $E_{(r)}$. Ahora observemos la condición (3) de la **definición de álgebra de Hopf**, la cual sigue del hecho que $\triangle$ es una aplicación de H - espacios, donde si $(x, y), (z, w)$ en $X \times X$ el producto es definido por $(x, y).(z, w) = (xz, yw)$.

Una aplicación de esta proposición (5.3) lo daremos basado en el siguiente famoso teorema algebraico de : Milnor y Moore. Cuya demostración lo encontraremos en: J.Milnor and J.C Moore, on the structure of Hopf algebras (to appear in trans. Amer Math.soc).

Teorema 5.1. *(Teorema de Milnor y Moore) Sean E un álgebra de Hopf; asociativo y conmutativo sobre $\mathbb{Z}_p$:*

$$P(E) = \{Conjunto\ de\ elementos\ primitivos\ de E\}$$

$$D(E) = \{Conjunto\ de\ elementos\ descomponibles\ de E\}$$

y

$$Q(E) = \frac{E}{D(E)}$$

Sea además $\gamma : E \longrightarrow E$ una aplicación definida por $\gamma(x) = x^p$, p - número primo. Entonces la sucesión:

$$0 \longrightarrow P(\gamma(E)) \xrightarrow{i} P(E) \xrightarrow{j} Q(E)$$

es exacta. En otras palabras si $z \in P(E) \cap D(E)$ entonces $z = \gamma(u) = u^p$, para algún elemento $u \in E$.

Teorema 5.2. *Sea X un H - espacio, $H^*(X)$ finitamente generado para cada k, con $H^*(X, \mathbb{Z}_p) = \wedge(x_1, ..., x_n, ...)$; el álgebra exterior sobre los generadores dimensionales impares x_k.*

Entonces $H^*(X)$ no tiene p - torsión.

Demostración. Se sigue del Teorema (4.1) y de la Proposición (5.4) que presentaremos luego del Lema (5.1). □

Lema 5.1. *Si E es un Co - álgebra diferencial sobre un campo K con $E_0 = K, d(E_k) = 0$ para $k < n$, entonces $d(E_n) \subset P(E)$.*

Demostración. Si $\varphi : E \longrightarrow E \otimes E$ es la co - multiplicación en $E, x \in E_n$; entonces $\varphi(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum x_i \otimes x_i'$, donde x_k, x_k' son de dimensión menor que "n" para todo k. Por tanto $dx_k = dx_k' = 0$ y $\varphi(dx) = d(\varphi(x)) = dx \otimes 1 + 1 \otimes dx$ y así $dx \in P(E)$. □

Proposición 5.4. *Sea E un álgebra diferencial de Hopf sobre un campo K con diferencial "d" de grado ± 1. Si, como un álgebra, $E \cong \wedge(x_1, ..., x_n, ...)$ el álgebra exterior sobre generadores dimensionales impares $x_1, x_2..., x_n, ...$; entonces $d \equiv 0$ y $H(E) = E$.*

Demostración. Asumiendo por inducción que $d(E_k) = 0$ para $k < n$. Nótese que $d(E_0) = 0$; pues $d(1) = d(1{,}1) = 2d(1)$; de aquí $d(1) = 0$ y $d(E_0) = 0$ puesto que $E_0 = K$. Sea $I = d(E_n)$; por el lema anterior: $I = d(E_n) \subset P(E)$. Por el teorema (5.2) como las potencias p^{th} se anulan en un álgebra exterior, entonces se sigue que un elemento de I es no descomponible. De aquí si $I \neq 0$ e I está en una dimensión impar.

Puesto que cualquier elemento dimensional par de E es descomponible. Ya que el grado $d = \pm 1$, nosotros tenemos que "n" es par y $E_n \subset D(E)$, asi por (5.2.1)(propiedades (5) y (6)) se tiene que $I \subset D(E)$ y así $I = 0$ y $d = 0$.

□

Teorema 5.3. *Sea X un H- espacio arco conexo con $H_k(X)$ finitamente generado para cada k. Entonces E_∞ y $\frac{H^*(X)}{torsion} \otimes \mathbb{Z}_p$ son isomorfos como álgebras de Hopf.*

Demostración. Por la proposición (3.2) parte (1) se tiene; $E_{(\infty)} \cong \frac{H^*(X)}{torsion} \otimes \mathbb{Z}_p$ como un $\mathbb{Z}_p$ - módulo, entonces el resultado se sigue del hecho que J_∞ es un homomorfismo de álgebras y conmutan con la aplicación diagonal. □

Aplicación (1): Sea X como en el teorema (5.3) y supóngase que $H^*(X, \mathbb{Z}_p)$ es un $\mathbb{Z}_p$ - módulo finito. Entonces $E_{(\infty)} = \wedge(x_1, ..., x_n)$, con $dimx_k$ impar.

Demostración. Por un teorema de Borel se tiene que $\frac{H^*(X)}{torsion} \cong \wedge(x_1, ..., x_n)$. □

Aplicación (2): Sea X como en la aplicación (1). Entonces existen elementos primitivos dimensionales no pares en E^∞.

Demostración. Todo elemento dimensional par de $E_{(\infty)}$ son descomponibles, de aqui por (5.2.1) parte (4), se tiene que cualquier elemento primitivo $z \in E^\infty$ anula a todo elemento dimensional par y así esto no es dimensional par por tanto $E^\infty = E^*_{(\infty)}$. □

6. Conclusión

- La estructura topológica de los H - espacios conduce a la definición de una estructura algebráica denominada H - grupo.
- Dentro de los resultados estudiados, resaltamos el teorema (5.3) que permite expresar mediante isomorfía al denominado grupo límite como un álgebra de Hopf.
- Las aplicaciones del teorema (5.3) establecen la dualidad entre: $E^{(\infty)}$ y $E_{(\infty)}$ para elementos primitivos en $E^{(\infty)}$.

Referencias bibliográficas

[1] Massey, W.S (1972). *Introducción a la topología algebraica.* Editorial Reverté.

[2] Browder, W. (1960). *Torsion in H-spaces.* Annals of Mathematcs, 74(1), 24-51.

[3] Vick, J. W. (1970). *Homology theory. An introduction to algebraic topology.* Academic Press.

[4] Dugundji, J. (1966). *Topology.* Allyn and Bacon.

[5] Hu, S.T (1966). *Homology Theory. A First Course in Algebraic Topology.* Holden-Day.

[6] Munkres, J. (2000). *Topology.* Pretince Hall.

[7] García Armas, A. (2000). *Homología Singular.*