

Sobre la topología del complemento de una curva singular plana en la clasificación de foliaciones holomorfas singulares de codimensión uno

*Hernán Neciosup Puican*¹.

Resumen: En este artículo, estudiamos el papel del grupo fundamental del complemento de una curva plana afín en la clasificación analítica de foliaciones singulares de codimensión uno en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$. Nos enfocamos en obtener una representación adecuada del grupo fundamental del complemento de una curva plana afín particular, utilizando la monodromía de trenzas y el método de Zariski-Van Kampen. La imagen de este grupo, por la representación de holonomía de la foliación, es conocida como el grupo de holonomía de la foliación y la conjugación analítica de estos grupos equivale a la clasificación analítica de foliaciones holomorfas singulares cuspidales casi homogéneas de tipo admisible sobre $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ [6].

Palabras clave: Grupo fundamenta, holonomía proyectiva, foliaciones singulares.

On the topology of the complement of a singular plane curve in the classification of singular holomorphic foliations of codimension one.

Abstract: In this article, we study the role of the fundamental group of the complement of an affine plane curve in the analytic classification of singular codimension-one foliations in $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$. We focus on obtaining an adequate representation of the fundamental group of a particular affine plane curve complement, using braid monodromy and the Zariski-Van Kampen method. The image of this group, under the holonomy representation of the foliation, is known as the holonomy group of the foliation and the analytic conjugacy of these groups is equivalent to the analytic classification of almost homogeneous cuspidal singular holomorphic foliations of admissible type on $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ [6].

Keywords: Fundamental group, projective holonomy, singular foliations.

Recibido 27/03/2023

Aceptado 09/06/2023

Publicado online 30/06/2023

©Los autores. Este artículo es publicado por la Revista PESQUIMAT de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Este es un artículo de acceso abierto, distribuido bajo los términos de la licencia Creative Commons Atribucion-No Comercia-Compartir Igual 4.0 Internacional. (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>) que permite el uso no comercial, distribución y reproducción en cualquier medio, siempre que la obra original sea debidamente citada. Para información, por favor póngase en contacto con revistapesquimat.matematica@unmsm.edu.pe

¹Dpto. Ciencias-Sección Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú. e-mail: h neciosup@pucp.pe. Este trabajo ha sido financiado por la Dirección de Gestión de la Investigación de la PUCP a través de la subvención DGI-2020-1-0057

1. Introducción

Este artículo trata sobre el cálculo de la topología del complemento de una curva plana afín, el cual es clave en el cálculo del grupo de holonomía de proyectiva de foliaciones holomorfas cuspidales casi homogéneas de tipo admisible en dimensión tres [6]. La noción de holonomía proyectiva es de gran importancia en el estudio de la clasificación de foliaciones cuspidales en dimensión 2 [8] y 3 [6]. Existen varias representaciones de la topología del complemento de una curva algebraica. En este artículo, presentamos un método para calcular este grupo, utilizando la monodromía de trenzas y el método de Zariski-Van Kampen. Además, calculamos de manera explícita el grupo fundamental de una curva plana especial que aparece en la clasificación de foliaciones cuspidales casi homogéneas de tipo admisible en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ [6].

Si $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ es una curva plana afín, se define el grupo de \mathcal{C} como el grupo fundamental del complemento de \mathcal{C} , es decir, $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C})$ sin especificar el punto base. El estudio de los grupos de curvas planas es un problema clásico que se remonta a los trabajos de O. Zariski, y una prueba rigurosa fue dada por Van Kampen [12]. Además de los métodos propuestos por V.S. Kullikov e I. Shimada, en los años 80 y 90, Moishezon y Teicher [7], [11] introdujeron la noción de monodromía de trenza, que se utiliza para recuperar la presentación de Van Kampen y obtener una versión moderna de este grupo.

Supongamos que G es un grupo y que $a, b \in G$. Introducimos las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} [a, b] &= a^{-1}b^{-1}ab \\ a^b &= b^{-1}ab \\ b * a &= bab^{-1} \end{aligned}$$

Una traslación de n -puntos es un conjunto de caminos continuos $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ con extremos iniciales en $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \mathbb{C}$ y extremos finales en $\tilde{Y} = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n\} \subset \mathbb{C}$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $\gamma(0) = \{\gamma_1(0), \gamma_2(0), \dots, \gamma_n(0)\} \subset Y$
2. $\gamma(1) = \{\gamma_1(1), \gamma_2(1), \dots, \gamma_n(1)\} \subset \tilde{Y}$
3. $\gamma_i(t) \neq \gamma_j(t), \quad \forall i \neq j, \quad t \in [0, 1]$

Se define el conjunto de trenzas entre Y e \tilde{Y} como el conjunto de clases de homotopía de traslaciones entre Y e \tilde{Y} , denotado por $\mathbb{B}_n(Y, \tilde{Y})$. Cuando $Y = \tilde{Y}$, se denota al conjunto de trenzas por \mathbb{B}_n , el cual tiene estructura de grupo, con la composición. Cuando $Y = \{1, 2, \dots, n\}$, \mathbb{B}_n denota el grupo de trenzas de n hilos. E. Artin en [1] da la siguiente representación del grupo de trenzas \mathbb{B}_n

$$\mathbb{B}_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} : \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i; |i - j| > 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle.$$

Sea $\mathbb{F}_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ el grupo libre de orden n . Observe que \mathbb{B}_n actúa, a derecha, sobre \mathbb{F}_n de la siguiente manera: para $i = 1, 2, \dots, n - 1$

$$\Phi(x_i, \sigma_j) = x_i^{\sigma_j} = \begin{cases} x_{i+1} & i = j \\ x_i * x_{i-1} & i = j + 1 \\ x_i & i \neq j + 1 \end{cases}$$

Considere ahora Δ_n el disco con n - puntos marcados. La clase de aplicación $[h]$, donde $h : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$, da lugar a un automorfismo $h_* : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ de grupos libres. Por lo tanto, \mathbb{B}_n puede ser considerado como el grupo de homeomorfismos de Δ_n fijando $\partial\Delta$ y permutando los

n -puntos marcados, módulo isotopía fijando $\partial\Delta \cup \{1, 2, \dots, n\}$. Obteniendo el homomorfismo inyectivo $\mathbb{B}_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$, de esta manera podemos decir que Φ define el homomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_n &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_n) \\ \sigma &\longmapsto \Phi(\cdot, \sigma) \end{aligned}$$

Identificamos la imagen con \mathbb{B}_n , E. Artir en [1] demuestra que dado $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$, existe $\tau \in \mathbb{B}_n$ si y solo si

$$\tau(x_n \cdot x_1) = x_n \cdot x_1,$$

y existe una permutación σ de n -letras tal que

$$\tau(x_i) = y_i x_{\sigma(i)} y_i^{-1}, \quad y_i \in \mathbb{F}_n, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Una interpretación geométrica del grupo \mathbb{B}_n y de su acción sobre \mathbb{F}_n está dada de la siguiente manera: fijemos un subconjunto $Y = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset \mathbb{C}$ de n -elementos diferentes. Sea $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disco suficientemente grande tal que Y esté contenido en su interior. Elegimos un punto $x \in \partial\Delta$, y tomamos un pequeño disco D centrado en $t \in Y$ que no contenga a otro elemento de Y , elija un punto $\hat{x} \in \partial D$. Considere el camino $\alpha \in \mathbb{C} \setminus Y$ que une \hat{x} con x , denote por $\eta_{\hat{x}, D}$ al camino cerrado con base en \hat{x} que gira en sentido anti-horario a lo largo de ∂D . La clase de homotopía del lazo $\alpha^{-1} \cdot \eta_{\hat{x}, D} \alpha$ es llamado un meridiano de t en $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x)$. Si el punto base es sobreentendido, entonces simplemente hablaremos de t en $\mathbb{C} \setminus Y$. Observe que el conjunto de meridianos de $t \in Y$ coincide con una clase de conjugación en $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x)$ completamente determinado por t . Por otro lado se conoce que una colección adecuada de n -meridianos de $\mathbb{C} \setminus Y$ (uno por cada punto de Y) define una base de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x)$. Esta construcción de meridianos es útil para el cálculo del grupo fundamental del complemento de un divisor en un superficie.

Definición 1. Sea Δ y x como antes. Una base geométrica de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x)$ es una base ordenada $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x)$ consistiendo de meridianos tales que $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ es homotópico al camino cerrado de base en x que gira en sentido antihorario a lo largo de ∂D .

Observe que una base geométrica $\Gamma := \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ es una base libre de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x) \cong \mathbb{F}_n$. Dado cualquier $\sigma \in \mathbb{B}_n$, la acción Φ de σ sobre Γ produce otra base geométrica, como consecuencia se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2. La acción Φ del grupo \mathbb{B}_n sobre el conjunto de todas las bases geométricas de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus Y, x)$ es libre y transitiva.

Consideremos ahora, el siguiente espacio $P^n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq z_j \text{ si } i \neq j\}$. En P^n consideramos la relación de equivalencia: $(z_1, \dots, z_n) \sim (z'_1, \dots, z'_n)$ si y solo si existe $\sigma \in S_n$, grupo simétrico de orden n , con $z_i = z'_{\sigma(i)}$. El espacio cociente, $B^n := P^n / \sim$, y su grupo fundamental, coincide con el grupo de trenzas de n -hilos \mathbb{B}_n , [2]. Por otro lado, La proyección natural $P^n \rightarrow B^n$ es un recubrimiento topológico de $n!$ hojas, y en consecuencia, $\mathbb{B}_n/P^n \cong S_n$. Existe una descripción alternativa de este grupo, el cual es relevante para nuestro propósito: considere $\mathbb{C}[z]_n^1$ el espacio afín de los polinomios mónicos de grado n , el cual se identifica de manera natural con \mathbb{C}^n . Si Δ_n es el lugar discriminante, $\mathbb{C}^n \setminus \Delta_n \cong B^n$ [2]. Esto nos permite dar una descripción explícita del grupo fundamental de $\mathbb{C}^n \setminus \Delta_n$ que a continuación pasamos a describir para el caso $\mathbb{C}^2 \setminus \Delta_n$.

2. Topología del complemento de una curva algebraica plana

Considere una curva plana afín $\mathcal{C} : (f(x, y) = 0)$, de grado n , y en posición general (es decir, cada fibra de la proyección vertical $\pi(x, y) = x$ contiene a lo más un punto singular o un

punto tangente a la curva). Sea $\Delta_f = \{x_1, \dots, x_s\}$ el lugar discriminante de f , $\mathcal{L}_k = \pi^{-1}(x_k)$ y $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_s$. La restricción

$$\rho := \pi|_{\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}} : \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Delta_f,$$

es una fibración localmente trivial, en virtud del Teorema de fibración de Ehresmann (ver [3]), con fibras isomorfas a $\mathbb{C}_n := \mathbb{C} \setminus \{n \text{ puntos}\}$. Denotemos por $\mathbb{C}_{n,p}$ a la fibra $\pi^{-1}(p)$ para todo $p \in \mathbb{C} \setminus \Delta_f$. De [10], existe una secuencia exacta de grupos:

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}_{n,p}) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}) \xrightarrow{\rho_*} \pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f) \longrightarrow 1, \tag{1}$$

donde i_* , s_* son las aplicaciones inducidas en homotopía a partir de la inclusión y la sección de ρ respectivamente

$$i : \mathbb{C}_{n,p} \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}.$$

$$s : \mathbb{C} \setminus \Delta_f \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}.$$

Observe que i_* y s_* son inyectivas y se tiene que $\pi_1(\mathbb{C}_{n,p})$ es un subgrupo normal de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L})$, mientras que $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f)$ no lo es. Entonces la secuencia exacta (1) implica que $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L})$ es el producto semi directo de $\pi_1(\mathbb{C}_{n,p})$ y $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f)$ (ver [9]).

Podemos elegir bases geométricas de $\pi_1(\mathbb{C}_{n,p})$ y $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f)$ tal como se muestra en la Fig.1.

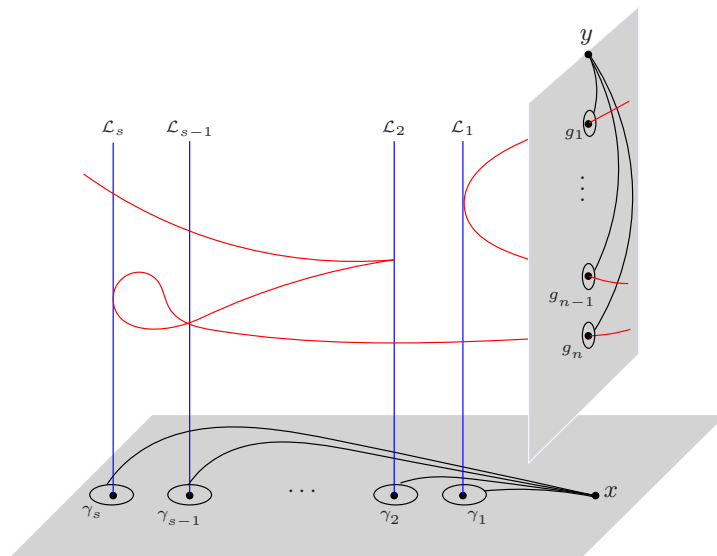


Figura 1: Elección de meridianos

Ahora, como ρ es una fibración localmente trivial con fibras difeomorfas a \mathbb{C}_n , el polinomio f induce una aplicación algebraica

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \setminus \Delta_f \longrightarrow \mathbb{C}_n \cong \mathbb{C}[z]_n^1 \setminus \{P(z) : \Delta(P(z)) = 0\} \cong B^n$$

definida por $x_0 \mapsto \tilde{f}(x_0) = f(x_0, y)$. Esta aplicación induce el homomorfismo

$$\tilde{f}_* : \mathbb{F}_s \rightarrow \mathbb{B}_n$$

donde \mathbb{F}_s es el grupo libre de s generadores, que se identifica con el grupo fundamental de $\mathbb{C} \setminus \Delta_f$. Este homomorfismo es llamado la **monodromía de trenza**.

Considere la base geométrica (g_1, \dots, g_n) del grupo fundamental de la fibra $\mathbb{C}_{n,p}$, y $(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ base geométrica de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f)$. La acción de γ_i sobre g_j es tal que en $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L})$ tenemos $\gamma_i * g_j = \gamma_i^{-1} g_j \gamma_i$, que es un elemento de $\pi_1(\mathbb{C}_n)$ ya que es un subgrupo normal [3].

En consecuencia se tiene

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}) = \langle g_1, \dots, g_n, \gamma_1, \dots, \gamma_s : \gamma_i^{-1} g_j \gamma_i = \tilde{f}_*(\gamma_i)(g_j) \rangle$$

Por otro lado, dado cualquier base geométrica $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$ de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f)$, la s -upla

$$(\tilde{f}_*(\gamma_1), \tilde{f}_*(\gamma_2), \dots, \tilde{f}_*(\gamma_s)) \in (\mathbb{B}_n)^s$$

es llamada una **factorización de monodromía de trenza**.

Bajo estas consideraciones y usando la secuencia (1), se tiene el siguiente resultado

Teorema 3. Sea $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s) \in (\mathbb{B}_n)^s$ una factorización de monodromía de trenza y sea (g_1, g_2, \dots, g_n) una base geométrica de $\pi_1(\mathbb{C}_n)$. Entonces

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}) = \langle g_1, \dots, g_n, \gamma_1, \dots, \gamma_s : g_j^{\rho_i} = \gamma_i^{-1} g_j \gamma_i, i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, n \rangle.$$

Como consecuencia, del teorema 3 se sigue

Corolario 4 (Teorema de Zariski-Van Kampen [12]). Bajo las hipótesis anteriores se tiene la siguiente presentación:

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}) = \langle g_1, \dots, g_n : g_j^{\tilde{\gamma}_i} = g_j, i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, n \rangle.$$

Ejemplo 5. Consideremos la curva algebraica plana $\mathcal{C} := y^2 + x^n = 0$, y la proyección $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\pi(x, y) = x$. Observe que $\Delta_f = \{0\}$, $\mathcal{L} = \pi^{-1}(0)$.

La restricción

$$\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Delta_f$$

es una fibración localmente trivial, con fibras isomorfas a $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\}$. Para todo $p \in \mathbb{C} \setminus \Delta_f$, se tiene la secuencia exacta (1).

Observe que $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f) = \langle \gamma \rangle = \mathbb{Z}$ y la factorización de monodromía de trenza $\in \mathbb{B}_2$, donde $\gamma(t) = \exp(2\pi it)$, es tal que la acción sobre los g_j viene dada por

$$\tilde{f}_*(\gamma)(g_j) = \begin{cases} g_1^{\sigma_1^n} = \begin{cases} (g_2 g_1)^{\frac{n}{2}} g_1 (g_2 g_1)^{-\frac{n}{2}}, & n - \text{par.} \\ (g_2 g_1)^{\frac{n-1}{2}} g_2 (g_2 g_1)^{-\frac{n-1}{2}}, & n - \text{impar} \end{cases} \\ g_2^{\sigma_1^n} = g_1^{\sigma_1^{n+1}}. \end{cases}$$

donde $\tilde{f}_*(\gamma) = \pi^{-1}(\gamma(t)) \cap \mathcal{C} = (t, \pm \exp(n\pi it)) := \sigma_1^n \in \mathbb{B}_2$.

Luego $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}) = \langle g_1, g_2, \gamma : g_j^{\sigma_1^n} = \gamma^{-1} g_j \gamma \rangle$ y en consecuencia

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}) = \langle g_1, g_2 : g_j^{\sigma_1^n} = g_j \rangle = \langle g_1, g_2 : \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \rangle$$

Donde

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} (g_2 g_1)^{\frac{n}{2}} g_1 = g_1 (g_2 g_1)^{\frac{n}{2}}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ (g_2 g_1)^{\frac{n-1}{2}} g_2 = g_1 (g_2 g_1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{cases} (g_2 g_1)^{\frac{n}{2}} g_2 = g_2 (g_2 g_1)^{\frac{n}{2}}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ (g_2 g_1)^{\frac{n+1}{2}} g_1 = g_2 (g_2 g_1)^{\frac{n+1}{2}}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

3. Aplicación

En [5] y [6] se estudian los gérmenes de foliaciones holomorfas cuspidales casi homogéneas de tipo admisible en $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, los cuales admiten forma pre-normal dada por la 1-forma integrable

$$\Omega = d(z^2 + \varphi(x, y)) + G(\Psi, z)(rz d\Psi - 2\Psi dz),$$

donde $\Psi = \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q)^{d'_i}$, $p, q \geq 2$, $a_i \neq 0$, $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, d'_i son primos relativos, $\varphi = \Psi^r$; $r \in \mathbb{N}^*$, y G es un germen de función holomorfa en dos variables.

Por construcción (ver [5]), la foliación generada por Ω , \mathcal{F}_Ω tiene como conjunto de separatrices a la superficie

$$S := z^2 + \prod_{i=1}^l (y^p - a_i x^q) = 0.$$

Por otro lado, si el grado pesado $\nu_{2,r}(G) \geq \frac{r-2}{mcd(2,r)}$, \mathcal{F}_Ω es de tipo superficie generalizada. Es decir, en la etapa final de la reducción de singularidades de \mathcal{F}_Ω únicamente a parecen singularidades simples, como consecuencia (ver [4]), la reducción de singularidades de \mathcal{F}_Ω coincide con la reducción de singularidades de S . Denotemos por $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega$ y por \tilde{S} a la desingularización de \mathcal{F}_Ω y de S respectivamente.

En la técnica de la holonomía proyectiva, para la clasificación analítica de las foliaciones del tipo \mathcal{F}_Ω , es necesario identificar una componente del divisor excepcional, de la reducción de singularidades de S , en el cual es posible construir una fibración de Hofp. Esta componente, después de quitar el conjunto de singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}_\Omega$ está dado por

$$\tilde{D} \setminus \text{Sin}(\tilde{\mathcal{F}}_\Omega) \approx \mathbb{C}^2 - \mathcal{C},$$

donde $\mathcal{C} := y^2 + \prod_{j=1}^l (x - a_j)^{d_j} = 0$, $d_i > 1$ con $a_j \in \mathbb{C}$, $a_j \neq a_i$ si $j \neq i$ y $d_j > 1$, para algún j .

Usando el método discutido en la sección 2, considere la proyección $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\pi(x, y) = x$. Observe que

$$\begin{aligned} \Delta_f &= \{a_1, a_2, \dots, a_l\}; \\ \mathcal{L} &:= \bigcup_{j=1}^l \mathcal{L}_j; \quad \mathcal{L}_j = \pi^{-1}(a_j). \end{aligned}$$

La restricción

$$\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Delta_f$$

es una fibración localmente trivial, con fibras isomorfas a $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C} \setminus \{2 \text{ puntos}\}$. Para todo $p \in \mathbb{C} \setminus \Delta_f$, se tiene la secuencia exacta (1).

Sea $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta_f) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_l \rangle$; con $\gamma_j = \alpha_j^{-1} \eta_{\hat{x}, D_j} \alpha_j$ meridianos de a_j . Observe que la factorización de monodromía de trenza $\in (\mathbb{B}_2)^l$ y es tal que la acción de los γ_i sobre los g_j está dada por $\tilde{f}_*(\gamma_i)(g_j) = g_j^{\sigma_i^{d_j}}$, donde

$$\tilde{f}_*(\gamma_i) = \pi^{-1}(\gamma_j) \cap \mathcal{C} \equiv \pi^{-1}(\eta_{\hat{x}, D_j}) \cap \mathcal{C} = \sigma_1^{d_j} := (t, \varepsilon_j \exp(d_j \pi i t)) \in \mathbb{B}_2.$$

Observe que la monodromía a lo largo de α_j únicamente produce una contracción de los puntos sobre las fibras y la monodromía a lo largo de $\eta_{\hat{x}, D_i}$ es dada como en el ejemplo 5 para cada d_j . Luego

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C} \cup \mathcal{L}) = \left\langle g_1, g_2, \gamma : g_i^{\sigma_1^{d_j}} = \gamma^{-1} g_i \gamma; \quad i = 1, 2; \quad j = 1, \dots, l \right\rangle$$

y en consecuencia

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}) = \{g_1, g_2 : g_i^{\sigma_1^{d_j}} = g_i\} = \{g_1, g_2 : \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$$

Donde $\sigma_1^{d_j}, \mathcal{R}_j$ es como en el ejemplo 5, para cada d_j .

Notemos que para todo $g \in \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C})$ tenemos $g^{\sigma_1^{d_j}} = g, \forall j = 1, \dots, l$. Por otro lado, sea $r = \text{mcd}\{d_1, \dots, d_l\}$, entonces

$$r = \sum_{i=1}^l m_i d_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}$$

Luego, $g^{\sigma^b} = g$ para todo $b \in \langle d_1, \dots, d_l \rangle = r\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} g^{\sigma^b} &= g^{\sigma^{a_1 d_1 + \dots + a_l d_l}} \\ &= \left((g^{\sigma^{a_1 d_1}})^{\dots} \right)^{\sigma^{a_l d_l}} \\ &= \left(\left(\left(\left(g^{\sigma^{d_1}} \right)^{\dots} \right)^{\sigma^{d_1}} \right)^{\dots} \right)^{\sigma^{a_l d_l}} = g \end{aligned}$$

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}) = \langle g_1, g_2 : g_i^{\sigma^r} = g_i \quad i = 1, 2 \rangle = \{g_1, g_2 : \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$$

Donde

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} (g_2 g_1)^{\frac{r}{2}} g_1 = g_1 (g_2 g_1)^{\frac{r}{2}}, & \text{si } r \text{ es par;} \\ (g_2 g_1)^{\frac{r-1}{2}} g_2 = g_1 (g_2 g_1)^{\frac{r-1}{2}}, & \text{si } r \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{cases} (g_2 g_1)^{\frac{r}{2}} g_2 = g_2 (g_2 g_1)^{\frac{r}{2}}, & \text{si } r \text{ es par;} \\ (g_2 g_1)^{\frac{r+1}{2}} g_1 = g_2 (g_2 g_1)^{\frac{r+1}{2}}, & \text{si } r \text{ es impar.} \end{cases}$$

Observación 6.

- Si r es impar, escribimos $r := 2k + 1$. Cambiando de generadores

$$\alpha := g_2 g_1, \quad \beta := (g_2 g_1)^k g_2,$$

con inversa

$$g_2 = \alpha^{-k} \beta, \quad g_1 = \beta^{-1} \alpha^{k+1},$$

obtenemos, con los nuevos generadores, $\mathcal{R}_1 \equiv \mathcal{R}_2 \equiv \alpha^k = \beta^2$. Luego

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}) = \langle \alpha, \beta : \alpha^r = \beta^2 \rangle$$

- Si r es par, escribimos $r := 2k$. Realizando el mismo cambio de generadores anterior, obtenemos la representación

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}) = \langle \alpha, \beta : \beta \alpha^r = \alpha^r \beta \rangle$$

4. Conclusión

Para el estudio de la clasificación analítica de foliaciones holomorfas singulares de codimensión uno sobre $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, cuspidales casi homogéneas de tipo admisible, por medio de la técnica de la holonomía proyectiva, es necesario estudiar de manera precisa la topología de cada componente del divisor excepcional después de eliminar el conjunto singular. Para este cálculo se ha precisado el método moderno de Zariski-Van Kampen, el cual usa el grupo de trenzas. En particular, hemos enfocado nuestra atención en el cálculo el grupo fundamental de la curva $\mathcal{C} := y^2 + \prod_{i=1}^l (x - a_i)^{d_i}$, $d_i > 1$, el cual aparece en el estudio de foliaciones que admiten como conjunto de separatrices a la superficie $z^2 + \prod_{i=1}^l (y^p + a_i x^q)^{d_i} = 0$.

Como resultado de nuestro análisis, se han identificado algunos problemas abiertos de interés. Entre ellos, destacamos el estudio de foliaciones que admitan como conjunto de separatrices superficies de la forma $S : z^k + x^n y^m \prod_{i=1}^l (y^p + a_i x^q)^{d_i} = 0, k > 2$. Resolver este problema permitirá avanzar en el estudio de la clasificación analítica de foliaciones que admitan como conjunto de separatrices a superficies de la forma $S : z^k + f(x, y) = 0$, donde f define una curva plana singular.

Referencias bibliográficas

- [1] Artin, E. (1946). Theory of braids. *Annals of Mathematics*, 48, 93-114.
- [2] Birman, J. S. (1974). Braids, links, and mapping class groups. Princeton University Press.
- [3] Cheniot, D. (1974). Le théorème de Van Kampen sur le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe algébrique projective plane. In *Lecture Notes in Mathematics* (Vol. 904, pp. 395-417). Springer.
- [4] Fernández-Sánchez, P., Mozo-Fernández, J., Neciosup, H. (2013). Hipersuperficie generalizada en $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$. *Pro Mathematica*, 27, 53-54.
- [5] Fernández-Sánchez, P., Mozo-Fernández, J., Neciosup, H. (2016). On codimension one foliations with prescribed cuspidal separatrix. *Journal of Differential Equations*, 256(4), 1702-1717.
- [6] Fernández-Sánchez, P., Mozo-Fernández, J., Neciosup, H. (2016). Analytic classification of a class of cuspidal foliations in $(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$. *Journal of Differential Equations*, 261(1), 439-454.
- [7] Moishezon, B. (1980). Stable branch curve and braid monodromies. In *Algebraic Geometry* (pp. 107-192). Springer.
- [8] Moussu, R. (1985). Holonomie évanescence des équations différentielles dégénérées transverses. In *Singularities and Dynamical Systems* (pp. 151-173). North Holland.
- [9] Schenkman, E. (1965). Group theory. Van Nostrand.
- [10] Steenrod, N. (1965). Topology of fibre bundles. Princeton University Press.
- [11] Teicher, M. (1995). Braid group, algebraic surfaces and fundamental groups of complements of branch curves. In *Algebraic Geometry* (pp. 127-150). American Mathematical Society.
- [12] Van Kampen, E. (1933). On the fundamental group of an algebraic curve. *American Journal of Mathematics*, 55.