PESQUIMAT 26(1): 18–31 (2023)
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v26i1.25519
ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Bases Estándar para Ideales en el Anillo $\boldsymbol{K}[[\mathbf{X}]]$

María del Carmen Cáceres Huamán [1]

Resumen: Este artículo presenta las bases estándar para ideales, en el contexto de anillos de series de potencias formales sobre un campo, empleando el Algoritmo de Buchberger bajo ciertas restricciones. También muestra varias caracterizaciones de bases estándar equivalentes. Esto permite calcular las codimensiones de ideales en anillos de series de potencias formales.

Palabras clave: Series Formales, Topología $\mathcal{M}$-ádica, Bases Estándar.

Standard Bases for Ideals in the ring $\boldsymbol{K}[[\mathbf{X}]]$

Abstract: This article presents the standard bases for ideals, in the context of formal power series rings over a field, employing the Buchberger's Algorithm under certain restrictions. It also shows several characterizations of equivalent standard bases. This allows us to calculate the codimensions of ideals in rings of formal power series.

Keywords: Formal Series, $\mathcal{M}$-adic Topology, Standard Bases.

Recibido 28/12/2022 *Aceptado 14/03/2023* *Publicado online 30/06/2023*

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: mcaceresh@unmsm.edu.pe

1. Introducción

En 1965, Bruno Buchberger presentó su disertación de tesis doctoral (ver [3]) en la Universidad de Innsbruck en Austria, en el cual él resolvio el problema planteado por su asesor Wolfgang Gröbner (1899-1980), a saber, construir una K-base del anillo de clases de residuos para un ideal I de dimensión cero en el anillo de polinomios sobre un campo K, Buchberger construyo un algoritmo que continuaba siendo valido para cualquier ideal I, posteriormente en 1976 le acuñó el término *bases de Gröbner* como tributo a su mentor. Independientemente en 1964, Heisuke Hironaka en [7] introduce la teoria de bases estándar en anillos de series de potencias formales. T. Becker en [1] y [2] desarrollaron la adaptación del Algortimo de Buchberger a los anillos de series de potencias formales. En este trabajo trabajo consideraremos el enfoque desarrollado por Hefez y Hernandes en [6].
El presente artículo está estructurado de la siguiente manera:
En la segunda sección damos las definiciones de orden monomial, monoideal y las principales propiedades del anillo de series de potencias formales sobre un campo.
En la tercera sección veremos la definición de reducciones en el anillo de series de potencias formales, para emplearlo en el Algoritmo de división adaptado al anillo de series formales.
En la cuarta sección se desarrolla la definición de bases estándar, el teorema principal sobre las bases estándar que da sus caracterizaciones equivalentes, luego veremos el Algoritmo de Buchberger en el contexto de anillo de series de potencias formales, que conduce a la obtención una única base estándar reducida, finalmente como una aplicación veremos como calcular la codimensión de un ideal del anillo de series de potencias formales.

2. Preliminares

2.1. Orden Monomial

Denotemos por $K[[\mathbf{X}]]$ al anillo de las series de potencias formales $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ en las indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$ con coeficientes en el campo K. Un monomio mónico en estas indeterminadas es una expresión de la forma $\mathbf{X}^\alpha = X_1^{a_1} X_1^{a_2} \cdots X_n^{a_n}$, donde $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Denotaremos por $\mathbf{T}^n$ al conjunto de todos esos monomios con elementos unidad $1 = X_1^0 X_2^0 \cdots X_n^0$ y la operación usual de multiplicación de polinomios.

Teorema 2.1 (Dickson) *Cada subconjunto no vacío A de $\mathbf{T}^n$, tiene un subconjunto finito mínimo D de divisores ($\forall a \in A, \exists\, t \in D$ tal que $t \mid a$), (ver[6]).*

Definición 2.1 *Un orden monomial en $K[[\mathbf{X}]]$ es una relación de orden total $\preccurlyeq$ en $\mathbf{T}^n$ que además tiene las siguientes propiedades:*

1. $\forall\, t \in \mathbf{T}^n$, $1 \preccurlyeq t$.
2. $\forall\, t, t_1, t_2 \in \mathbf{T}^n$, *si* $t_1 \preccurlyeq t_2 \;\Rightarrow\; t_1\, t \preccurlyeq t_2\, t$.

Observe que, si $s \mid t$ entonces $s \preccurlyeq t$, $\forall s, t \in \mathbf{T}^n$. Luego por el Teorema 2.1, todo orden monomial en $\mathbf{T}^n$ es un buen orden. Si $s \preccurlyeq t$ pero $s \neq t$, se denotará por $s \prec t$ ó $t \succ s$.

Ejemplo 2.1 (El orden lexicográfico en $\mathbf{T}^n$) *Sean $\mathbf{X}^\alpha$ y $\mathbf{X}^\beta$ elementos en $\mathbf{T}^n$. Diremos que $\mathbf{X}^\alpha \leq_{\mathrm{Lex}} \mathbf{X}^\beta$, si $\alpha = \beta$ o si la primera coordenada diferente de cero de $(\beta - \alpha)$ es positiva.*

Ejemplo 2.2 (El orden lexicográfico graduado en $\mathbf{T}^n$) *Sean $\mathbf{X}^\alpha$ y $\mathbf{X}^\beta$ elementos en $\mathbf{T}^n$, donde $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$. Diremos que $\mathbf{X}^\alpha \leq_{\mathrm{GLex}} \mathbf{X}^\beta$ si se cumple:*

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} b_i$, *ó*
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$ *y* $\mathbf{X}^{\alpha} \leq_{\text{Lex}} \mathbf{X}^{\beta}$.

2.2. Monoideal

Definición 2.2 *Un subconjunto no vacío Δ de $\mathbf{T}^n$ será llamado un monoideal de $\mathbf{T}^n$ si*

$$\Delta \cdot \mathbf{T}^n := \{\delta \cdot t \; ; \; \delta \in \Delta, \, t \in \mathbf{T}^n\} \subset \Delta.$$

Ejemplo 2.3 *Sea J un ideal monomial (es decir, un ideal generado por monomios) en $K[[\mathbf{X}]]$, entonces el conjunto Δ de todos los monomios en J es un monoideal de $\mathbf{T}^n$.*

Definición 2.3 *Un subconjunto B de un monoideal Δ en $\mathbf{T}^n$ es llamado un conjunto de generadores de Δ, si $\Delta = \langle \cdot B \cdot \rangle$; donde $\langle \cdot B \cdot \rangle := \{b \cdot t \; ; \; b \in B, \, t \in \mathbf{T}^n\}$.*

Un conjunto de generadores B de un monoideal Δ será llamado mínimo, si es mínimo respecto a la inclusión.

Proposición 2.1 *Todo monoideal Δ en $\mathbf{T}^n$ tiene un conjunto de generadores mínimo finito.*

Prueba. El conjunto de generadores mínimo y finito es precisamente el conjunto mínimo de divisores de $\Delta \setminus \{0\}$, el cual existe por el Teorema de Dickson 2.1. $\square$

2.3. El anillo de series de potencias formales

Dado que $f \in K[[\mathbf{X}]]$ puede representarse de la forma

$$f = \sum_{\alpha \in I} a_{\alpha} \mathbf{X}^{\alpha} \; , \; a_{\alpha} \in K, \, I \subset \mathbb{N}^n.$$

Si $f \neq 0$ es dado como arriba, definimos el conjunto de monomios de f como

$$\mathbf{T}(f) = \{\mathbf{X}^{\alpha}; \; \alpha \in I \; , \; a_{\alpha} \neq 0\}.$$

Es concido que (ver [5]), los elementos invertibles de $K[[\mathbf{X}]]$ son los elementos de la forma $u = a + g$, donde $a \in K \setminus \{0\}$ y $g \in \mathcal{M}_{\mathbf{X}} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ (ideal generado por los elementos $X_1, \ldots, X_n$). Entonces, u es invertible si y sólo si $u \notin \mathcal{M}_{\mathbf{X}}$. Esto en particular muestra que $K[[\mathbf{X}]]$ es un anillo local con ideal maximal $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$.

Denotaremos con $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}^{i}$, $i \in \mathbb{N}$ a la i-ésima potencia del ideal $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$ y consideraremos $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}^{0} = K[[\mathbf{X}]]$. Definimos la topología $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$-ádica de $K[[\mathbf{X}]]$, tomando alrededor de cualquier elemento fijo $f \in K[[\mathbf{X}]]$, los conjuntos $\{f + \mathcal{M}_{\mathbf{X}}^{i}\}$, $i \in \mathbb{N}$ como sistema fundamental de vecindades de f. Esto convierte a $K[[\mathbf{X}]]$ en un anillo topológico.

Como tenemos que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{\mathbf{X}}^{i} = \{0\}$, la topología $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$-ádica en $K[[\mathbf{X}]]$ es Hausdorff; de hecho es metrizable, veamos: si $f \in K[[\mathbf{X}]]$, definamos la multiplicidad de f como

$$mult(f) = sup\{i \; ; \; f \in \mathcal{M}_{\mathbf{X}}^{i}\}.$$

Sea ρ un número real mayor que 1 y colocaremos $\rho^{-\infty} = 0$. Para $f, h \in K[[\mathbf{X}]]$, la función

$$d(f, h) = \rho^{-mult(h-f)},$$

define una métrica completa en $K[[\mathbf{X}]]$.

Una familia $\{f_\lambda \; ; \; \lambda \in \Lambda\} \subset K[[\mathbf{X}]]$ se llamará sumable si para cada $t \in \mathbf{T}^n$ tenemos

$$\#\big\{\lambda \in \Lambda \; ; \; t \in \mathbf{T}(f_\lambda)\big\} < \infty.$$

Desde que $(K[[\mathbf{X}]], d)$ es un espacio métrico completo, se tiene que, para cualquier familia sumable en $K[[\mathbf{X}]]$, la suma $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ es válida, definiendo un elemento en $K[[\mathbf{X}]]$.

3. Reducciones en el anillo K[[X]]

En lo que sigue fijaremos un orden monomial $\preccurlyeq$ en $\mathbf{T}^n$.

La potencia lider de $f \in K[[\mathbf{X}]]$, con $f \neq 0$, es $lp(f) = \text{mín}\, \mathbf{T}(f)$, donde el mínimo se toma respecto al orden monomial $\preccurlyeq$ fijado; por el Teorema de Dickson 2.1 $lp(f)$ esta bien definida. Si $G \subset K[[\mathbf{X}]]$, denotaremos por $lp(G) = \{lp(f); f \in G - \{0\}\}$.

El término lider de $f = \displaystyle\sum_{\alpha \in I} a_\alpha X^\alpha \neq 0$ es $lt(f) = a_\beta \mathbf{X}^\beta$, donde $\mathbf{X}^\beta = lp(f)$.

Definición 3.1 *Sea B un subconjunto finito de $K[[\boldsymbol{X}]]$ y $g, r \in K[[\boldsymbol{X}]]$ con $g \neq 0$, diremos que r es una reducción de g módulo B si existe un monomio $t \in \mathbf{T}^n$, una constante $a \in K$ y un elemento $f \in B$ tal que $r = g - atf$ con $lp(r) \succ lp(g)$, si $r \neq 0$.*

En ese caso escribiremos $g \xrightarrow{B} r$.

Considere una cadena (posiblemente infinita) de reducciones

$$g \xrightarrow{B} r_1 \xrightarrow{B} r_2 \xrightarrow{B} \cdots \xrightarrow{B} r_m \xrightarrow{B} \cdots$$

esto implica que existen $t_i \in \mathbf{T}^n$, $a_i \in K$ y $f_i \in B$, $i \geq 1$ tal que $r_m = g - \sum_{i=1}^m a_i t_i f_i$, donde por la definición de reducción,

$$lp(t_1 f_1) \prec lp(t_2 f_2) \prec \cdots \tag{1}$$

Si la cadena es infinita, obtenemos una sucesión $\left(\sum_{i=1}^m a_i t_i f_i\right)_{m \geq 1}$ en $K[[\mathbf{X}]]$, que resulta ser convergente en $K[[\mathbf{X}]]$ (con respecto a la topología $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$-ádica). En efecto, es suficiente verificar que el conjunto $\{t_i f_i \; , \; i \geq 1\}$ es sumable, de hecho si para algún $t \in \mathbf{T}^n$, $\#\big\{i \; ; \; t \in \mathbf{T}(t_i f_i)\big\} = \infty$; como B es finito, existe $f \in B$ e infinitos elementos $t_i \in \mathbf{T}^n$ tales que $t \in \mathbf{T}(t_i f)$, luego de (1) se deduce que los t_i tienen que ser distintos lo cual es absurdo, pues $t_i \preccurlyeq t$ para infinitos valores de i.
Denotaremos el límite de la suseción $\left(\sum_{i=1}^m a_i t_i f_i\right)_{m \geq 1}$ por $\sum_{i \geq 1} a_i t_i f_i$.

Dado que todos los términos de la sucesión anterior estan en $\langle B \rangle$ y como cualquier ideal es cerrado con la topología M-adica (ver [1]), tenemos que $\sum_{i \geq 1} a_i t_i f_i$ pertenece al ideal $\langle B \rangle$.

Ahora extenderemos la noción de reducción para incluir toda la cadena de reducciones $r_m = g - \displaystyle\sum_{i=1}^m a_i t_i f_i$, y sus límites. Sigue siendo cierta con esta definición extendida que si un elemento r es una reducción de g módulo B, entonces $g - r \in \langle B \rangle$.

Definición 3.2 *Diremos que r es una reducción final de g módulo B si r es una reducción de g módulo B y además $r = 0$ ó $lp(f) \nmid lp(r)$, $\forall f \in B$; escribiendo en este caso, $g \xrightarrow{B_+} r$.*

Definición 3.3 *Si r es la reducción final de g tal que $r = 0$ ó ningún elemento en $\mathbf{T}(r)$ es divisible por cualquier $lp(f)$ con $f \in B$, entonces r será denominada una reducción completa de g módulo B.*

Si $B = \{f_1, \cdots, f_s\} \subset K[[\mathbf{X}]]$ y $f \in K[[\mathbf{X}]]$, podemos obtener una reducción completa r de f módulo B y series $q_1, \cdots, q_s \in K[[\mathbf{X}]]$, tal que

$$f = \sum_{i=1}^{s} q_i f_i + r,$$

aplicando el siguiente algoritmo:

Algoritmo de División en $\boldsymbol{K}[[\mathbf{X}]]$

Entrada : f , $B = (f_1, \ldots, f_s)$;
Defina : $q_1 := 0; \ldots; q_s := 0$; $r := 0$;
MIENTRAS $f \neq 0$, HACER
SI existe $lp(f_i) \mid lp(f)$
ENTONCES tome el menor entero i, y haga:
$q_i := q_i + \dfrac{lt(f)}{lt(f_i)}$;
$f := f - \dfrac{lt(f)}{lt(f_i)} \cdot f_i$;
DE LO CONTRARIO
$r := r + lt(f)$;
$f := f - lt(f)$;

Para obtener simplemente una reducción final de r de f, reemplazar las dos últimas filas del algoritmo anterior haciendo $r := f$ y $f := 0$.

Ejemplo 3.1 *Sea $f = X$, $f_1 = X + Y^2$ y $f_2 = Y + X^2$ en $K[[X, Y]]$ y consideremos el orden lexicográfico graduado en $\mathbf{T}^2$. Aplicando el Algoritmo de División a f módulo f_1, f_2, obtenemos:*

$$\begin{array}{ll}
f = f_1 + r_1 & r_1 = -Y^2 \\
r_1 = -Y f_2 + s_1 & s_1 = Y X^2 \\
s_1 = XY f_1 + r_2 & r_2 = -XY^3 \\
r_2 = -Y^3 f_1 + r_3 & r_3 = Y^5 \\
r_3 = Y^4 f_2 + s_2 & s_2 = -Y^4 X^2 \\
\vdots & \vdots \\
s_i = (-1)^{i+1} XY^{3i-2} f_1 + r_{2i} & r_{2i} = (-1)^i XY^{3i} \\
r_{2i} = (-1^i) Y^{3i} f_1 + r_{2i+1} & r_{2i+1} = (-1)^{i+1} Y^{3i+2} \\
r_{2i+1} = (-1)^{i+1} Y^{3i+1} f_2 + s_{i+1} & s_{i+1} = (-1)^i X^2 Y^{3i+1}
\end{array}$$

Aunque el algoritmo no termina en este caso, sin embargo permite concluir facilmente que 0 es una reducción final de f módulo $\{f_1, f_2\}$.

Observe que para una f dada, si el algoritmo de división, con respecto a algún conjunto finito B, termina después de un número finito de pasos, tenemos un algoritmo para obtener una reducción final ó completa de f módulo B.
Además el algoritmo usa una ordenación para los elementos de B. Entonces para una ordenación dada de los elementos de B, tenemos un r y los q_i's estan determiandas univocamente. Sin embargo para una ordenación diferente de los elementos de B, podemos obtener deiferentes reducciones finales o completas de f, módulo B. Como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2 *Sean* $f_1 = Y^7 - 2X^5Y^2 - X^9$, $f_2 = X^{10}$, $f_3 = Y^6 - X^5Y - X^7$, $f_4 = Y^7 - X^5Y^2 - X^7Y + X^{10}$ *y* $f = Y^{12} - X^5Y^7 - X^7Y^6$ *en* $\mathbb{Q}[[X,Y]]$. *Consideremos* $\mathbf{T}^2$ *ordenado por el orden lexicográfico graduado. Utilizando el algoritmo anterior obtenemos que* $r = X^9Y^2$ *es una reducción completa de* f *módulo* (f_1, f_2, f_3, f_4), *mientras que* $r = 0$ *es la reducción completa de* f *módulo* (f_3, f_2, f_1, f_4).

4. Bases estándar para ideales en el anillo $K[[\mathbf{X}]]$

En esta sección presentamos las bases estándar para ideales en el contexto de los anillos de series de potencias formales, el principal concepto de este estudio. El nombre de bases estándar se debe a H. Hironaka, quien las introdujo en su famoso artículo [7] para estudiar ideales en anillos de series de potencia convergente. Estos objetos son conocidos en anillos polinomiales, donde se denominan bases de Gröbner.

Definición 4.1 *Un subconjunto finito* B *de* $K[[\boldsymbol{X}]]$ *es una base estándar para un ideal si para cada* $g \in \langle B\rangle$, *existe un elemento* $f \in B$ *tal que* $lp(f) \mid lp(g)$.

Diremos que B es una *base estándar para el ideal* I, si B es una base estándar para un ideal y $I = \langle B\rangle$.

Decir que B es una base estándar de un ideal, es equivalente a decir que $lp\big(\langle B\rangle\big) = \langle \cdot lp(B) \cdot \rangle$.

Definición 4.2 *Dada una suma (posiblemente infinita) en* $K[[\mathbf{X}]]$, $\sum_{l\in L} f_l$, $f_l \in K[[\mathbf{X}]]$; *definimos la altura de la suma como*

$$ht\Big(\sum_{l\in L} f_l\Big) = \text{mín}\{lp(f_l)\ ; l \in L\}.$$

Observe que esta definición depende de la representación $\sum_{l\in L} f_l$ como una suma y no del elemento que determina esta suma, de hecho tenemos que $ht\Big(\sum_{l\in L} f_l\Big) \preccurlyeq lp\Big(\sum_{l\in L} f_l\Big)$, donde $\preccurlyeq$ es el orden monomial fijado.
Diremos que f_i contribuye a la altura de $\sum_{l\in L} f_l$ si $lp(f_i) = ht\Big(\sum_{l\in L} f_l\Big)$.

Definición 4.3 *La amplitud de* $\sum_{l\in L} f_l$ *es definida como el número de sumandos* f_j *en* $\sum_{l\in L} f_l$ *que contribuyen a su altura.*

Definición 4.4 *Un* S*-proceso de un par de elementos distintos de cero* $f, g \in K[[\mathbf{X}]]$, *es una expresión de la forma*

$$S(f,g) = pf + qg,$$

donde $p, q \in K[[\mathbf{X}]]$, *tal que* $S(f,g) = 0$ *ó* $lp\big(S(f,g)\big) \succ ht(pf + qg)$.

Teorema 4.1 (Gröbner - Hironaka - Buchberger) .

1. *Todo ideal* I *en* $K[[\mathbf{X}]]$ *tiene una base estándar.*
2. *Dado un conjunto* $B = \{f_1, \cdots, f_s\}$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   a) *B es una base estándar para un ideal.*
   b) *Todas las reducciones finales módulo B de cualquier elemento de $\langle B\rangle$ son ceros.*
   c) *Cada S-proceso de cualquier par dado de elementos en B, tiene una reducción final cero, o converge a cero módulo B.*

d) *Todo S-proceso distinto de cero de cualquier par dado de elementos en B, tiene una representación como una suma $\sum_{i=1}^{s} h_i f_i$, donde $h_i \in K[[\mathbf{X}]]$ y $ht\Big(\sum_{i=1}^{s} h_i f_i\Big)$ es mayor que la altura del S-proceso considerado.*

Prueba:
Para la parte (1), sea I un ideal de $K[[\mathbf{X}]]$. Desde que $lp(I) \subset \mathbf{T}^n$, entonces por el Teorema de Dickson 2.1, existe un conjunto finito G de divisores de $lp(I)$. Ahora, elegimos un subconjunto finito B de I tal que $lp(B) = G$. Luego dado $g \in I$, existe $f \in B$ tal que $lp(f) \mid lp(g)$, lo que demuestra que B es una base estándar para el ideal I.
Observe que esta demostración no es constructiva ya que se basa en el Teorema de Dickson, que a su vez se basa en el Teorema de la Base de Hilbert.

Veamos la parte (2) (a) $\Rightarrow$ (b) Suponga que B es una base estándar para un ideal y sea $g \in \langle B\rangle$. Si r es una reducción final de g módulo B, entonces $g - r \in \langle B\rangle$ y por lo tanto tenemos que $r \in \langle B\rangle$. Suponga qe $r \neq 0$, dado que B es una base estándar, entonces existirá un elemento $f \in B$ tal que $lp(f) \mid lp(r)$, pero r es una reducción final módulo B. Por lo tanto $r = 0$.
(b) $\Rightarrow$ (c) Dado que un S-proceso de elementos en B es un elemento de $\langle B\rangle$, la afirmación es evidente.
(c) $\Rightarrow$ (d) Sea $h = pf_i + qf_j \neq 0$, un S-proceso de un par f_i, f_j de elementos de B. Dado que cualquier reducción r módulo B de h es de la forma

$$r = h - \sum_{k\geq 1} a_k t_k f_{l_k},$$

donde $t_k \in \mathbf{T}^n$, $a_k \in K$ y $f_{l_k} \in B$ son tales que $l(t_k f_{l_k})$ es una sucesión estrictamente creciente en $\mathbf{T}^n$. Asumiendo (c), el elemento h tiene una reducción final cero (o que converge a cero) módulo B, entonces tenemos que

$$h = \sum_{k\geq 1} a_k t_k f_{l_k}.$$

Ahora bien, dado que la sucesión $lp(t_k f_{l_k})$ es estrictamente creciente y $h = pf_i + qf_j$ es un S-proceso, se deduce que

$$ht\Big(\sum_{k\geq 1} a_k t_k f_{l_k}\Big) = lp(h) \succ ht(pf_i + qf_j),$$

cumpliendose así la afirmación en (d).
(d) $\Rightarrow$ (a) Asumiendo (d), debemos demostrar que dado un $g \in \langle B\rangle \setminus \{0\}$, existe $f \in B$ tal que $lp(f) \mid lp(g)$. En la colección de todas las representaciones de g como una suma

$$g = \sum_{i=1}^{s} q_i f_i\ , \quad q_1, \ldots, q_s \in K[[\mathbf{X}]],$$

elegimos entre los de altura máxima uno de menor amplitud, el cual denotamos por $\sum_{i=1}^{s} h_i f_i$. Observe que si la amplitud de $\sum_{i=1}^{s} h_i f_i$ es uno, no hay nada que probar porque en ese caso $lp(g) = lp(h_{i_0})lp(f_{i_0})$ para algún i_0.

Suponga que la amplitud de $\sum_{i=1}^{s} h_i f_i$ es mayor que uno. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $h_1 f_1$ y $h_2 f_2$ contribuyen a la altura de la suma. Por lo tanto, existe $a \in K$ tal que $S = h_1 f_1 + a h_2 f_2$ es un S-proceso del par f_1, f_2. De (d) existen $g_1, \ldots, g_s \in K[[\mathbf{X}]]$ tales que

$$S = \sum_{i=1}^{s} g_i f_i,$$

con $ht\Big(\sum_{i=1}^{s} g_i f_i\Big) \succ ht(h_1 f_1 + a h_2 f_2)$. Observe que, como $h_1 f_1 + h_2 f_2 = (1-a)h_2 f_2 + \sum_{i=1}^{s} g_i f_i$, entonces

$$g = (1-a)h_2 f_2 + \sum_{i=1}^{s} g_i f_i + \sum_{i=3}^{s} h_i f_i \tag{2}$$

Supongamos que $a \neq 1$, entonces la representación de g dada en (2) tendrá la misma altura que la original, pero una amplitud menor, lo cual es una contradicción.
Supongamos que $a = 1$,
(i) Si la amplitud de la representación original de g fuera dos, entonces la altura de la representación anterior (2) sería mayor que la altura de la representación original, lo cual es una contradicción.
(ii) Si la amplitud de la representación original de g fuera mayor que dos, entonces la altura de la representación (2) sería igual a la altura de la representación original, pero la amplitud sería menor, lo que nuevamente es una contradicción. $\square$

Observación 4.1 *Las bases estándar resuelven el problema de decidir si $f \in I$ ó $f \notin I$, donde $I = \langle f_1, \cdots, f_r\rangle$ es un ideal de $K[[\mathbf{X}]]$ y $f \in K[[\mathbf{X}]]$.*

En efecto, aplicando el algoritmo de la división a f con $B = (f_1, \cdots, f_r)$. Si la reducción final de f módulo B es cero, entonces ciertamente $f \in I$. Pero si la reducción final de f módulo B no es cero, no se puede decir nada (ver ejemplo 3.2). Sin embargo, si B es una base estándar para el ideal I, entonces tenemos que $f \in I$ si y sólo si la reducción final de f módulo B es cero.

Proposición 4.1 *Si B es una base estándar, entonces la reducción completa módulo B de cualquier elemento de $K[[\mathbf{X}]]$ es única.*

Prueba:
En efecto, sean r_1 y r_2 dos reducciones completas módulo B del mismo elemento $g \in K[[\mathbf{X}]]$, luego $r_1 - r_2 \in \langle B\rangle$. Como B es una base estándar, del Teorema 4.1(b) tenemos que cualquier reducción final de $r_1 - r_2$ módulo B es cero. Supongamos que $r_1 - r_2$ aún admita reducción, es decir $r_1 - r_2 \neq 0$, entonces existiría un elemento f en B tal que $lp(f) \mid lp(r_1 - r_2)$. Como $lp(r_1 - r_2) \in \mathbf{T}(r_1) \cup \mathbf{T}(r_2)$, obtenemos una contradicción porque r_1 y r_2 son reducciones completas de g. $\square$

Cuando se verifica la condición (c) en el Teorema 4.1, decimos que B es cerrado bajo la formación de S-procesos, entonces el Teorema 4.1 dice que un conjunto B es una base estándar para un ideal si y sólo si es cerrado bajo la formación de S-procesos.

4.1. Algoritmo de Buchberger

Vimos en el Teorema 4.1 que una condición necesaria y suficiente para que un conjunto finito B sea la base estándar de un ideal es que cada S-proceso de cualquier par de elementos de B tiene una reducción final convergente a cero módulo B. Sin embargo, esta condición en la práctica no siempre se puede comprobar, pues cada par de elementos puede tener infinitos S-procesos. Veremos ahora que es suficiente verificar la condición sobre un tipo de S-procesos.

Definición 4.5 *Sean f y g elementos diferentes de cero en $K[[\mathbf{X}]]$ tales que $lt(f) = a\mathbf{X}^{\alpha}$ y $lt(g) = b\mathbf{X}^{\beta}$, el S-proceso mínimo de f y g es dado por:*

$$S_{min}(f,g) = b\,\frac{mcm\big(\mathbf{X}^{\alpha}, \mathbf{X}^{\beta}\big)}{\mathbf{X}^{\alpha}} f - a\,\frac{mcm\big(\mathbf{X}^{\alpha}, \mathbf{X}^{\beta}\big)}{\mathbf{X}^{\beta}}\, g.$$

Lema 4.1 *Sean γ, $\delta \in \mathbb{N}^n$ y $f, g \in K[[\mathbf{X}]]$. Existe $\epsilon \in \mathbb{N}^n$ tal que*

$$S_{\text{mín}}\big(\mathbf{X}^{\gamma} f; \mathbf{X}^{\delta} g\big) = \mathbf{X}^{\epsilon} S_{\text{mín}}(f, g).$$

además, si $ht\big(\mathbf{X}^{\gamma} f + \mathbf{X}^{\delta} g\big) \prec lp\big(\mathbf{X}^{\gamma} f + \mathbf{X}^{\delta} g\big)$, entonces $\mathbf{X}^{\gamma} f + \mathbf{X}^{\delta} g$ es un múltiplo escalar del S-proceso mínimo del par $\mathbf{X}^{\gamma} f$, $\mathbf{X}^{\delta} g$.

Prueba. Sean $a, b \in K$ tales que $lt(f) = a\, lp(f)$ y $lt(g) = b\, lp(g)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} S_{\text{mín}}(\mathbf{X}^{\gamma} f, \mathbf{X}^{\delta} g) &= b\, \frac{mcm\big(\mathbf{X}^{\gamma}\, lp(f), \mathbf{X}^{\delta}\, lp(g)\big)}{\mathbf{X}^{\gamma}\, lp(f)}\, \mathbf{X}^{\gamma}\, f - a\, \frac{mcm\big(\mathbf{X}^{\gamma}\, lp(f), \mathbf{X}^{\delta}\, lp(g)\big)}{\mathbf{X}^{\delta}\, lp(g)}\, \mathbf{X}^{\delta}\, g \\ &= \frac{mcm\big(\mathbf{X}^{\gamma}\, lp(f), \mathbf{X}^{\delta}\, lp(g)\big)}{mcm(lp(f), lp(g))} \Big(b\, \frac{mcm(lp(f), lp(g))}{lp(f)} f - a\, \frac{mcm(lp(f), lp(g))}{lp(g)} g\Big) \\ &= \mathbf{X}^{\epsilon} S_{\text{mín}}(f, g) \end{aligned}$$

La segunda parte del lema es evidente.

Proposición 4.2 *Sea $B = \{f_1, \ldots, f_s\}$ un subconjunto finito de $K[[\mathbf{X}]]$. Si cada S-proceso mínimo del par f_i, f_j tiene una reducción final que converge a cero módulo B, entonces B es una base estandar para el ideal $\langle B \rangle$.*

Prueba. Considere S un S-proceso arbitrario del par f_i, f_j, dado por $S = pf_i + qf_j$, con $p, q \in K[[\mathbf{X}]]$. Podemos reescribir S de la siguiente manera:

$$S = lt(p) f_i + lt(q) f_j + \big(p - lt(p)\big) f_i + \big(q - lt(q)\big) f_j \tag{3}$$

Dado que $ht\big(lt(p) f_i + lt(q) f_j\big) \prec lp\big(lt(p) f_i + lt(q) f_j\big)$, tenemos del Lema 4.1 que $lt(p) f_i + lt(q) f_j$ es un múltiplo escalar del S-proceso mínimo del par $lt(p) f_i$, $lt(q) f_j$. Además, existen $d \in K$ y $\epsilon \in \mathbb{N}^n$ tales que

$$lt(p) f_i + lt(p) f_j = d\, \mathbf{X}^{\epsilon} S_{\text{mín}}(f_i, f_j) \tag{4}$$

De la hipótesis que tenemos que $S_{\text{mín}}(f_i, f_j) \xrightarrow{B_+} 0$ y usando la argumentación que hicimos en la demostración del Teorema 4.1 se tiene que

$$S_{\text{mín}}(f_i, f_j) = \sum_k h_k f_{l_k} \tag{5}$$

donde $h_k \in K[[\mathbf{X}]], f_{l_k} \in B$ y $ht\big(\sum_k h_k f_{l_k}\big) \succ ht\big(S_{\text{mín}}(f_i, f_j)\big)$.
Ahora, sustituyendo (5) en (4), y la expresión resultante en (3), tenemos $S = d\mathbf{X}^{\epsilon} \sum_k h_k f_{l_k} + \big(p - lt(p)\big) f_i + \big(q - lt(q)\big) f_j$, donde la suma anterior tiene una altura mayor que $ht(pf_i + qf_j)$, así del Teorema(4.1) se concluye la afirmación.

Ejemplo 4.1 *Sea B cualquier conjunto finito de monomios en $K[[\mathbf{X}]]$. Es inmediato verificar que $S_{\text{mín}}(f, g) = 0$ para todo $f, g \in B$. Por lo tanto, de la Proposición 4.2 B es una base estándar de $\langle B \rangle$, además del Teorema 4.1(b) dado $f \in \langle B \rangle$, tenemos que $\mathbf{T}(f) \subset \langle B \rangle$.*

Aunque los objetos con los que estamos tratando (series de potencias) no son finitos, teóricamente podemos formular un algoritmo que permita encontrar una base estándar de un ideal $I \subset K[[\mathbf{X}]]$, comenzando con un conjunto finito de generadores A de I.

Teorema 4.2 (Algoritmo de Buchberger) . *Supongamos que es posible determinar una reducción final de cualquier serie de potencias dada módulo de cualquier subconjunto finito ordenado de $K[[\mathbf{X}]]$. Entonces existe un algoritmo para determinar una base estándar para cualquier ideal I en $K[[\mathbf{X}]]$, a partir de cualquier conjunto finito de generadores de I.*

Prueba. Sea A un conjunto finito de generadores de I, ordenado de alguna manera. Definamos la sucesión creciente $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos ordenados de I de la siguiente manera:
1. $B_0 = A$
2. Supongamos que las B_i's estan definidas para $i \leq m$, de la siguiente forma:
Si para algún par $f, g \in B_m$ la reducción final r de $S_{\text{mín}}(f, g)$ módulo B_m no es cero, defina

$$B_{m+1} = B_m \cup \{r\};\ \text{de lo contrario poner } B_{m+1} = B_m.$$

La sucesión $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es estacionaria. Pues, de lo contrario tendríamos una sucesión $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, $r_i \in B_{i+1}\backslash B_i$ y $lp(h)$ no divide a $lp(r_i)$ para todo $h \in B_i$. Lo cual contradice el Teorema de Dickson 2.1, ya que el conjunto $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{lp(r_i)\} \subset \mathbf{T}^n$ no admitiría un subconjunto finito de divisores.
Sea $B = B_N$, donde $B_m = B_N$ para todo $m \geq N$. Dado que B es cerrado bajo la formación de S-procesos mínimos, se sigue de la Proposición 4.2, que B es una base estándar de I.

A continuación el algoritmo contenido en la demostración del Teorema 4.2.

Algoritmo de Buchberger en $\boldsymbol{K}[[\mathbf{X}]]$

Entrada : A;
Defina : $B_{-1} := \emptyset; B_0 := A$ y $i := 0$;
MIENTRAS $B_i \neq B_{i-1}$, HACER
    SI existen $f, g \in B_i$ tal que una reducción final R
    módulo B_i de $S_{min}(f, g)$ es diferente de cero
        ENTONCES
            $B_{i+1} := B_i \cup \{R\}$;
        DE LO CONTRARIO
            $B_{i+1} := B_i$;
    $i := i + 1$;
Salida : B_i

Durante la aplicación del algoritmo de Buchberger tenemos en cada etapa para decidir si algunos elementos (los S-procesos mínimos) de un ideal I de $K[[\mathbf{X}]]$, tienen o no una reducción final cero módulo un conjunto finito (B_i).

Una forma sistemática de hacerlo es utilizar el algoritmo de la división en $K[[\mathbf{X}]]$, que en la mayoría de los casos no termina después de un número finito de pasos. Sin embargo, en varias situaciones, después de un número finito de pasos en el algoritmo de división, es posible decidir si una reducción final de un elemento dado módulo algún conjunto finito es cero o no, haciendo efectivo el algoritmo de Buchberger.

El algoritmo de Burchberger puede producir varias bases estándar diferentes para un ideal I de $K[[\mathbf{X}]]$. Esta diversidad de bases estándar depende esencialmente del proceso de reducción. Sin embargo, existe una forma de eliminar las redundancias, obteniendo una base reducida única.

Proposición 4.3 *Sea $B = \{f_1, \cdots, f_s\}$ una base estándar para un ideal. Si existen i y j con $i \neq j$, tal que $lp(f_j) \mid lp(f_i)$, entonces $B' = B \setminus \{f_i\}$ es una base estándar para un ideal y $\langle B' \rangle = \langle B \rangle$.*

Prueba. Está claro que $\langle B' \rangle \subset \langle B \rangle$ y que $\langle \cdot lp(B') \cdot \rangle = \langle \cdot lp(B) \cdot \rangle = lp\big(\langle B \rangle\big)$. Por lo tanto se sigue que: $\langle \cdot lp(B') \cdot \rangle \subset lp\big(\langle B' \rangle\big) \subset lp\big(\langle B \rangle\big) = \langle \cdot lp(B') \cdot \rangle$. Así, $lp\big(\langle B' \rangle\big) = \langle \cdot lp(B') \cdot \rangle$; es decir, B' es una

base estándar.
Ahora, sea $f \in \langle B \rangle$ y sea r la reducción final de f módulo B'. Si $r \neq 0$, entonces $r \in \langle B \rangle \backslash \langle B' \rangle$, pero de esta manera $lp(r) \in \langle \cdot lp(B) \cdot \rangle = \langle \cdot lp(B') \cdot \rangle$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $r = 0$, luego $f \in \langle B' \rangle$. Esto muestra que $\langle B \rangle = \langle B' \rangle$. $\square$

Definición 4.6 *Sea B una base estándar para un ideal. Si no hay elementos en B cuyas potencias lideres se dividen entre sí, entonces decimos que B es una base estándar mínima.*

Observe que la Proposición 4.3 proporciona un método para determinar una base estándar mínima, comenzando con cualquier base estándar de B.

Ejemplo 4.2 *Sea I un ideal de $K[[\mathbf{X}]]$. El conjunto $lp(I)$ es un monoideal en $\mathbf{T}^n$. Sea A el conjunto mínimo de divisores del monoideal $lp(I)$ y sea $B \subset I$ tal que $lp(B) = A$, entonces B es una base estándar para el ideal I. Si A es el conjunto mínimo de generadores del monoideal $lp(I)$, y $\#A = \#B$, entonces B es una base estándar mínima para el ideal I.*

Definición 4.7 *Una base estándar mínima B para un ideal se llamará reducida si todos los elementos de B son mónicos y $\forall f, g \in B, f \neq g : lp(g) \nmid p$, $\forall p \in \mathbf{T}(f)$.*

Proposición 4.4 *Si $I \subset K[[\mathbf{X}]]$ es un ideal, entonces I tiene una única base estándar reducida.*

Prueba.
Existencia: Dada una base estándar para un ideal, siempre es posible obtener una base estándar mínima, usando el método descrito en la Proposición 4.3. Por otro lado, si B es una base estándar mínima de I, podemos suponer sin pérdida de generalidad que todos los elementos de B son mónicos.
Para todo $f \in B$, sea r_f la reducción completa de $f - lt(f)$ módulo B. Entonces $B_0 = \{lt(f) + r_f \; ; \; f \in B\}$ es una base estándar reducida de I.

Unicidad: Sean B y B' dos bases estándar reducidas de I. Para cada $f \in B'$ existen $g, h \in B$ tal que $lp(g) \,|\, lp(f)$ y $lp(f) \,|\, lp(h)$. Dado que $lp(g) \nmid lp(h)$ si $g \neq h$, se deduce que $g = h$ y $lp(f) = lp(g)$. Lo cual establece una biyección entre B y B'. En particular, toda base estándar mínima de I tiene el mismo número de elementos.

Tome $f \in B'$ y $g \in B$ de tal manera que $lp(f) = lp(g)$. Si $f \neq g$, entonces $f - g \in I \setminus \{0\}$, por lo tanto $p = lp(f - g) \succ lp(f) = lp(g)$, donde $p \in \mathbf{T}f) \cup \mathbf{T}(g)$. Dado que $f - g \in I \setminus \{0\}$ y B y B' son bases estándar para I; por la definición de base estándar, existe un elemento en B y un elemento en B' con la misma potencia líder que divide a p, pero esto no es posible ya que B y B' son bases estándar reducidas. Por lo tanto $B = B'$. $\square$

La Proposición 4.4 muestra que la base estándar reducida depende sólo del orden monomial fijo y del ideal I, pero no del conjunto particular de generadores con el que comenzamos.
Durante la prueba de unicidad de una base estándar reducida en la Proposición 4.4, mostramos que si B y B' son dos bases estándar mínimas (no necesariamente reducidas) para un ideal I, entonces tenemos que $lp(B) = lp(B')$. Aunque posiblemente $B \neq B'$, ambas tienen la misma cantidad de elementos.

Ejemplo 4.3 *Este ejemplo que muestra que las bases estándar mínima no son únicas. Sea*

$$B = \{f_1, f_2, f_3, f_4\},$$

donde $f_1 = Y^7 - 2X^5Y^2 - X^9$, $f_2 = X^{10}$, $f_3 = Y^6 - X^5Y - X^7$ *y* $f_4 = Y^7 - X^5Y^2 - X^7Y + X^{10}$. *Como existe* $f \in \mathbb{Q}[[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]]$ *con diferentes reducciones completas módulo* B *(ver ejemplo 3.2), se sigue de la observación 4.1 que* B *no es una base estándar de ideales.*

Ahora aplicaremos el algoritmo de Buchberger para obtener una base estándar para el ideal $\langle B\rangle$. *Fijemos en* $\mathbf{T}^2$ *el orden lexicográfico graduado. Para obtener la reducción final de un elemento en* $\mathbb{Q}[[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]]$, *usaremos el algoritmo de división, fijando el siguiente orden* (f_1, f_2, f_3, f_4) *para los elementos de* B.
Paso1 : *Calculamos los* S*-procesos mínimos y sus reducciones finales, obteniendo que los* S*-procesos mínimos con reducción final cero son:* $S_{\text{mín}}(f_1, f_2), S_{\text{mín}}(f_2, f_3), S_{\text{mín}}(f_2, f_4), S_{\text{mín}}(f_3, f_4)$; *pero* $S_{\text{mín}}(f_3, f_1) = X^5Y^2 - X^7Y + X^9 =: f_5$ *y* $S_{\text{mín}}(f_1, f_4) = -X^5Y^2 + X^7Y - X^9 - X^{10} =: f_6$.

En el siguiente paso podemos continuar de dos formas diferentes, es decir, con
$B_1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ *o con* $B_2 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_6\}$

Paso2 : *Si elegimos* B_1, *todos los* S*-procesos mínimos tienen reducción final cero. Por lo tanto, dado que* $B_1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ *es cerrado bajo la formación de* S*-procesos mínimos, de la Proposición 4.2, se deduce que es una base estándar para el ideal* $\langle B\rangle$.
Paso2′ : *Si elegimos* B_2, *nuevamente, en este caso, obtenemos que* $B_2 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ *es una base estándar para* $\langle B\rangle$.
Por la Proposición 4.3, tenemos que $B' = \{f_2, f_3, f_5\} \subset B_1$ *y* $B'' = \{f_2, f_3, f_6\} \subset B_2$ *son bases estándar mínimas para* $\langle B\rangle$. *Luego, por la Proposición 4.4,* B' *es la única base estándar reducida de este tipo del ideal* $\langle B\rangle$.

4.2. Aplicación

En esta sección mostraremos cómo podemos usar una base estándar de un ideal para calcular su codimensión, la cual es una información relevante sobre el ideal.

4.2.1. La escalera asociada a un ideal

Sea $I \subset K[[\mathbf{X}]]$ un ideal. La codimensión del ideal I es la dimensión del K-espacio vectorial

$$Q = \frac{K[[\mathbf{X}]]}{I}$$

Si B es una base estándar para I, entonces los elementos de Q pueden representarse de modo único en la forma $r + I$, donde r coincide con su reducción completa módulo B. Por lo tanto, los elementos de la forma $p + I$, donde p es un monomio en $\mathbf{T}^n \setminus lp(I)$ es una base de Q como un K- espacio vectorial. Se deduce entonces que

$$\dim_K Q = \#\big(\mathbf{T}^n \setminus lp(I)\big).$$

Daremos una interpretación de la ecuación anterior en términos de diagramas de Newton en el caso $n = 2$. Sea I un ideal de $\mathrm{K}[[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]]$ y $B = \{f_0, \ldots, f_s\}$ una base estándar mínima para I.
Por el ejemplo 4.2, tenemos que $lp(B)$ es el conjunto mínimo de generadores del monoideal $lp(I)$.
Sea $lp(f_i) = X^{a_i}Y^{b_i}$, $i = 0, \ldots, s$.
Ya que para $i \neq j$, $lp(f_i) \nmid lp(f_j)$, podemos suponer, después de posiblemente reordenar los elementos de B, que $0 \leq a_0 < a_1 < \ldots < a_s$ y $b_0 > b_1 > \ldots > b_s \geq 0$. La *escalera asociada al monoideal* $\langle \cdot lp(B) \cdot \rangle$ es el conjunto

$$E_I = \log\big(\langle \cdot lp(B) \cdot \rangle\big) = \bigcup_{i=0}^{s} [(a_i, b_i) + \mathbb{N}^2] \subset \mathbb{N}^2,$$

que es independiente de la base estándar mínima B, ya que $lp\big(\langle B\rangle\big) = lp(I)$. Ahora, considerando $\Delta = \mathbb{N}^2 \setminus E_I$, tenemos que $\dim_K Q = \#\Delta$.
Así, obtenemos inmediatamente el siguiente resultado:

Lema 4.2 *Sea $I \subset \mathrm{K}[[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]]$ un ideal y $E_I = \bigcup_{i=0}^{s} \left\{(a_i, b_i) + \mathbb{N}^2\right\}$ su escalera. La codimensión de I es finita si y solo si $a_0 = b_s = 0$. En este caso,*

$$\dim_K \frac{\mathrm{K}[[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]]}{I} = \sum_{i=1}^{s} a_i(b_{i-1} - b_i) = \sum_{i=1}^{s} b_{i-1}(a_i - a_{i-1}).$$

Ejemplo 4.4 *En el ejemplo 4.3 vimos que $\{X^{10}, Y^6 - X^5Y - X^7, X^5Y^2 - X^7Y + X^9\}$ es la base estándar reducida para el ideal generado por $B = \{Y^7 - 2X^5Y^2 - X^9, X^{10}, Y^6 - X^5Y - X^7, Y^7 - X^5Y^2 - X^7Y + X^{10}\}$. Por lo tanto, la escalera de $\langle B\rangle$ es*

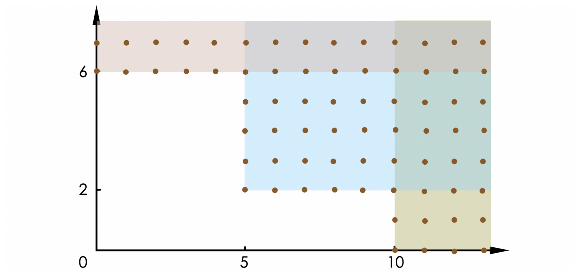

Figura 1:

En consecuencia del Lema 4.2, la codimensión de $I = \langle B\rangle$ es 40.

Referencias bibliográficas

[1] Becker, T. (1990). Standard Bases and Some Computations in Rings of Power Series. *Journal of Symbolic Computation, 10*, 165-178.

[2] Becker, T. (1993). Standard Bases in Power Series Rings: Uniqueness and Superfluous Critical Pairs. *Journal of Symbolic Computation, 15*, 251-265.

[3] Buchberger B.(2006), Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. (M. Abramson, Trad.) *Journal of Symbolic Computation, 41* (3), 475-511. (Trabajo original publicado 1965)

[4] Cox, D., Little, J. y O'Shea, D. (1996-2007). Ideals, Varieties and Algorithms. An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. *Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer.

[5] Hefez, A. (2003). Irreducible plane curve singularities in Real and Complex Singularities, *Dekker Series of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Volume 232*, D. Mond and M. J. Saia, Editors.

[6] Hefez, A. y Hernandes, M. E. (2001). Computational methods in the local theory of curves. *23º Colóquio Brasileiro de Matemática,* IMPA.

[7] Hironaka, H. (1964). Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Characteristic Zero. *Annals of Mathematics, 79*, 109-326.

[8] Zariski, O. (2006). The moduli problem for plane branches. *University lecture series, Volume 39,* American Mathematical Society.