PESQUIMAT 26(2): 39–46 (2023)
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v26i2.27116

ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Número seccional de un homomorfismo de grafos

César A. Ipanaque Zapata [1] ***and Wilman Francisco Cuba Ramos*** [2]

Resumen: En este trabajo presentaremos la noción de número seccional de un homomorfismo de grafos junto con resultados básicos sobre este invariante numérico. Usaremos este número para estudiar el número cromático de grafos.

Palabras clave: Grafo, homomorfismo de grafos, sección transversal, número seccional, coloración, número cromático.

Sectional number of a graph homomorphism

Abstract: In this work we will present the notion of sectional number of a graph homomorphism together with basic results about this numerical invariant. We will use this number to study the chromatic number of graphs.

Keywords: Graph, graph homomorphism, cross-section, sectional number, coloring, chromatic number.

Recibido: 25/09/2023. *Aceptado:* 15/11/2023. *Publicado online:* 30/12/2023.

[1]USP, Instituto de Matemática e Estatística, IME-USP. e-mail: cesarzapata@usp.br The first author would like to thank grant#2022/03270-8, São Paulo Research Foundation (FAPESP) for financial support.
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, FCM-UNMSM. e-mail:wilman.cuba@unmsm.edu.pe

1. Introducción

Desde el punto de vista de la Teoría de Categoría Seccional [5], la cual es propia de la Topología Algebraica, las aplicaciones más simples son las aplicaciones que tienen secciones transversales. Una forma de medir el número mínimo de secciones transversales de una aplicación $f\colon X \to Y$ es mediante la menor cardinalidad de las cubiertas abiertas finitas de Y tal que cada miembro de la cubierta admite una sección transversal local de f. Este invariante numérico se conoce como el número seccional de f, véase [4],[7].

Definimos la noción de número seccional de un homomorfismo de grafos. Ver Definición 3.1 a continuación para una descripción precisa utilizando cubiertas por subgrafos. Además, presentamos los resultados básicos acerca de este nuevo invariante numérico (Teorema 3.5) y usaremos este número para estudiar el número cromático de grafos (Teorema 3.10).

2. Preliminares sobre grafos

En este artículo, un *grafo* es un par (V, E), donde V es un conjunto y $E \subset \binom{V}{2}$, donde $\binom{V}{2}$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de dos elementos de V [1, Pg. 4]. Si $G = (V, E)$ es un grafo, denotamos por $V(G) = V$ su *conjunto de vértices* y por $E(G) = E$ su *conjunto de aristas* o *ejes*. Dos vértices $v_1, v_2 \in V$ son *adyacentes* si $v_1v_2 = \{v_1, v_2\} \in E$. Un *subgrafo* de $G = (V, E)$ es un grafo H con $V(H) \subset V$ y $E(H) \subset E$ [1, Pg. 40]. Dado un vértice $v \in V(G)$, el *índice* de v está dado por $\mathrm{ind}(v) = |\{e \in E(G) :\ v \in e\}|$, donde $|X|$ denota el número de elementos del conjunto X.

Dado un grafo G, para cada $S \subset V(G)$, el *subgrafo inducido* $G[S]$ es el grafo con conjunto de vértices S y vértices adyacentes si son adyacentes en G [1, Pág. 49].

Definición 2.1. *[1, Pág. 390]* Dadas los grafos G y H, un *homomorfismo de grafos* $\phi\colon G \to H$ se define como una aplicación $\phi\colon V(G) \to V(H)$ tal que para todos los pares de vértices $v_1, v_2 \in V(G)$ con $v_1v_2 \in E(G)$ tenemos $\phi(v_1)\phi(v_2) \in E(H)$.

Ejemplo 2.2.

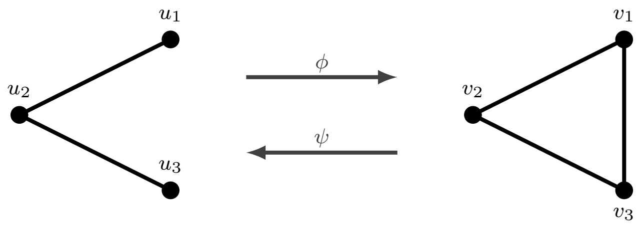
1) *Dado un grafo G, el homomorfismo identidad $1_G : G \to G$ está definido por $1_G(v) = v$ para cualquier $v \in V(G)$.*

2) *Dado K subgrafo de G, el homomorfismo inclusión $incl_K : K \hookrightarrow G$ está definido por $incl_K(v) = v$ para cualquier $v \in V(K)$.*

Nota 2.3. Dado un homomorfismo de grafos $\phi : G \to K$, el *grafo imagen* $\phi(G)$ es el grafo con el conjunto de vértices $V = \phi(V(G))$ y dos vértices $v_1, v_2 \in V$ son adyacentes si existen $u_1, u_2 \in V(G)$ que son adyacentes y $v_1 = \phi(u_1), v_2 = \phi(u_2)$. Tenga en cuenta que $\phi(G)$ es un subgrafo de $K[\phi(V(G))]$ y $\phi(G)$ es un subgrafo de K.

Si existe algún homomorfismo de grafos de G a H, entonces se dice que G es *H-coloreable.* Un homomorfismo $\phi\colon G \to H$ es *inyectivo* si la aplicación $\phi\colon V(G) \to V(H)$ es inyectiva. Hay un homomorfismo inyectivo de G a H si y solo si H admite una copia de G como un subgrafo. Un homomorfismo $\phi\colon G \to H$ es *sobreyectivo* si la aplicación $\phi\colon V(G) \to V(H)$ es sobreyectiva. Un homomorfismo $\phi\colon G \to H$ es una *biyección* si la aplicación $\phi\colon V(G) \to V(H)$ es una biyección. Si un homomorfismo $\phi\colon G \to H$ es una biyección cuya función inversa también es un homomorfismo de grafos, entonces ϕ es un *isomorfismo de grafos* y decimos que G y H son *isomorfos.*

Ejemplo 2.4. Considere los grafos G y H donde $V(G) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3\}$ y $V(H) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(H) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$. La aplicación $\phi : V(G) \to V(H)$ dado por $\phi(u_i) = v_i$ para $i = 1, 2, 3$ es un homomorfismo de grafos. Además, $\phi : V(G) \to V(H)$ es una biyección cuya aplicación inversa $\psi : V(H) \to V(G)$ está dada por $\psi(v_i) = u_i$ para $i = 1, 2, 3$. Tenga en cuenta que ψ no es un homomorfismo de grafos porque $v_3v_1 \in E(H)$ sin embargo $u_3 = \psi(v_3), u_1 = \psi(v_1)$ no son adyacentes en G.



Definición 2.5. Dada una aplicación $\phi\colon V(G) \to V(H)$ y un subgrafo K de H:

i) Denotamos por $\phi^{-1}(K)$ el *grafo imagen inverso* de K *a través de* ϕ, el cual es el grafo con el conjunto de vértices $\phi^{-1}(V(K))$ y vértices adyacentes si son adyacentes en G, es decir, $\phi^{-1}(K) = G[\phi^{-1}(V(K))]$.

ii) Denotamos por $\phi^{(-1)}(K)$ el *grafo imagen inverso débil* de K *a través de* ϕ, que es el grafo con conjunto de vértices $V = \phi^{-1}(V(K))$ y dos vértices $v_1, v_2 \in V$ son adyacentes si los vértices $\phi(v_1), \phi(v_2) \in V(K)$ son adyacentes en K.

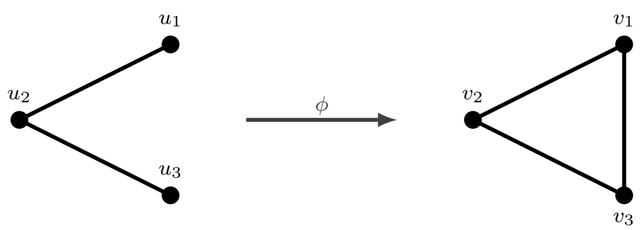
Nota 2.6. Dado un mapeo $\phi\colon V(G) \to V(H)$.

i) Es fácil comprobar que ϕ es un homomorfismo de grafos de G a H si y solo si el mapeo de restricción $\phi_| : \phi^{-1}(V(K)) \to V(K)$ es un homomorfismo de grafos de $\phi^{-1}(K)$ a K para cualquier subgrafo K de H.

ii) Si ϕ es un homomorfismo de grafos, entonces $\phi^{-1}(K)$ es un subgrafo de $\phi^{(-1)}(K)$ para cualquier subgrafo K de H.

iii) Supongamos que $\phi\colon G \to H$ es un homomorfismo de grafos biyectivo. Tenemos que G es un subgrafo propio de $\phi^{(-1)}(H)$ si y solo si $f(G)$ es un subgrafo propio de H.

Ejemplo 2.7. Considere los grafos G y K donde $V(G) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3\}$ y $V(K) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(K) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$. El mapeo $\phi : V(G) \to V(K)$ dado por $\phi(u_i) = v_i$ para $i = 1, 2, 3$ es un homomorfismo de grafos. Sea H un subgrafo de K dado por $V(H) = \{v_1, v_3\}$ y $E(H) = \{v_1v_3\}$. Tenemos que $V\left(\phi^{-1}(H)\right) = \{u_1, u_3\}$, $E\left(\phi^{-1}(H)\right) = \varnothing$ y $V\left(\phi^{(-1)}(H)\right) = \{u_1, u_3\}$, $E\left(\phi^{(-1)}(H)\right) = \{u_1u_3\}$.



Definición 2.8. *[1, Pág. 29]* Dado un grafo G y una familia $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subgrafos de G, denotamos por $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ la *unión* de $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, que es el grafo con el conjunto de vértices $V\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V(G_\lambda)$ y conjunto de aristas $E\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E(G_\lambda)$.

Note que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ es un subgrafo de $G\left[\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V(G_\lambda)\right]$.

Definición 2.9. Dados los homomorfismos de grafos $\phi\colon G \to H$ y $\psi\colon H \to K$. La *composición* $\psi \circ \phi : G \to K$ viene dada por $(\psi \circ \phi)(v) = \psi(\phi(v))$ para cualquier $v \in V(G)$.

3. Número seccional de un homomorfismo de grafos

En esta sección presentamos la noción de número seccional de un homomorfismo de grafos junto con resultados básicos sobre este nuevo invariante numérico.

Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo de grafos. Una *sección transversal* o *sección* de ϕ es un homomorfismo de grafos $s : H \to G$, tal que $\phi \circ s = 1_H$. Además, dado un subgrafo $K \subset H$, una *sección local* de ϕ sobre K es una sección del homomorfismo de grafos restricción $\phi_| : \phi^{-1}(K) \to K$, es decir, un homomorfismo de grafos $s : K \to G$, tal que $\phi \circ s$ es el homomorfismo de grafos inclusión $K \hookrightarrow H$.

Introducimos la siguiente definición.

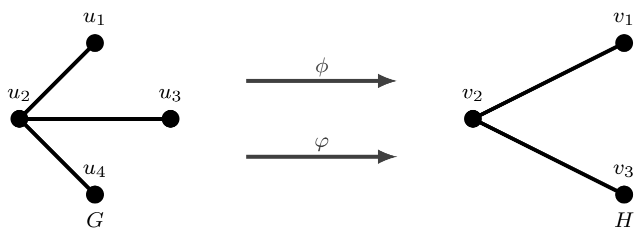
Definición 3.1. Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo de grafos. El *número seccional* de ϕ, denotado por $\sec(\phi)$, es el menor entero m tal que existen m subgrafos $H_1, H_2, \ldots, H_m$ de H que cumplan las siguientes condiciones:

a) $H = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_m$.

b) Cada H_i admite una sección local a ϕ.

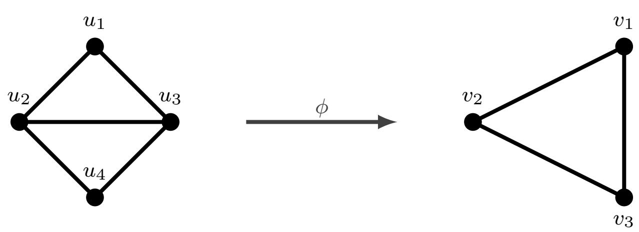
Establecemos $\sec(\phi) = \infty$ si no existen tales H_i's.

Ejemplo 3.2. Dados los grafos de la siguiente figura:



Considere los homomorfismos de grafos ϕ y φ dados por $\phi(u_1) = v_1 = \phi(u_4)$, $\phi(u_2) = v_2$, $\phi(u_3) = v_3$ y $\varphi(u_1) = \varphi(u_3) = \varphi(u_4) = v_1$, $\varphi(u_2) = v_2$, respectivamente. La aplicación s definida por $s(v_j) = u_j$ para $j = 1, 2, 3$ es una sección transversal de ϕ y por lo tanto $\sec(\phi) = 1$. Sin embargo, note que $\sec(\varphi) = \infty$ porque no hay un subgrafo K of H que admita una sección transversal local a φ con $v_3 \in V(K)$.

Ejemplo 3.3. Dados los grafos de la siguiente figura:



Considere el homomorfismo de grafos ϕ dado por $\phi(u_1) = v_1 = \phi(u_4)$, $\phi(u_2) = v_2$ y $\phi(u_3) = v_3$. La aplicación s definida por $s(v_j) = u_j$ para $j = 1, 2, 3$ es una sección transversal de ϕ y por lo tanto $\sec(\phi) = 1$.

Decimos que un homomorfismo de grafos $\phi : G \to H$ es *localmente seccionable* si $E(H) = \varnothing$ o para cada arista $uv \in E(H)$ existe un subgrafo K de H con $uv \in E(K)$ y K admite una sección local de ϕ. Tenga en cuenta que, por definición, si $\sec(\phi) < \infty$ entonces ϕ es localmente seccionable.

Usaremos el símbolo K_n para denotar el *n-grafo completo*, en otras palabras, $V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ (aquí $v_i \neq v_j$ para cualquier $i \neq j$) y $E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}$.

Nota 3.4. Sea $\phi : G \to K_2$ un homomorfismo de grafos. Note que, se cumplen los siguientes enunciados:

a) $E(G) = \varnothing$ si y solo si $\sec(\phi) = \infty$.

b) $E(G) \neq \varnothing$ si y solo si $\sec(\phi) = 1$.

Tenemos la siguiente apfirmación.

Teorema 3.5. Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo de grafos.

i) Tenemos que $\sec(\phi) = 1$ si y solo si existe un subgrafo H' de G tal que la restricción $\phi_| \colon H' \to H$ es un isomorfismo de grafos.

ii) Si $\sec(\phi) < \infty$, entonces $\phi(G) = H$. En particular, ϕ es sobreyectiva, es decir, la función $\phi \colon V(G) \to V(H)$ es sobreyectiva.

Demostración.

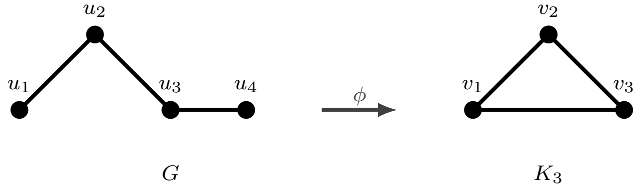
i) Supongamos que $\sec(\phi) = 1$ entonces existe un homomorfismo de grafos $s \colon H \to G$ con $\phi \circ s = 1_H$. En particular, s es inyectivo y $s(H)$ es un subgrafo de G. Además, $s \colon H \to S(H)$ es un isomorfismo de grafos cuya inversa es la restricción $\phi_| \colon S(H) \to H$. Así, $H' = s(H)$ es un subgrafo de G tal que la restricción $\phi_| \colon H' \to H$ es un isomorfismo de grafos.

   Ahora, supongamos que existe un subgrafo H' de G tal que la restricción $\phi_| \colon H' \to H$ es un isomorfismo de grafos. Sea $\sigma \colon H \to H'$ el inverso de $\phi_| \colon H' \to H$. Entonces $s \colon H \to G$ dado por $s = incl_{H'} \circ \sigma$ es una sección transversal de ϕ.

ii) Supongamos que $\sec(\phi) < \infty$. Probaremos por contradicción. Supongamos que $\phi(G)$ es un subgrafo propio de H. El caso, ϕ no es sobreyectiva implica fácilmente que $\sec(\phi) = \infty$ que es una contradicción. Supondremos que ϕ es sobreyectiva. Entonces, hay dos vértices $v_1, v_2 \in V(H) = \phi(V(G))$ que son adyacentes en H sin embargo no hay vértices $u_1, u_2 \in V(G)$ que son adyacentes en G y $\phi(u_1) = v_1, \phi(u_2) = v_2$. Considere el subgrafo K de H donde $V(K) = \{v_1, v_2\}$ y $E(K) = \{v_1 v_2\}$ y tenga en cuenta que no hay una sección transversal local $s : K \to G$ de ϕ. Entonces, ϕ no es localmente seccionable y por lo tanto $\sec(\phi) = \infty$ lo cual es una contradicción.

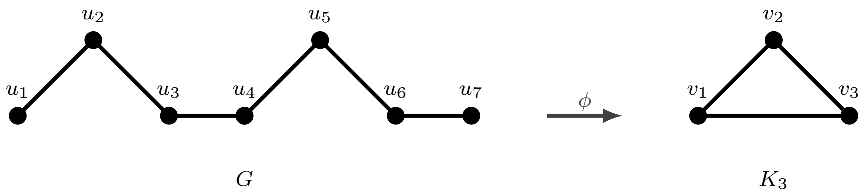
$\square$

Ejemplo 3.6. Considere los grafos de la siguiente figura:



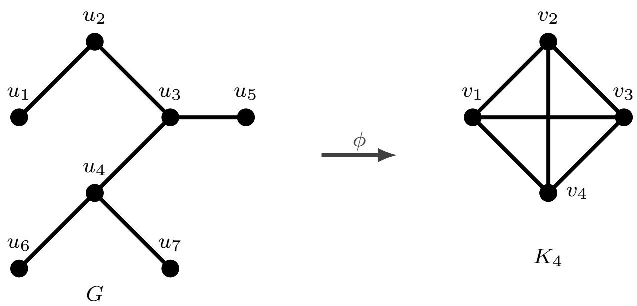
Considere el homomorfismo de grafos ϕ dado por $\phi(u_1) = v_1 = \phi(u_4)$, $\phi(u_2) = v_2$ y $\phi(u_3) = v_3$. Note que G no admite una copia de K_3, por lo tanto, $\sec(\phi) \geq 2$, ver Teorema 3.5) ítem i). Sean H_1, H_2 subgrafos de K_3 dados por $V(H_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(H_1) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ y $V(H_2) = \{v_1, v_3\}$, $E(H_2) = \{v_1v_3\}$. Note que $K_3 = H_1 \cup H_2$. Además, las aplicaciones $s_1 : H_1 \to G$, $s_1(v_j) = u_j$ con $j = 1, 2, 3$ y $s_2 : H_2 \to G$, $s_2(v_1) = u_4$, $s_2(v_3) = u_3$ son secciones transversales locales para ϕ. Por lo tanto, $\sec(\phi) = 2$.

Ejemplo 3.7. Considere los grafos de la siguiente figura:



Considere el homomorfismo de grafos ϕ dado por $\phi(u_1) = \phi(u_4) = \phi(u_7) = v_1$, $\phi(u_2) = \phi(u_5) = v_2$ y $\phi(u_3) = \phi(u_6) = v_3$. Note que G no admite una copia de K_3, por lo tanto, $\sec(\phi) \geq 2$, ver Teorema 3.5) ítem i). Sean H_1, H_2 subgrafos de K_3 dados por $V(H_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(H_1) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ y $V(H_2) = \{v_1, v_3\}$, $E(H_2) = \{v_1v_3\}$. Observe que $K_3 = H_1 \cup H_2$. Además, las aplicaciones $s_1 : H_1 \to G$, $s_1(v_j) = u_j$ para $j = 1, 2, 3$ y $s_2 : H_2 \to G$, $s_2(v_1) = u_4$, $s_2(v_3) = u_3$ son secciones transversales locales para ϕ. Por lo tanto, $\sec(\phi) = 2$.

Ejemplo 3.8. Dados los grafos de la siguiente figura:



Considere el homomorfismo de grafos ϕ dado por $\phi(u_1) = \phi(u_5) = \phi(u_6) = v_1$, $\phi(u_2) = \phi(u_7) = v_2$, $\phi(u_3) = v_3$ and $\phi(u_4) = v_4$. Supongamos que existen H_1, H_2 subgrafos de K_4 tales que $K_4 = H_1 \cup H_2$ junto con las secciones transversales locales $s_1 : H_1 \to G$ y $s_2 : H_2 \to G$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_4 \in H_1$. Entonces $s_1(v_4) = u_4$ e $\mathrm{ind}(v_4) = 3 = \mathrm{ind}(u_4)$. Entonces, tenemos un ciclo C en H_2, donde $V(C) = \{v_1, v_2, v_3\}$ and $E(C) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3\}$. Lo cual es una contradicción, ya que G no tiene ciclos. Por lo tanto, $\sec(\phi) \geq 3$. Por otro lado, sean F_1, F_2, F_3 subgrafos de K_4 dados por $V(F_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E(F_1) = \{v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4\}$, $V(F_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(F_2) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ and $V(F_3) = \{v_1, v_3\}$, $E(F_3) = \{v_1v_3\}$. Note que $K_4 = F_1 \cup F_2 \cup F_3$. Además, las aplicaciones $\sigma_1 : F_1 \to G$, $\sigma_1(v_4) = u_4$, $\sigma_1(v_1) = u_6$, $\sigma_1(v_3) = u_3$, $\sigma_1(v_2) = u_7$, $\sigma_2 : F_2 \to G$, $\sigma_2(v_j) = u_j$ para $j = 1, 2, 3$ y $\sigma_3 : F_3 \to G$, $\sigma_3(v_1) = u_5$, $\sigma_3(v_3) = u_3$ son secciones transversales locales para ϕ. Por lo tanto, $\sec(\phi) = 3$.

Un grafo G es *k-coloreable* si existe un homomorfismo de grafos $\phi\colon G \to K_k$. Si G es k-coloreable, pero no $(k-1)$-coloreable, decimos que G es *k-cromático*, o que el *número cromático* de G es k, y escribiremos $\chi(G) = k$ [6, Capítulo 6, pág. 81]. Note que, $\chi(H) \leq \chi(G)$ para cualquier subgrafo H de G. Generalmente, si hay un homomorfismo de grafos $G \to H$ entonces $\chi(G) \leq \chi(H)$. Por lo tanto, si hay homomorfismos de grafos $G \to H$ y $H \to G$, entonces $\chi(G) = \chi(H)$. En particular, el número cromático es un *invariante de grafos*, es decir, si G y H son isomorfos entonces $\chi(G) = \chi(H)$.

Ejemplo 3.9. Para cualquier $n \geq 1$, es fácil ver que $\chi(K_n) = n$.

Teorema 3.10. Sea $\phi\colon G \to H$ un homomorfismo de grafos. Si $\sec(\phi) = 1$ entonces $\chi(G) = \chi(H)$. De manera equivalente, si $\chi(G) < \chi(H)$ entonces $\sec(\phi) \geq 2$.

Demostración. Observe que, $\chi(G) \leq \chi(H)$. Además, del ítem i) del Teorema 3.5, tenemos que G admite una copia de H, entonces $\chi(G) \geq \chi(H)$ y así $\chi(G) = \chi(H)$. $\square$

Ejemplo 3.11. Sean G, H grafos. Del Teorema 3.10, si $\chi(G) < \chi(H)$ entonces $\sec(\phi) \geq 2$ para cualquier homomorfismo de grafos $\phi : G \to H$.

Nota 3.12. De [2, Pág. 83], tenemos que, cualquier grafo G define un complejo CW 1-dimensional $\mathcal{G}$, es decir, un espacio topológico $\mathcal{G}$ obtenido a partir de un conjunto discreto $V(G)$ adjuntando una colección de 1-células e_α, una 1-célula para cada eje en G. Cualquier subgrafo K de G define un subcomplejo $\mathcal{K}$ de $\mathcal{G}$. Además, cualquier homomorfismo de grafos $\phi\colon G \to H$ define una aplicación celular continua $\Phi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Queda como trabajo futuro comparar el número seccional de ϕ con el número seccional de Φ, en el sentido de [4],[7].

4. Conclusión

Hemos definido la noción de número seccional de un homomorfismo de grafos. Naturalmente, los nuevos tipos de invariantes numéricos contienen nuevas preguntas matemáticas, como estimaciones del número seccional. Nuestro trabajo aquí es apenas el comienzo del estudio del número seccional de homomorfismos de grafos. Es interesante investigar en profundidad el número seccional de varios homomorfismos de grafos para aplicaciones concretas. Por ejemplo, en informática.

Referencias bibliográficas

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008). *Graph Theory*. Springer London.

[2] Hatcher, A. (2001). *Algebraic topology*.

[3] Hell, P., and Jaroslav N. (1992). *The core of a graph*. Discrete Mathematics **109**(1-3), 117-126.

[4] Pavešić, P. (2019). *Topological complexity of a map*. Homology, Homotopy and Applications. International Press of Boston. **21**, no. 2, 107–130. ArXiv preprint arXiv:1809.09021 (2019).

[5] Schwarz, A. S. (1966). *The genus of fiber space*. Amer. Math. Sci, Transl. Series 2, **55**: Eleven papers on topology and algebra, 49-140.

[6] Wilson, R.J. (1996), *Introduction to Graph Theory*. Fourth edition, Prentice Hall.

[7] Zapata, C. A. I. and González, J. (2020). *Sectional category and The Fixed Point Property*. Topol. Methods Nonlinear Anal. Volume **56**, Number 2, 559-578.