PESQUIMAT 26(2): 47–52 (2023) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v26i2.27117 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Milnor versus Tjurina

Arkadiusz Płoski [1]

Resumen: Esta nota, basada en la conferencia impartida por el autor en la *Conference in Analytic and Algebraic Geometry, Łodź 2023*, es una panorámica de algunos resultados sobre invariantes de singularidades de hipersuperficies en característica positiva.

Palabras clave: número de Milnor, número de Tjurina.

Milnor versus Tjurina

Abstract: This note, based on the talk given by the author at the *Conference in Analytic and Algebraic Geometry, Łodź 2023*, is an overview of the results on the invariants of hypersurface singularities in positive characteristic.

Keywords: Milnor number, Tjurina number.

Recibido: 25/09/2023. *Aceptado:* 15/11/2023. *Publicado online:* 30/12/2023.

[1]Department of Mathematics and Physics. Kielce University of Technology. e-mail: matap@tu.kielce.pl.

1. Introducción

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $p \geq 0$. Denotamos por $K[[\underline{x}]] = K[[x_1, \dots, x_n]]$ el anillo de series de potencias formales en las variables $x_1, \dots, x_n$ y con coeficientes en K. Si $f = \sum_\alpha c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ entonces ponemos $\mathrm{ord} f = \mathrm{ínf}\{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \; : \; c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \neq 0\}$ y $\mathrm{in} f = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n = \mathrm{ord} f} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Sea $\mathfrak{M}_n = (x_1, \dots, x_n)$ el ideal maximal generado por $x_1, \dots, x_n$. Entonces se tiene $\mathfrak{M}_n = \{f \in K[[\underline{x}]] \; : \; f(0) = 0\}$ y el k-ésimo producto de $\mathfrak{M}_n$ es $\mathfrak{M}_n^k = \{f \in K[[\underline{x}]] \; : \; \mathrm{ord} f \geq k\}$. Recordemos que una serie de potencias $u \in K[[\underline{x}]]$ es una unidad si y solo si $u(0) \neq 0$. Una *singularidad* es una serie de potencias no nula de orden mayor o igual que dos. A toda singularidad $f \in K[[\underline{x}]]$ le asociamos el *ideal jacobiano* $J(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ y el *ideal de Tjurina* $T(f) = \left(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Consideramos los K-espacios vectoriales cocientes $\mathcal{J}(f) := K[[\underline{x}]]/J(f)$ y $\mathcal{T}(f) = K[[\underline{x}]]/T(f)$. El *número de Milnor* de la singularidad f es la dimensión de $\mathcal{J}(f)$ y lo denotamos $\mu(f)$. Respectivamente el *número de Tjurina* de f es la dimensión de $\mathcal{T}(f)$ y lo denotamos $\tau(f)$. Es claro que $1 \leq \tau(f) \leq \mu(f) \leq +\infty$. Decimos que la singularidad f es *aislada* si su número de Tjurina es finito.

Ejemplo 1.1 *Si* $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right) \neq 0$ *entonces* $\mu(f) = \tau(f) = 1$.
De hecho, si $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right) \neq 0$ *entonces* $J(f) = \mathfrak{M}_n$. *Consecuentemente* $T(f) = \mathfrak{M}_n$, $\mathcal{J}(f) = \mathcal{T}(f)$ *y* $\mu(f) = \tau(f) = 1$.

2. Números de Milnor y de Tjurina y singularidades casihomogéneos

Decimos que un polinomio $f \in K[[\underline{x}]]$ es *casi-homogéneo* de grado $d > 0$ con respecto a los pesos $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}_{>0}$ si es de la forma

$$f = \sum_{w_1\alpha_1 + \cdots + w_n\alpha_n = d} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Lema 2.1 *Sea* $f \in K[[\underline{x}]]$ *una singularidad casi-homogénea de grado* $d > 1$ *Si* d *no es múltiplo de* p *entonces* $\tau(f) = \mu(f)$.

Demostración. Usando la ecuación de Euler $d.f = w_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + w_n x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ y suponiendo que $d \not\equiv 0 \pmod{p}$ tenemos que $f \in J(f)$. Por tanto $J(f) = T(f)$ y $\mu(f) = \tau(f)$.

El siguiente lema fue demostrado en [1, Lemma 2.1.33, página 30]:

Lema 2.2 *Si* $f \in K[[\underline{x}]]$ *una singularidad casi-homogénea de grado* $d \equiv 0 \pmod{p}$ *entonces* $\mu(f) = +\infty$.

Lema 2.3 *(Fórmula de Milnor-Orlik) Si* $f \in K[[\underline{x}]]$ *es una singularidad casi-homogénea de grado* $d > 1$ *con respecto a los pesos* $w_1, \dots, w_n$ *y* $\mu(f) \neq +\infty$ *entonces*

$$\mu(f) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{w_i} - 1\right).$$

Demostración. La prueba, para el caso de característica arbitraria, fue dada en [2, Proposition 2, página 77]. Para $n = 2$, se puede consultar una prueba más sencilla en [3, Lemma A2].

Ejemplos 2.4 *Mostraremos a continuación algunos ejemplos.*

1. *El polinomio $f = x^p + y^{p+1} \in K[x, y]$ es casi-homogéneo de grado $d = p(p + 1) \equiv 0$ (mod p), considerando el peso de x igual a $p+1$ y el peso de y igual a p. Tenemos $\mu(f) = +\infty$ y $\tau(f) = p^2$. Dado que el número de Tjurina de f es finito, tenemos que f es una singularidad aislada.*

2. *El polinomio $f = x^2 + y^k \in K[x, y]$, con $k > 2$, es casi-homogéneo de grado $d = 2k$ considerando el peso de x igual a k y el peso de y igual a 2. Supongamos que $p > 2$. Si $k \not\equiv 0$ (mod p) entonces $d \equiv 0$ (mod p) y $\mu(f) = \tau(f) = k - 1$. Sin embargo si $k \equiv 0$ (mod p) entonces $d \not\equiv 0$ (mod p), $\mu(f) = +\infty$ y $\tau(f) = k$.*

3. *Consideremos los polinomios $f = x^4 + y^5, g = x^4 + y^5 + x^2y^3 \in K[x, y]$. Supongamos que $p \neq 2, 5$. Entonces $\mu(f) = \mu(g) = \tau(f) = 12 > 11 = \tau(g)$.*

3. Los números de Milnor y Tjurina en característica cero

Las propiedades de las singularidades de hipersuperficies sobre el cuerpo de los números complejos se extienden al caso de característica cero.

Las siguientes dos proposiciones son bien conocidas en el caso $K = \mathbb{C}$ (ver [5]). En [1, Section 5.3] y [2, Introduction, Theorems 1 and 2] se usa el Principio de Lefschetz para demostrarlas en el caso general.

Proposición 3.1 *Supongamos que la característica de K es cero. Si $f \in K[[x, y]]$ entonces $\tau(f) < +\infty$ si y solo si $\mu(f) < +\infty$.*

Proposición 3.2 *Supongamos que la característica de K es cero. Si $f \in K[[x, y]]$ y u es una unidad del anillo de series formales $K[[x, y]$ entonces $\mu(uf) = \mu(f)$.*

La Proposición 3.1 no es cierta en característica positiva como ilustra el primer ejemplo de Ejemplos 2.4. Por otra parte si $f = x^p + y^{p+1} \in K[[x, y]]$ y consideramos $g = (1 + x)f$ entonces $\mu(f) = +\infty$ pero $\mu(g) = p^2$.

Proposición 3.3 *(Fórmula de Milnor) Supongamos que la característica de K es cero. Si $f \in K[[x, y]]$ es reducida, es decir, sin factores múltiples, entonces*

$$\mu(f) = 2\delta(f) - r(f) + 1,$$

donde $\delta(f)$ es el número de puntos dobles de la singularidad f y $r(f)$ es el número de ramas (factores irreducibles) de f.

Demostración. Consultar por ejemplo [8, Proposition 8.3, página 85].

En el caso de característica arbitraria diremos que la singularidad $f \in K[[x,y]]$ es *doméstica* (en inglés decimos *tame*) si satisface la fórmula de Milnor. Si f es doméstica entonces $\mu(uf) = \mu(f)$ para toda unidad $u \in K[[x,y]]$. En particular toda singularidad casi-homogénea es doméstica (ver [3, Corollary 2.6, página 125].

4. Equivalencia de singularidades

Sean $f, g \in \underline{\mathfrak{M}}_n$. Decimos que f y g son *equivalentes a la derecha*, y lo denotaremos $f \equiv_r g$, si existe un automorfismo ϕ de $K[[\underline{x}]]$ tal que $g = \phi(f)$. Observamos que si $f \equiv_r g$ entonces $\mu(f) = \mu(g)$.

Teorema 4.1 *(Samuel) Sea $f \in \underline{\mathfrak{M}}_n^2$. Supongamos que existe $k > 0$ tal que $\underline{\mathfrak{M}}_n^k \subset J(f)$. Si $g - f \in \underline{\mathfrak{M}}_n^{2k+1}$ entonces $g \equiv_r f$.*

Demostración. Se puede consultar la prueba original en [9, Lemme 2, página 2]. También se puede consultar una prueba en [10], donde se proporciona una prueba basada en el Teorema de la función implícita.

Usando el Lema de Nakayama podemos demostrar que si $\mu(f)$ es finito entonces $\underline{\mathfrak{M}}_n^{\mu(f)} \subset J(f)$ (ver [8, Lemma 1.10, página 100]) . Por tanto, tenemos

Corolario 4.2 *Supongamos que $\mu(f) < +\infty$. Si $g - f \in \underline{\mathfrak{M}}_n^{2\mu(f)+1}$ entonces $f \equiv_r g$.*

Ejemplo 4.3 *Si $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right) \neq 0$ entonces $f \equiv_r \mathrm{in} f$. De hecho, por el Lema 1.1 tenemos $\mu(f) = 1$ y usando el Teorema de Samuel, si $g - f \in \underline{\mathfrak{M}}_n^3$ entonces $f \equiv_r g$.*

Decimos que f y g son *equivalentes por contacto*, y lo denotamos $f \equiv_c g$, si existen un automorfismo ϕ de $K[[\underline{x}]]$ y una unidad $u \in K[[x,y]]$ tal que $g = u\phi(f)$. Si $f \equiv_c g$ entonces $\tau(f) = \tau(g)$.

Teorema 4.4 *(Greuel-Kröning [4]) Sea $f \in \underline{\mathfrak{M}}_n^2$. Supongamos que $\underline{\mathfrak{M}}_n^k \subset T(f)$ para cierto $k > 0$. Entonces $g - f \in \underline{\mathfrak{M}}_n^{2k+1}$ implica que $g \equiv_c f$.*

Demostración. El lector puede consultar una prueba simplificada en [2].

Corolario 4.5 *Supongamos que $\tau(f) < +\infty$. Si $g - f \in \underline{\mathfrak{M}}_n^{2\tau(f)+1}$ entonces $g \equiv_c f$.*

A continuación, y como aplicación, daremos la clasificación de singularidades planas simples. Sea $f \in K[[x,y]]$ una serie reducida. Entonces $\tau(f)$ es finito (ver [8, Lemma 1.2, página 100]) y por el Teorema de Greuel-Kröning, la serie f es equivalente por contacto a un polinomio de grado menor o igual a $2\tau(f)$, que podemos identificar con un punto del espacio afín K^N donde $N = 2\tau(f)$. Decimos que la singularidad f es *simple* si existe un entorno abierto de Zariski U de f tal que en U hay un número finito de clases de equivalencia.

Teorema 4.6 *(Greuel-Kröning) Supongamos que $p \geq 7$. Las singularidades simples son equivalentes a una de las siguientes formas:*

1. $A_k : x^2 + y^{k+1},\ k \geq 1.$
2. $D_k : x^2y + y^{k-1},\ k \geq 4.$
3. $E_6 : x^3 + y^4.$
4. $E_7 : x^3 + xy^3.$
5. $E_8 : x^3 + y^5.$

Demostración. En [4] los autores también demostraron las clasificaciones de singularidades de curvas planas para características $p = 2, 3, 5$. El lector encontrará una prueba simplificada en [8, pp. 106-111].

Observación 4.7 *En [7] el autor demostró, para singularidades aisladas complejas $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ la cota $\mu(f) \leq n\tau(f)$. Creemos que este resultado también es cierto en característica cero.*

5. Conclusión

El estudio de singularidades de hipersuperficies en característica positiva comenzó en 1990 con el trabajo [4] de Greuel-Kröning. Este estudio fue posteriormente continuado por Boubakri, Greuel, Markwig en [2] y Greuel y Hong Duc Nguyen en [6]. El número de Milnor y el número de Tjurina juegan un papel importante en los artículos citados. En característica positiva, cuando el número de Milnor no es finito, el número de Tjurina es necesario para estudiar la equivalencia de contacto de singularidades.

Agradecimiento. El autor agradece a la Profesora Evelia R. García Barroso por la traducción en español de esta nota y por los comentarios provechosos sobre el contenido matemático del texto. También agradece al anónimo revisor por corregir los ejemplos dados en esta nota.

Referencias bibliográficas

[1] Boubakri, Y. (2009) *Hypersurfaces singularities in positive characteristic.* PhD thesis, Kaiserslauten University.

[2] Boubakri, Y.; Greuel G-M; Markwig, T. (2010). *Invariants of hypersurface singularities in positive characteristic.* Rev. Mat. Complut. **25**, 61-85.

[3] García Barroso, E.; Płoski, A. (2018). *On the Milnor formula in arbitrary characteristic.* In Singularities, Algebraic Geometry, Commutative Algebra and Related Topics. Festschrift for Antonio Campillo on the Occasion of his 65th Birthday. G.M. Greuel, L. Narvaéz and S. Xambó-Descamps eds. Springer, (2018), 119-133. doi: 10.1007/978-3-319-96827-8_5.

[4] Greuel, G.M.; Kröning, H. (1990). *Simple singularities in positive characteristic.* Math. Z. 203, 339-354.

[5] Greuel, G.M.; Lossen, C.; Shustin, E. (2007). *Introduction to Singularities and Deformations.* Springer-Berlin.

[6] Greuel, G.M., Nguyen, H.D. (2016) *Right simple singularities in positive characteristic.* J. reine angew. Math. 712, 81-106.

[7] Liu, Y. (2018). *Milnor and Tjurina numbers for a hypersurfaces with isolated singularity.* CRAS, Ser. I, 963-966.

[8] Pfister, G., Płoski, A. (2022) . *Plane algebroid curves in arbitrary characteristic.* IMPAN Lecture Notes 4.

[9] Samuel, P. (1956). *Algébricité de certains points singulier algébroides.* Journ. de Math., tome 35, Fasc. 1, 1-6.

[10] Tougeron, J.C. (1972). *Ideaux des fonctions différentiables.* Springer, 56-57.