

Acerca de la relación entre la mecánica cuántica y las finanzas

*Luis Enrique Quispe Gallegos*¹ y *César Romani Meza*²

Resumen: El presente trabajo tiene por objetivo mostrar una forma alterna de derivar la ecuación de Black-Scholes usando la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica, teniendo en cuenta que ambas ecuaciones diferenciales parciales son bastante similares.

Palabras claves: Ecuación de Schrödinger, ecuación de Black-Scholes, opciones financieras, ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones diferenciales estocásticas.

About the Relationship Between Quantum Mechanics and Finances

Abstract: The present article has as a goal to show an alternative way for deriving the Black-Scholes equation using the Schrödinger equation of quantum mechanics, taking into account that both of these partial differential equations are quite similar.

Keywords: Schrödinger equation, Black-Scholes equation, financial options, partial differential equations, stochastic differential equations.

Recibido: 15/05/2023. *Aceptado:* 17/12/2023. *Publicado online:* 30/12/2023.

© Los autores. Este artículo es publicado por la Revista PESQUIMAT de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Este es un artículo de acceso abierto, distribuido bajo los términos de la licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>) que permite el uso no comercial, distribución y reproducción en cualquier medio, siempre que la obra original sea debidamente citada. Para uso comercial, por favor póngase en contacto con revistapesquimat.matematica@unmsm.edu.pe

¹UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: luis.quispeg@unmsm.edu.pe

²UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: cesar.romani@unmsm.edu.pe

1. Introducción

La ecuación de Schrödinger es una ecuación fundamental de la mecánica cuántica y la ecuación de Black-Scholes es una ecuación fundamental de la economía cuantitativa.

Si tenemos una partícula cuántica, su posición es una variable aleatoria al igual que el precio de una opción financiera.

La solución de la ecuación de Schrödinger es una función compleja que describe el estado de una partícula, $|\psi(t)\rangle$, mientras que la solución de la ecuación de Black-Scholes es una función real que describe el precio de una opción financiera, $|C\rangle$. La ecuación de Black-Scholes se puede considerar como una ecuación de Schrödinger, donde la variable temporal es imaginaria.

La función de estado de una partícula, $|\psi(t)\rangle$, que resulta de la ecuación de Schrödinger, es análoga al precio de una opción, $|C\rangle$, que resulta de la ecuación de Black-Scholes, pero mientras la primera requiere una interpretación probabilística, la segunda no la requiere, y es directamente observable. Además, mientras que debe cumplirse que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, en cambio $\langle C|C\rangle$ puede asumir cualquier valor.

Por otro lado, los hamiltonianos de la ecuación de Schrödinger son operadores hermíticos cuyos valores propios son reales, mientras que los hamiltonianos de la ecuación de Black-Scholes no son necesariamente hermíticos y sus valores propios son complejos, lo cual hace más complicado su estudio en comparación con la ecuación de Schrödinger. Por ejemplo, según [2], no hay un procedimiento definido, que se aplique a todos los hamiltonianos para elegir las funciones que proporcionen la ecuación de completitud. Hay casos especiales donde una transformación de similitud transforma el hamiltoniano en un operador hermítico, y en esos casos resulta de manera natural un conjunto completo de funciones propias.

2. Marco teórico

2.1. Ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger fue propuesto de manera inductiva por Schrödinger [14] en 1926, un poco después de la mecánica de matrices de Heisenberg [12] en 1925 y se ha desarrollado primeramente con el objetivo de describir objetos pequeños (átomos) constituidos de una sola partícula situados bajo la acción de un campo de fuerzas (por ejemplo, el electrón al interior del átomo de hidrógeno). El objeto central de la teoría de Schrödinger, denominada también mecánica ondulatoria, es una función $\Psi(\vec{r}, t)$ de valores *complejos*, llamada función de onda. Esta función satisface:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (1)$$

donde \vec{r} es el vector posición de la partícula en el espacio; $V(\vec{r})$ es la energía potencial de la partícula, $\vec{\nabla}$ es el vector gradiente cuyas componentes son $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$; i es el número imaginario puro, m es la masa de la partícula. Así aparece que la mecánica cuántica se formula solamente si las fuerzas derivan de un potencial; entonces admitir que esta teoría se aplica a toda la física, a escala atómica o subatómica, es admitir que todas las interacciones “fundamentales” derivan de un potencial, en el sentido usual o en un sentido generalizado¹.

La ecuación (1) no es demostrable en un sentido estricto, pues ha sido construida sobre la base de argumentos heurísticos, en gran medida inspirados por la analogía, notada desde 1928 por Hamilton, entre la óptica y la mecánica. La validez de esta ecuación se mide por la confrontación entre los resultados teóricos que ella genera y las observaciones experimentales. Sus éxitos son inmensos. Hasta la fecha, ningún experimento permite poner en duda la teoría, cuya ecuación (1) es su piedra angular (véase [13]).

¹Para una partícula cargada en un campo electromagnético, el potencial no depende solamente de la posición, sino que es también función de la velocidad

El método de Heisenberg, llamado mecánica de matrices, procede de una manera completamente distinta, basado en el análisis armónico del movimiento clásico revisado a la luz de las condiciones de cuantificación de Bohr-Sommerfeld-Wilson, postuladas por la antigua teoría de los cuanta. La ecuación fundamental se basa en las matrices (que representan operadores en un espacio vectorial con una base previamente elegida), más precisamente en las matrices que representan las dos magnitudes fundamentales de la mecánica analítica de Lagrange y Hamilton: la coordenada, q_j , y el momento conjugado, p_j , relacionados entre sí por:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (2)$$

L es el lagrangiano; q_j designa una de las coordenadas (posición, ángulo, ...) el cual permite definir sin ambigüedad la posición del sistema en el espacio. Para coordenadas *cartesianas*, la ecuación fundamental de Heisenberg es²:

$$[q_j, p_k] := q_j p_k - p_k q_j = i\hbar \delta_{jk}, \quad (3)$$

En (3) q_j y p_k son *operadores* que representan las variables dinámicas fundamentales que son las coordenadas y los momentos conjugados. Por ejemplo, para las tres coordenadas cartesianas (x, y, z) , se tiene:

$$[u, p_v] = i\hbar \delta_{uv}, \quad (u, v = x, y, z) \quad (4)$$

La relación (3), obtenida precisamente por Born y Jordan, introduce fundamentalmente objetos que forman un álgebra *no conmutativa*. Estos objetos son los operadores asociados a las magnitudes físicas, tradicionalmente llamadas observables. No es exagerado decir que toda la estructura formal de la mecánica cuántica está construida sobre la relación (3) y está contenida en ella, entendiéndose que queda por construir su contenido físico. Igual que en el caso de la ecuación de Schrödinger, la relación (3) no es demostrable en un sentido estricto.

La equivalencia de las descripciones de Heisenberg y de Schrödinger reposa sobre una observación fundamental de esta última, definiendo además un modo automático de construcción de (1). Se comienza por formar el hamiltoniano clásico, $H_{cl}(\vec{r}, \vec{p})$, según las prescripciones de la mecánica analítica. Después, se reemplaza en la función H_{cl} el vector \vec{r} por el operador multiplicación por \vec{r} , y el vector \vec{p} por $-i\hbar \nabla$:

$$\vec{r} \rightarrow \times \vec{r}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad (5)$$

La substitución de \vec{p} es válida solamente para coordenadas cartesianas. Hecho esto, se obtiene un operador diferencial H , que es el hamiltoniano de la mecánica cuántica, que actúa sobre la función de onda, constituyendo el segundo miembro de la ecuación de Schrödinger, a la cual le podemos dar la forma más compacta:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = H(\vec{r}, -i\hbar \nabla) \Psi(\vec{r}, t) \quad (6)$$

Normalmente, este método de construcción funciona bien para todos los grados de libertad que tienen un equivalente clásico. Sin embargo, veremos que existen grados de libertad específicamente cuánticos, como el espín. En tal caso (en la teoría no relativista, cuando se trata del espín³), conviene de agregar “manualmente” los términos de interacción correspondientes, en base a argumentos por analogía. Por ejemplo, a un espín \vec{S} (que estructuralmente es un momento angular en el sentido usual de la mecánica cuántica) está asociado un momento magnético $\vec{\mu}$, por una simple relación de proporcionalidad, como un momento angular ordinario (orbital) produce un

² δ_{jk} es el símbolo de Kronecker, que vale 1 si $j = k$ y vale 0 en caso contrario.

³La teoría del electrón de Dirac introduce el espín de manera natural

momento magnético a través del factor giromagnético clásico γ ; así, en el caso del electrón, se debe poner

$$\vec{\mu} = g_S \frac{e}{2m} \vec{S} \quad (7)$$

donde e es la carga del electrón ($e = -1,6 \times 10^{-19}$ C) y donde g_S es un factor puramente numérico muy cercano a 2 ($g_S = 2,0023\dots$). Por lo tanto, en presencia de un campo magnético \vec{B} , el hamiltoniano construido, según la prescripción de Schrödinger, debe completarse con el término que representa el acoplamiento entre el momento magnético ligado al espín y el campo exterior, es decir $-\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -g_S (e/2m) \vec{S} \cdot \vec{B}$.

Para establecer en detalle la equivalencia entre los dos enfoques de Heisenberg y de Schrödinger, basta observar que los dos operadores \vec{r} y $-i\hbar\nabla$ satisfacen la relación (4). En efecto, para el par (x, p_x) escrito en el estilo de Schrödinger, se tiene, cualquiera sea la función diferenciable f :

$$(xp_x - p_x x)f = -i\hbar \left[x \frac{\partial}{\partial x} f - \frac{\partial}{\partial x} (xf) \right] = -i\hbar \left(x \frac{\partial f}{\partial x} - f - x \frac{\partial f}{\partial x} \right) = i\hbar f, \quad \forall f(\vec{r}), \quad (8)$$

lo que muestra que:

$$[x, p_x] := -i\hbar \left[x, \frac{\partial}{\partial x} \right] = i\hbar \mathbb{1}, \quad (9)$$

donde $\mathbb{1}$ designa el operador identidad.

La asociación $\vec{r} \rightarrow \times \vec{r}$, $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$ es solo una de las maneras de escribir la mecánica cuántica (se dice que es la representación- q). El papel privilegiado que juega la coordenada \vec{r} no parece ser equitativo, cuando se recuerda que en mecánica analítica, la coordenada y el impulso ordinarios son tratados en estricta igualdad. De hecho, existen otras posibilidades de expresar la relación fundamental (3); una de ellas, muy útil para ciertas aplicaciones, es la llamada representación- p , donde la función de onda es una función (siempre de valores complejos) de un argumento vectorial, que representa precisamente el impulso, es decir $\Phi(\vec{p}, t)$. Esta representación se define por la siguiente asociación:

$$\vec{r} \rightarrow i\hbar\nabla_{\vec{p}}, \quad \vec{p} \rightarrow \times \vec{p}, \quad (10)$$

donde el vector gradiente es:

$$\nabla_{\vec{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial p_x}, \frac{\partial}{\partial p_y}, \frac{\partial}{\partial p_z} \right). \quad (11)$$

Es claro que se tiene todavía:

$$\forall g(\vec{p}) : [u, p_u]g = +i\hbar g \quad \iff \quad [u, p_v] = +i\hbar \delta_{uv}, \quad (12)$$

una ecuación que muestra que las relaciones fundamentales (3) y (4) se preservan. El significado físico de $\Phi(\vec{p}, t)$ debe ser precisado, así como también el de $\Psi(\vec{r}, t)$. $\Psi(\vec{r}, t)$ y $\Phi(\vec{p}, t)$ son llamadas funciones de onda y constituyen dos *representaciones* equivalentes del mismo estado cuántico y además se deducen el uno del otro por una transformación de Fourier; más precisamente se tiene:

$$\Phi(\vec{p}, t) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r e^{\frac{1}{i\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} \Psi(\vec{r}, t) \quad (13)$$

así como la relación inversa:

$$\Psi(\vec{r}, t) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p e^{-\frac{1}{i\hbar}\vec{r}\cdot\vec{p}} \Phi(\vec{p}, t) \quad (14)$$

Conocer una función y conocer su transformada de Fourier constituyen dos informaciones estrictamente equivalentes. Como el término cinético introduce el término $\vec{p}^2/(2m)$, incluso en presencia de un campo magnético, el operador diferencial en representación- q contiene siempre el laplaciano; en cambio, en representación- p , el operador diferencial $V(i\hbar\nabla_{\vec{p}})$ no se reduce al laplaciano y refleja la forma precisa de V .

Se designa habitualmente por mecánica cuántica la teoría que unifica los enfoques de Heisenberg-Born-Jordan y de Schrödinger; las designaciones mecánica de matrices y mecánica ondulatoria son algo obsoletas en la actualidad (véase [9]).

Fundamentalmente, la ecuación de Schrödinger es una ecuación en derivadas parciales *lineal*; lo que quiere decir que si se conocen dos soluciones linealmente independientes ψ_1 y ψ_2 , entonces toda combinación lineal de ellas es una solución también. Esto permite construir la solución general formando combinaciones lineales de soluciones particulares; las más notables y más útiles para una ecuación en derivadas parciales *lineal* son aquellas donde el espacio y el tiempo están separados. Teniendo en cuenta la forma de (1), y para un hamiltoniano independiente del tiempo (sistema aislado), se ve inmediatamente que existe una clase de soluciones particulares de la forma:

$$\Psi_{\text{est.}}(\vec{r}, t) = e^{\frac{1}{i\hbar}Et} \psi(\vec{r}) \quad (15)$$

Se verifica inmediatamente que $\Psi_{\text{est.}}$ es una solución de (1) siempre que la función espacial ψ satisfaga la ecuación más simple:

$$H(\vec{r}, -i\hbar\nabla)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (16)$$

En la fórmula anterior E es una cantidad, de dimensión física de energía, que sabemos que debe interpretarse precisamente como la energía de la partícula descrita por el estado estacionario ψ (o $\Psi_{\text{est.}}$). La ecuación (16) se llama ecuación de valores y funciones propios; es decir indica que la acción del operador hamiltoniano sobre ψ produce la *misma* función ψ , simplemente multiplicada por el escalar E . El par (E, ψ) forma un par propio, o modo propio. A veces es útil de realizar un seguimiento del valor propio E en el símbolo que representa la función propia al que está asociado; si es necesario, escribimos más precisamente:

$$H\psi_E = E\psi_E \quad (17)$$

Los estados $\Psi_{\text{est.}}(\vec{r}, t)$ construidos según (15) (los ψ_E están simplemente multiplicados por la fase $e^{\frac{1}{i\hbar}Et}$) son notables en más de una forma; en particular, el promedio cuántico de cualquier observable calculado en tal estado es siempre independiente del tiempo; por esta razón, estos estados son llamados estados estacionarios. Veremos cómo el conocimiento de todos los modos propios de (16) para un sistema dado, permite construir la solución más general de la ecuación de Schrödinger (1) mediante la construcción de una buena (y única) combinación lineal, que, cuando hacemos $t = t_0$ reproduce la condición inicial que se supone dada, $\Psi(\vec{r}, t_0)$

Antes de llegar al formalismo y luego de recordar los postulados de la mecánica cuántica, es importante recordar ahora uno de los primeros y principales sucesos de la nueva teoría, a saber la cuantificación de la energía de los estados ligados de un sistema. La función de onda de Schrödinger está sujeta a condiciones muy particulares, ligadas al significado físico propuesto por Born y Jordan en 1927. Estos últimos postulan que, para un estado ligado, la probabilidad dP de encontrar la partícula en la vecindad de un punto identificado por el vector \vec{r} está relacionada con el módulo al cuadrado de la función de onda calculada en ese punto. Más precisamente, Born y Jordan postulan, en \mathbb{R}^3 :

$$dP(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r, \quad (18)$$

donde d^3r es el volumen infinitesimal alrededor del extremo final de \vec{r} ; resulta que $\Psi(\vec{r}, t)$ tiene por dimensión física [longitud] $^{-3/2}$. Para que la interpretación de Born y Jordan sea compatible con la ecuación de Schrödinger, debe existir una ecuación de conservación que describa el flujo, sin pérdida de “fluido”, de probabilidad. Una ecuación semejante está de hecho contenida en la ecuación (1). En efecto, poniendo:

$$\rho(\vec{r}, t) = \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} [\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*], \quad (19)$$

Se verifica inmediatamente, a partir de (1), que la densidad ρ y la corriente \vec{j} satisfacen la ecuación de conservación requerida:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (20)$$

La relación (18) debe considerarse como un postulado, que otorga a la teoría un carácter esencialmente *probabilístico*. *A priori*, resulta que la integral del módulo al cuadrado debe ser una cantidad finita:

$$\int_{\mathbb{R}^3} dP(\vec{r}, t) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r < \infty. \quad (21)$$

En otros términos, la función de onda debe ser una función de cuadrado integrable y se dice que es *normalizable*; como de costumbre, la probabilidad de un evento verdadero se establece como igual a 1 por convención, lo que se consigue cuando se multiplica Ψ por un coeficiente conveniente (constante de normalización), tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = 1. \quad (22)$$

En algunas aplicaciones, puede parecer que no sea la condición de normalizabilidad (22) la que juegue un papel clave en la aparición espontánea de cuantificación de estados ligados. Por ejemplo, en presencia de un salto finito de potencial en una dimensión, se debe tener que la función de onda y su derivada sean continuas y son esas condiciones las que producen la cuantificación cuando se investigan los estados ligados. En realidad, debe verse que todo se cumpla: la ecuación de Schrödinger contiene también, como ya lo hemos visto, una ecuación de conservación de la densidad de probabilidad y de la corriente a ella asociada, (20), que es la expresión local de conservación, mientras que (22) es la expresión integral. Por otro lado, es la naturaleza misma de (1) la que implica la continuidad de la función de onda y de su derivada, incluso cuando V tiene un salto finito. De cualquier manera, esas son las condiciones requeridas para la función de onda y la ecuación que la satisface, las que producen, cuando sea necesario, la cuantificación espontánea de energía y de otras magnitudes físicas (como el momento angular orbital, por ejemplo).

Entonces, la solución buscada $\Psi(\vec{r}, t)$, cuyo estado inicial es $\Psi(\vec{r}, t_0)$, se escribe como combinación lineal de las funciones propias ψ_E . La condición de normalización se traslada obviamente a estas últimas funciones⁴, que eran hasta ahora solamente soluciones de la ecuación de valores propios. Resulta, que la condición de normalización permite seleccionar, en base a consideraciones puramente físicas (el sentido de la función de onda), en el conjunto (en general infinito no enumerable) de todas las soluciones de la ecuación de valores propios. En otros términos, la necesidad de normalización impone de pasar por un fino tamiz todas las soluciones matemáticas del problema para solamente retener un subconjunto discreto (usualmente infinito, pero enumerable). Esta propiedad permite de indexar las posibles energías por un (o más) número(s) entero(s) n (“número(s) cuántico(s)”) y de designar el conjunto físicamente aceptable por E_n ; lógicamente, se podría ahora designar las funciones propias correspondientes por ψ_{E_n} , y para abreviar los notaremos simplemente por ψ_n .

Así, la ecuación de Schrödinger, ampliada de condiciones requeridas para sus soluciones, que son condiciones dictadas por consideraciones físicas, produce lo que hasta entonces había resistido a todas las descripciones teóricas coherentes: la cuantificación espontánea de la energía de los estados ligados. Esto es sin duda el éxito inicial más espectacular de la nueva teoría.

Como la teoría es fundamentalmente probabilística, entonces todas las previsiones que se podrían obtener de ella se relacionan con valores *promedios*, en el sentido usual de la esperanza matemática.

⁴Para que una función Ψ , desarrollada en los ψ_E , sea normalizable, es evidentemente *necesario* que cada ψ_E lo sea. Además uno se puede plantear la cuestión de la completitud de los ψ_E , permitiendo de representar en serie *independientemente de cuál sea el estado inicial*. La completitud está asegurada por la hermiticidad del hamiltoniano.

Por ejemplo, el valor promedio de la posición, \vec{r} , en representación- q está dado por la integral:

$$\langle \vec{r} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{r} dP = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{r} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3 r \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^*(\vec{r}, t) \vec{r} \Psi(\vec{r}, t) d^3 r, \quad (23)$$

entendido que la función de onda está previamente normalizada a la unidad. De la misma manera, el valor promedio del momento conjugado es:

$$\langle \vec{p} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^*(\vec{r}, t) (-i\hbar \nabla) \Psi(\vec{r}, t) d^3 r. \quad (24)$$

Más generalmente, el valor promedio de una función $A(\vec{r}, \vec{p})$ está dado por:

$$\langle A \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^*(\vec{r}, t) A(\vec{r}, -i\hbar \nabla) \Psi(\vec{r}, t) d^3 r. \quad (25)$$

La función $A(\vec{r}, -i\hbar \nabla)$ se forma a partir de su expresión clásica, mediante la simetrización, en caso necesario, de los productos del tipo up_u , que contienen dos operadores no conmutativos. Como es habitual, el operador diferencial bajo la integral de (25) actúa sobre lo que está a su derecha. Así, para una partícula de masa m situada en un campo de fuerzas que definen una energía potencial $V(\vec{r})$, el valor promedio de la energía es:

$$\langle H \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^*(\vec{r}, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) d^3 r. \quad (26)$$

2.2. Ecuación de Black-Scholes

La ecuación diferencial de Black-Scholes contribuyó significativamente a la rápida expansión del mercado de derivados en los años 70, porque permitió a los comerciantes establecer precios justos para una gran cantidad de opciones y otros productos financieros. Por lo tanto, la confianza en estos productos se incrementó e impulsó su atractivo. Más adelante, también se le culpó a la ecuación de Black-Scholes de haber causado la caída del mercado (ver [15]), porque los comerciantes se confiaron en la existencia de carteras libres de riesgo, que es la piedra angular de la teoría. Pero los comerciantes pasaron por alto de que algunos de los presupuestos de la teoría no siempre eran válidos. Por ejemplo, la liquidez ilimitada y la disponibilidad de fondos a una tasa libre de riesgo no siempre son válidas. Además, la dinámica estocástica subyacente de la teoría no es necesariamente gaussiana en tiempos de dificultades financieras.

2.2.1. Derivación de la ecuación de Black-Scholes

Consideremos la variación temporal de los precios de las opciones y asumamos que la opción $C(S, t)$ depende del valor de la acción S y del tiempo t . Es decir, C es un derivado del activo subyacente S , el cual es una variable estocástica y que obedece a la ecuación de Langevin (ver [7]). Entonces C es también una variable estocástica y requerimos derivar una ecuación diferencial estocástica para analizar cómo evoluciona en el tiempo. Escribamos la expansión de Taylor de c hasta el primer orden en dt ,

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dS^2$$

donde, mantenemos los términos hasta el segundo orden de la variable estocástica S . Usando la ecuación $dS = \rho S dt + \sigma S dW(t)$ de la ecuación de Langevin para dS y manteniendo los términos hasta el primer orden en dt tenemos:

$$\begin{aligned} dC &= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} [pS dt + \sigma S dW] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \\ &= \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \rho S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right] dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dW \end{aligned}$$

el cual describe una ecuación diferencial estocástica de C , que depende de otra variable estocástica, S . Nótese que también usamos $dW^2 = dt$ (ver [10]). Además, ρ es la tasa de crecimiento esperada, pero desconocida, de la acción S y σ es su volatilidad.

Ahora consideramos un portafolio Π , el cual consiste de una opción C y un número de acciones S . Trataremos de construirlo de tal manera que el portafolio sea libre de riesgo en el sentido de que el término con el término del proceso de Wiener dW desaparezca. Esto se logra adquiriendo una fracción $\Delta = \partial C / \partial S$ de las acciones y vendiendo una opción c . Entonces el portafolio Π está dado por:

$$\Pi = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S$$

Su valor cambiará en el tiempo de acuerdo a:

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dC + \frac{\partial C}{\partial S} dS \\ &= - \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \rho S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right] dt - \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dW + \frac{\partial C}{\partial S} [\rho S dt + \sigma S dW] \\ &= - \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] dt \end{aligned} \quad (27)$$

Y aquí ocurre algo mágico: tanto la parte estocástica, que es proporcional a dW , como la tasa desconocida ρ se cancelan y no aparecen en la línea final de la ecuación anterior, lo que hace que la ecuación ya no sea más estocástica, sino una ecuación ordinaria en derivadas parciales. Es decir, en un ambiente neutral al riesgo, el valor del portafolio crecerá a la tasa libre de riesgo r y tendremos:

$$d\Pi = r\Pi dt = r \left[-C + \frac{\partial C}{\partial S} S \right] dt \quad (28)$$

Igualando las dos expresiones para $d\Pi$ de las ecuaciones (27) y (28). Dividiendo por dt obtenemos la ecuación diferencial que está ligada a los nombres de sus contribuidores principales: F. Black, M. Scholes y R. Merton

$$-\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC$$

Esta ecuación vincula la evolución temporal de la opción C con el activo subyacente S . Es de notar que la evolución temporal de la opción c está determinada solamente por la volatilidad σ y por la tasa libre de riesgo r y no por la tasa de crecimiento ρ de la acción S .

3. Metodología

Para analizar y ver la similaridad de la ecuación de Schrödinger con la ecuación de Black-Scholes, vamos a derivar esta última usando el formalismo de la mecánica cuántica.

Si $C(t)$ el precio de una opción en el tiempo t ; σ es la volatilidad, asumida constante; r es la tasa libre de riesgo, r ; y S es el precio del activo subyacente, entonces la ecuación de Black-Scholes sería:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial C}{\partial S} - r S \frac{\partial C}{\partial S} + r C$$

Si hacemos un cambio de variable:

$$S = e^x; \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

Entonces, obtenemos la ecuación de Black-Scholes-Schrödinger:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = H_{BS} C,$$

donde el hamiltoniano de Black-Scholes está dado por ([3]):

$$H_{BS} = -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right) \frac{\partial}{\partial x} + r$$

Recordemos que la ecuación de Schrödinger está dada por:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle$$

donde

$$H = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} + V(x)$$

Si consideramos al hamiltoniano de Black-Scholes como un sistema cuántico, entonces este solo tiene un grado de libertad, x , con las siguientes correspondencias con la ecuación de Schrödinger:

Ecuación de Black-Scholes	Ecuación de Schrödinger
Precio de opción, C	Función de estado, ψ
Volatilidad, σ^2	Inverso de la masa, $\frac{1}{m}$
Término de flujo, $\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right) \frac{\partial}{\partial x} + r$	Potencial, $V(x)$

Primero, analizaremos si el hamiltoniano de Black-Scholes es hermítico o antihermítico.

Se sabe que una matriz M tiene un conjugado hermítico definido por $M_{ij}^\dagger = M_{ji}^*$. El conjugado hermítico de un operador cualquiera O está dado por ([3]):

$$\langle f|O^\dagger|g\rangle \equiv \langle g|O|f\rangle^*$$

Para analizar la ecuación de Black-Scholes y la ecuación de Schrödinger, el espacio de estados tiene que estar definido y se tiene que formular la ecuación de completitud. La ecuación de completitud se refiere a la existencia de una base vectorial tal que un vector arbitrario se puede representar como combinación lineal de los elementos de esa base ([2]).

Para introducir la ecuación de completitud, vamos a considerar un ejemplo de Belal E. Baaquie ([2]): consideremos el movimiento de un electrón en una dimensión, cuya posición la denotaremos por x , el cual puede saltar hacia los puntos de un retículo unidimensional de parámetro a , es decir las posiciones de los puntos del retículo están dados por $x = na$, $n \in \mathbb{Z}$.

Las funciones de estado de la base las denotaremos por $|n\rangle$ y las representaremos por un vector columna infinito, donde la única entrada no nula está en la n -ésima posición. Es decir, tenemos:

$$|n\rangle = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad \langle n| = [\dots 010 \dots]$$

y se cumple:

$$\langle m|n\rangle = \delta_{n-m} \equiv \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n\rangle\langle n| = \mathfrak{I}, \quad \text{ecuación de completitud}$$

donde \mathfrak{I} es la matriz identidad infinito-dimensional. La ecuación de completitud también se refiere como **resolución de la identidad**, pues solamente un conjunto completo de estados de la base vectorial pueden construir el operador identidad del espacio de estados. En el caso que el retículo sea continuo, y no discreto, entonces tenemos que aplicar el límite $a \rightarrow 0$. El vector de estado de una partícula está dado por el vector “ket”, $|x\rangle$, y su dual está dado por el vector “bra”, $\langle x|$. En términos del retículo original ($x = na$) tenemos:

$$|x\rangle = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a}} |n\rangle; \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

donde el producto escalar está dado por la función delta de Dirac:

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x') \equiv \begin{cases} \infty, & x = x' \\ 0, & x \neq x' \end{cases}$$

La ecuación de completitud estará dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n\rangle\langle n| &\rightarrow a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x\rangle\langle x| \\ \implies \int_{n=-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle\langle x| &= \mathfrak{I} \end{aligned}$$

donde \mathfrak{I} es el operador identidad en el espacio de las funciones de estado.

La ecuación de completitud presentada es una ecuación clave en el análisis del espacio de las funciones de estado. Para el caso de dos partículas cuánticas con posiciones x, y , la ecuación de completitud estará dada por:

$$\mathfrak{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy |x, y\rangle\langle x, y|$$

donde $|x, y\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$. Para el caso de tres partículas, se obtiene la siguiente ecuación de completitud:

$$\mathfrak{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy dz |x, y, z\rangle\langle x, y, z|$$

Al generalizar la ecuación a n partículas, obtenemos:

$$\mathfrak{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy dz \dots dn |x, y, z, \dots, n\rangle \langle x, y, z, \dots, n|$$

donde $|x, y, z, \dots, n\rangle \equiv |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle \otimes \dots \otimes |n\rangle$.

Los dos vectores, representados por $|\psi\rangle \in V$ y $\langle\psi| \in V_{\text{dual}}$, pueden ser mapeados el uno al otro. La ecuación de completitud resulta en este caso:

$$|\psi\rangle \langle\psi| = \langle\psi| \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x| \psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \psi(x) \geq 0$$

De acuerdo con la ecuación de completitud, debemos derivar el operador adjunto hermítico \hat{x} y su operador adjunto $\frac{\partial}{\partial x}$. La ecuación de completitud resulta en este caso:

$$\begin{aligned} \left\langle f \left| \frac{\partial^T}{\partial x} \right| g \right\rangle &\equiv \left\langle g \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| f \right\rangle^* = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \langle g|x\rangle \left\langle x \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| f \right\rangle \right]^* \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx g^*(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]^* = - \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial g^*(x)}{\partial x} f(x) \right]^* \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial g(x)}{\partial x} f^*(x) = - \left\langle f \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| g \right\rangle \\ \Rightarrow \frac{\partial^T}{\partial x} &= - \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

Entonces el operador diferencial es antihermítico. Analicemos ahora el operador de coordenada:

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{x}^T | g \rangle &\equiv \langle g | x | f \rangle^* = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \langle g|x\rangle \langle x | \hat{x} | f \rangle \right]^* \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx x g^*(x) f(x) \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} dx x g(x) f^*(x) \\ &= \langle f | \hat{x} | g \rangle \\ \Rightarrow \hat{x}^T &= \hat{x} \end{aligned}$$

Entonces el operador de coordenada es hermítico.

El operador hamiltoniano, denotado por H , evoluciona en el tiempo y por lo tanto es el operador más importante en los precios de opciones. En finanzas, el operador hamiltoniano es no hermítico, en general.

Hemos introducido el operador de coordenada y el operador diferencial. Como Belal E. Baaquie lo ha señalado ([3]) hay funciones especiales propias de estado que son de particular importancia para todos los operadores. Para el operador de coordenada se puede escribir la siguiente ecuación:

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle$$

Este vector se llama una función propia de estado del operador de coordenada \hat{x} con valor propio real x , pues \hat{x} es hermítico.

Según Belal E. Baaquie, la ecuación de valores propios para un hamiltoniano no hermítico H está dado por una generalización de la ecuación y de la siguiente ecuación. Existen estados especiales cuánticos que son llamados estados propios de energía con valores propios reales que forman un conjunto completo de estados y están dados por:

$$\begin{aligned} H_R |\psi_E\rangle &= E |\psi_E\rangle; \quad E^* = E \\ \langle \psi_E | H_R^T &= \langle \psi_E | H_R = \langle \psi_E | E \\ \int_E dE \mu(E) |\psi_E\rangle \langle \psi_E| &= \mathfrak{I} \end{aligned}$$

Usando la ecuación anterior, obtenemos las siguientes ecuaciones para los valores propios y las funciones propias:

$$\langle \tilde{\psi}_E | \psi_{E'} \rangle = \frac{1}{\mu(E)} \delta(E - E')$$

La densidad de los estados para el valor propio E está definido por:

$$\mu(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x | \delta(H - E) | x \rangle$$

La ecuación de completitud es:

$$\int_D dE \mu(E) \psi_E(x) \tilde{\psi}_E(x') = \langle x | \mathfrak{I} | x' \rangle = \delta(x - x')$$

El operador hamiltoniano es un operador $H = H(x, \partial/\partial x)$.

Por otro lado, si queremos escribir la ecuación de Schrödinger, requerimos en primer lugar especificar los grados de libertad del sistema, y además se requiere especificar el hamiltoniano H del sistema, que describa el rango de energías como también la forma de energía que esta pueda tener.

La ecuación de Schrödinger está dada por:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle$$

Además, consideraremos el movimiento de una partícula cuántica de masa m en una dimensión, bajo un potencial $V(x)$. La correspondiente ecuación de Schrödinger está dada por:

$$-\frac{\hbar}{i} \left\langle x \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \psi(t) \right\rangle = \langle x | H | \psi(t) \rangle \implies -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(t, x)$$

donde el hamiltoniano actúa sobre la base dual.

El hamiltoniano del movimiento de una partícula cuántica en una dimensión es:

$$H = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} + V(x)$$

Si comparamos el hamiltoniano de Schrödinger con el hamiltoniano de Black-Scholes, tenemos:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} + V(x), \quad \text{Hamiltoniano de Schrödinger} \\ H_{BS} &= -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 - r \right) \frac{\partial}{\partial x} + r, \quad \text{Hamiltoniano de Black-Scholes} \end{aligned}$$

donde el potencial de Schrödinger $V(x)$ se corresponde con $\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right) \frac{\partial}{\partial x} + r$ y el factor $-\frac{\hbar}{2m}$ se corresponde con $-\frac{\sigma^2}{2}$.

Después de haber mostrado la similaridad entre el hamiltoniano de Black-Scholes y el de Schrödinger, se puede probar que el precio de una opción satisface la ecuación de Schrödinger (con tiempo imaginario) (véase [4]):

$$H|C, t\rangle = \frac{\partial}{\partial t}|C, t\rangle,$$

donde el valor final ajustado por la función de liquidación es:

$$|C, T\rangle = |P\rangle; \quad T > t$$

Comparándola con la función de onda de la mecánica cuántica, el precio de una opción $C(t, x)$ es directamente observable, y además, no hay el concepto de medición cuántica en la teoría de opciones. La semejanza del precio de una opción y la mecánica cuántica es, en este punto, de naturaleza puramente matemática: Ellos pueden ser descritos por un espacio vectorial infinito-dimensional V y por operadores lineales, como H , que actúan sobre V .

Podemos asumir que el hamiltoniano tiene la siguiente forma general ([3]):

$$H = -\frac{\sigma^2(x)}{2} \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial x} + a$$

donde $\sigma^2(x)$ es una función arbitraria de x . Ese término es la volatilidad del precio de una acción e indica el grado en el que la evolución del precio de una acción es aleatoria.

El famoso hamiltoniano de Black-Scholes H_{BS} no es hermítico, lo cual es una propiedad de todos los hamiltonianos en finanzas.

Finalmente presentaremos la ecuación final de Black-Scholes-Schrödinger ([11]):

$$\frac{\partial C(t, x)}{\partial t} = -\langle x|H|C\rangle = \frac{\sigma^2(x)}{2} \frac{\partial C(t, x)}{\partial x} - \left(\frac{\sigma^2(x)}{2} - r\right) \frac{\partial C(t, x)}{\partial x} - r C(t, x)$$

En términos de la variable $S = e^x$ y el tiempo t , la ecuación de Black-Scholes-Schrödinger para los precios de opciones está dada por ([8]):

$$\frac{\partial C(t, x)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2(S)S^2 \frac{\partial^2 C(t, x)}{\partial S^2} - r S \frac{\partial C(t, x)}{\partial S} + r C(t, x)$$

Hemos probado que usando la ecuación de Schrödinger y el hamiltoniano de Black-Scholes, se puede derivar la famosa ecuación de Black-Scholes. Aparece en la forma anterior, puesto que la variable S es la variable más usada en la bibliografía sobre finanzas. Esto representa los fundamentos de la ciencia social cuántica ([8]).

4. Reflexiones finales

El artículo de Vucovic (véase [16]) también muestra un enfoque similar al mostrado aquí con respecto a la derivación de la ecuación de Black-Scholes a partir de la ecuación de Schrödinger.

Asimismo el artículo de Yeşiltaş (véase [17]) muestra la misma relación usando métodos de la mecánica cuántica supersimétrica y expresa la solución mediante polinomios de Laguerre excepcionales, con lo cual se consigue expresar las soluciones para diferentes valores de σ (volatilidad), que en nuestro caso lo asumimos constante. Además, muestra la relación de la ecuación de Black-Scholes con la ecuación del calor, expresando la solución mediante polinomios de Hermite.

En la misma línea, el artículo de Andriopoulos y Leach (véase [1]) muestra también la relación entre la ecuación de Black-Scholes, la ecuación de Schrödinger y la ecuación del calor bajo el punto de vista de ecuaciones lineales de evolución, donde se trata de encontrar una correlación entre las simetrías de Lie de las ecuaciones de evolución con las simetrías de Noether de problemas análogos de la mecánica hamiltoniana obteniendo así soluciones de las ecuaciones en cuestión, de tal modo que a cada simetría de Noether de una integral de la acción de la mecánica lagrangiana le corresponde una simetría en la correspondiente ecuación lineal de evolución.

Finalmente, después de haber presentado las principales diferencias entre la ecuación de Schrödinger, que es una ecuación fundamental de la mecánica cuántica, y la ecuación de Black-Scholes, que es una ecuación fundamental de las finanzas, se mostró que la ecuación de Black-Scholes se puede derivar de la ecuación de Schrödinger usando métodos de la mecánica cuántica. El método mostrado mostraría el camino para un lazo más estrecho entre la física cuántica y las finanzas, lo que podría ser un instrumento muy útil en el estudio de los precios de opciones en el futuro.

Referencias bibliográficas

- [1] K Andriopoulos and PGL Leach. A common theme in applied mathematics: an equation connecting applications in economics, medicine and physics. *South African journal of science*, 102(1):66–72, 2006.
- [2] Belal E Baaquie. *Quantum finance: Path integrals and Hamiltonians for options and interest rates*. Cambridge University Press, 2007.
- [3] Belal E Baaquie. *Interest rates and coupon bonds in quantum finance*. Cambridge University Press, 2009.
- [4] Belal E Baaquie. Interest rates in quantum finance: Caps, swaptions and bond options. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(2):296–314, 2010.
- [5] Louis Bachelier. Théorie de la spéculation. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 17, pages 21–86, 1900.
- [6] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [7] William Coffey and Yu P. Kalmykov. *The Langevin equation: with applications to stochastic problems in physics, chemistry and electrical engineering*, volume 27. World Scientific, 2012.
- [8] Mauricio Contreras, Rely Pellicer, Marcelo Villena, and Aaron Ruiz. A quantum model of option pricing: When black–scholes meets schrödinger and its semi-classical limit. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 389(23):5447–5459, 2010.
- [9] Aleksandr Sergeevich Davydov. *Quantum mechanics: international series in natural philosophy*, volume 1. Elsevier, 2013.
- [10] Crispin W Gardiner et al. *Handbook of stochastic methods*, volume 3. springer Berlin, 1985.
- [11] Emmanuel Haven and Andrei Khrennikov. *Quantum social science*. Cambridge University Press, 2013.
- [12] Werner Heisenberg. *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*. Springer, 1985.
- [13] Albert Messiah. *Mécanique quantique vol. 1-2*. Paris, 1959.
- [14] Erwin Schrödinger. Quantisierung als eigenwertproblem. *Annalen der physik*, 385(13):437–490, 1926.
- [15] Ian Stewart. The mathematical equation that caused the banks to crash. *The Guardian*. Accessed: 2012-02-12.
- [16] Ognjen Vukovic et al. On the interconnectedness of schrodinger and black-scholes equation. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 3(9):1108–1113, 2015.
- [17] Özlem Yeşiltaş. The black–scholes equation in finance: Quantum mechanical approaches. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, page 128909, 2023.