PESQUIMAT 27(1): 47–59 (2024)
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v27.i1.27235
ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Categorías del Análisis Funcional

Leonaldo Chávez Guevara [1] ***Alberto Mariano Rivero Zapata*** [2]

Resumen:
El objetivo de este artículo es enfocar categóricamente algunos aspectos del Análisis Funcional, pretendiendo dar a conocer una metodología de alto nivel para la investigación y la enseñanza. En la sección 1 se dan las nociones de categoría y subcategoría; se enuncian el Convenio de Identificación y el Principio de Dualidad; se presentan algunas categorías del Análisis Funcional y se enuncian propiedades importantes de sus objetos y morfismos. En la sección 2 se estudian algunos funtores entre categorías del Análisis Funcional, mostrando su importancia a través de ejemplos que conectan el álgebra y la topología. En la sección 3 se dan las importantes nociones de representación de álgebras y de adjunción de funtores, y se consideran algunos resultados valiosos.

Palabras clave: Categoria, Funtor, Algebra de Banach, Teoria de Gelfand.

Categories of Functional Analysis

Abstract: The objective of this article is to categorically focus on some aspects of Functional Analysis, aiming to present a high-level methodology for research and teaching. In section 1 the notions of category and subcategory are given; The Identification Convention and the Principle of Duality are stated; Some categories are presented and important properties of their objects and morphisms are stated. In section 2, functors and natural transformations are studied, showing their importance through examples that connect algebra and topology. In section 3 the important notions of limit of a functor and of adjunction of functors are given, and some examples are considered.

Keywords: Category, Funtor, Banach Algebra, Gelfand Theory.

Recibido: 26/01/2024. *Aceptado:* 07/05/2024. *Publicado online:* 30/06/2024.

[1]UNMSM, FCM. Ciencias Matemáticas, e-mail: leonaldo.chavez@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, FCM. Ciencias Matemáticas, e-mail: ariveroz@unmsm.edu.pe

Introducción

En este artículo estudiaremos las categorías del Análisis Funcional. El objetivo es enfocar algunos aspectos del Análisis Funcional, la Teoría Espectral de Hilbert y la Teoría de Gelfand, aplicando la teoría básica de categorías , que actualmente es reconocida como una metodología de alto nivel para la investigación y la enseñanza.

La teoría de categorías ha llegado a ocupar una posición central en las matemáticas contemporáneas y la informática teórica, y también se aplica a la física matemática. Es una teoría matemática general de estructuras y de sistemas de estructuras, un lenguaje metamatemático universal , o marco conceptual, que nos permite ver los componentes universales de una familia de estructuras de un tipo dado y cómo se interrelacionan estructuras de diferentes tipos.

David Hilbert extendió el tema de diagonalización de matrices creando la teoría espectral. El desarrollo de la teoría de Hilbert, por parte de matemáticos como Schmidt, Riesz y Von Neumann, condujo a la noción de espacios de Hilbert y al desarrollo del análisis funcional moderno. Gelfand y sus colegas desarrollaron una teoría para estudiar los operadores en los espacios de Hilbert, surgiendo así las Álgebras de Banach y C^*-álgebras, y su respectiva teoría espectral, generalizando la teoría espectral de Hilbert.

La teoría de Gelfand se basa en que podemos extender el análisis complejo a las álgebras de Banach complejas. El principal resultado sobre $\mathbb{C}$-álgebras de Banach es el teorema de representación de Gelfand-Naimark que establece que toda C^*-álgebra es isométrica a una C^*-álgebra $C(X,\mathbb{C}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \;/\; f \text{ es continua}\}$ donde X es un T_2-espacio compacto.

1. Nociones Categóricas Elementales

El objetivo de esta primera sección es introducir, motivar y exhibir la importancia de la teoría de categorías. La teoría de categorías ha llegado a ocupar una posición central en las matemáticas contemporáneas y la informática teórica, y también se aplica a la física matemática. Es una teoría matemática general de estructuras y de sistemas de estructuras. Dado que la teoría de categorías todavía está evolucionando, sus funciones se están desarrollando, expandiendo y multiplicando: en consecuencia, como mínimo, es un lenguaje metamatemático universal, o marco conceptual, que nos permite ver los componentes universales de una familia de estructuras de un tipo dado y cómo se interrelacionan estructuras de diferentes tipos.

Consideremos dos clases, $\mathcal{O}$ y $\mathscr{M}$, dos funciones, dom y cod, de $\mathscr{M}$ en $\mathcal{O}$, tales que para cualquier h en $\mathscr{M}$: $dom(h)$ y $cod(h)$ son elementos de $\mathcal{O}$, llamados dominio de h y codominio de h, respectivamente; y una clase

$$D = \{(g, f) \mid f, g \in \mathscr{M} \;\; y \;\; dom(g) = cod(f)\}$$

Definición 1.1. La terna ordenada $\mathscr{C} = (\mathcal{O}, \mathscr{M}, o)$, donde los elementos de $\mathcal{O}$ serán llamados $\mathscr{C}$-objetos, los elementos de $\mathscr{M}$ serán llamados $\mathscr{C}$-morfismos, y $o : D \longrightarrow M$, es una función que será llamada ley de composición de $\mathscr{C}$ (se denotará por gof a la imagen de (g, f) bajo la función o, y se dirá que gof está definido si y sólo si $(g, f) \in D$); es una categoría si se cumplen las siguientes condiciones:

i. **Condición de coincidencia**: Si gof está definida, entonces $dom(gof) = dom(f)$ y $cod(gof) = cod(g)$,

ii. **Condición de asociatividad**: Si gof y hog están definidos, entonces $ho(gof) = (hog)of$,

iii. **Condición de existencia de identidades**: Para cada $\mathscr{C}$-objeto A existe un $\mathscr{C}$-morfismo e tal que $dom(e) = cod(e) = A$, si goe está definido, entonces $goe = g$ y si eof está definido, entonces $eof = f$; el morfismo e será denotado por I_A.

iv. **Condición de pequeñez de la clase de morfismos**: Para todo par (A, B) de $\mathscr{C}$-objetos, la clase, $hom_{\mathscr{C}}(A, B) = \{f \mid f \in M, dom(f) = A \; y \; cod(f) = B\}$ es un conjunto, es decir, una clase pequeña.

Notación $\boxed{f : A \longrightarrow B, sif \in hom_{\mathscr{C}}(A, B); \mathcal{O} = Obj(\mathscr{C}) \; y \; \mathscr{M} = Morf(\mathscr{C}).}$

Definición 1.2. Un $\mathscr{C}$-morfismo $f : A \longrightarrow B$ es llamado un $\mathscr{C}$-isomorfismo si existe un $\mathscr{C}$-morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que gof es la identidad de A y fog es la identidad de B.

Convenio de identificación Dada una categoría $\mathscr{C}$, se identifican cualesquiera dos objetos A y B, que son $\mathscr{C}$-isomorfos, y se escribe $A = B$ como $\mathscr{C}$-objetos isomorfos.

El principio de dualidad Para toda categoría $\mathscr{C}(O, M, \circ)$, la categoria **opuesta** (o dual) de $\mathscr{C}$ es la categoría $\mathscr{C}^{op}(O, M, *)$ donde $*$ esta definido por $f * g = g \circ g$.

Sea E un enunciado sobre los objetos y morfismos de una categoría $\mathscr{C}$. El dual E^{op} de E, es el enunciado correspondiente sobre $\mathscr{C}^{op}$ formulado como enunciado sobre $\mathscr{C}$. Es decir, E^{op} es el enunciado obtenido de E al invertir la dirección de todos los morfismos. Como E se cumple en C^{op} si y sólo si E^{op} se cumple en $\mathscr{C}$, y $(\mathscr{C}^{op})^{op} = \mathscr{C}$ se tiene lo siguiente: Principio de dualidad para categorías. Si E es un enunciado que es verdadero para todas las categorías, entonces E^{op} es también verdadero para todas las categorías.

1.1. Algunas Categorias Importantes

A continuación mostramos algunas categorias importantes

1.1.1. La Categoria TOP

Los objetos son los espacios topológicos, y los morfismos son los mapeos continuos. Los isomorfismos son los homeomorfismos.

Proposición 1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *Todo subespacio finito de X es compacto.*
2. *Toda unión finita de subespacios compactos de X es un subespacio compacto.*

Proposición 1.4. *Todo espacio compacto es completo.*

A continuación se presentan algunos resultados con respecto a los axiomas de separación que pueden verse con mayor detalle en [6]

Proposición 1.5. *Todo T_0-espacio regular X es T_3.*

Demostración. Supongamos que X es regular y T_0. Sean x, y elementos distintos de X. Por el axioma T_0 existe un abierto U tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Si $x \in U$ e $y \notin U$, entonces $x \notin cl(\{y\})$. Como X es regular, entonces existen abiertos disjuntos V y W tales que $x \in V$ e $y \in cl(\{y\}) \subset W$. De manera análoga, si $y \in U$ y $x \notin U$, entonces existen abiertos disjuntos V y W' tales que $y \in V$ y $x \in cl(\{x\}) \subset W'$. Por lo tanto X es un espacio de Hausdorff, y consecuentemente T_1. $\square$

Corolario 1.6. *En un T_0-espacio regular son equivalentes los axiomas T_0, T_1, T_2 y T_3.*

Definición 1.7. Un espacio topológico (X, τ) es **completamente regular**, si para cada $F \in X^*$ $= \{\text{cerrados}\}$ y $x \in F^c$, existe una función continua $f : (X, \tau) \longrightarrow ([0, 1], \tau_{us})$, tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = \{1\}$.

Proposición 1.8. *Se cumplen los siguientes resultados*

3. *Todo espacio completamente regular es regular.*

4. *Todo espacio $T4$ es completamente regular.*

5. *Todo espacio completamente regular, es subespacio de algún espacio $T4$.*

6. *La regularidad completa es una propiedad topológica, hereditaria y productiva, pero no pasa al cociente.*

Definición 1.9. Un espacio (X, τ_x) se dice que es **de Lindeloff** si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento contable.

La **mayoría** de los espacios que encontramos regularmente son $T4$, de hecho el siguiente teorema nos da condiciones bastante naturales para que un espacio sea $T4$.

Proposición 1.10. *[16, Teorema, 6.1.1, p. 118] Sea (X, τ_x) un espacio topológico. Entonces X es $T4$ si se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:*

1. *X es compacto y Hausdorff.*

2. *X es $T3$ y segundo Contable.*

3. *X es $T3$ y de Lindeloff.*

1.1.2. La Categoria $COMPACT2$

Los objetos son los espacios compactos de Hausdorff, o sea $T2$-espacios compactos, y los morfismos son los mapeos continuos. Los isomorfismos son los homeomorfismos. En cierto sentido, los espacios topológicos compactos se comportan como los espacios finitos; por ejemplo, en ellos toda función continua alcanza un máximo y un mínimo. Todos los objetos de esta categoría son $T4$-espacios y se tiene :

{ subespacios cerrados } = { subespacios compactos }
{ mapeos continuos biyectivos } = { homeomorfismos }

Teorema 1.11. *[8, Teorema 4.10, p. 95] Sea X un espacio de Hausdorff. Si K_1 y K_2 son dos subespacios compactos disjuntos en X, entonces existen abiertos disjuntos U_1 y U_2 tales que $K_1 \subset U_1$, y $K2 \subset U_2$.*

Corolario 1.12. *Todo T_2-espacio compacto es T_4.*

Corolario 1.13. *En todo T_2-espacio compacto son equivalentes los axiomas T_i, con $i = 0, 1, 2, 3$ y 4.*

Demostración. Por ser T_4 es T_0 y regular. Por el corolario de la proposición 1.5 son equivalentes T_i, $i = 0, 1, 2$ y 3. Por lógica, T_3 implica T_4 (una implicación sólo es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso). ☐

1.1.3. La Categoria *EVT*

Los objetos son los espacios vectoriales topológicos (EVT), y los morfismos son las transformaciones lineales continuas. Los isomorfismos son los homeomorfismos lineales. El cuerpo de los escalares es $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$

Teorema 1.14. *[15, Teorema 1.10, p.10] Sea X un EVT. Supongamos que K y C son subconjuntos de X, compacto y cerrado, respectivamente, disjuntos. Entonces 0 tiene una vecindad V tal que $(K + V) \cap (C + V) = \varnothing$.*

Teniendo en cuenta que $K + V$ es una unión de trasladados $x + V$ de V $(x \in K)$ resulta que $K + V$ es un conjunto abierto que contiene a K. Por tanto, el teorema implica la existencia de conjuntos abiertos disjuntos que contienen K y C, respectivamente.

Corolario 1.15. *Todo EVT es regular.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 1.14. □

Teorema 1.16. *[10, Corolario VI.3.58, p. 158] Todo EVT es completamente regular.*

1.1.4. La Categoria *METRIC*

Los objetos son los espacios métricos, y los morfismos son las inmersiones isométricas, es decir, los mapeos que preservan la métrica (que son necesariamente inyectivos y Lipschitzianos). Los isomorfismos son las inmersiones isométricas sobreyectivas.

En esta categoría cada una de las siguientes afirmaciones, respecto a un mapeo f, implica la siguiente:

a. f es una inmersión isométrica;

b. f es Lipschitziano;

c. f es uniformemente continuo; (1 METRIC)

d. f es continuo (en todo punto);

e. f es continuo en algún punto.

Proposición 1.17. *Todo espacio métrico es primero contable.*

Demostración. Para cada x las bolas con radio $\frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, y centro en x forman una base local contable. □

Proposición 1.18. *[5, Teorema 3.9,p. 16] Todo espacio métrico es T4*

1.1.5. La Categoria *CONTIN*

Los objetos son los continuos (espacios métricos compactos y conexos), y los morfismos son los inmersiones isométricas. Los isomorfismos son las isometrías.
El estudio sistemático de los continuos se inició a principios del siglo XX en Europa. Específicamente, en la escuela polaca de matemáticas, la cual escogió a la topología, y, en particular, a la teoría de los continuos, como una de las cuatro ramas de la matemática a las que se dedicarían y fortalecerían. Para mayor información sobre la teoria de continuos puede revisar [4]

Proposición 1.19. *Sean X e Y espacios métricos. Si X es un continuo y $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo continuo, entonces $f(X)$ es un continuo.*

Definición 1.20. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es **localmente conexo** si todo $p \in X$ tiene una base local formada por subconjuntos conexos.

Teorema 1.21. *[1, Teorema 2.21, p. 44] Un espacio topológico X es localmente conexo si y solo si para cualquier subconjunto abierto U en X, cada componente de U es abierta en X.*

Definición 1.22. Sea X espacio topológico. Dado $p \in X$, se dice que X es **conexo en pequeño** en p, si cualquier conjunto abierto U de X que contiene a p, contiene un conjunto conexo V de X que contiene a p en su interior. Se dice que X es conexo en pequeño, si X es conexo en pequeño en todo punto.

Teorema 1.23. *[1, Teorema 2.25, p. 46] Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si es conexo en pequeño.*

1.1.6. La Categoria $NORM$

Los objetos son los espacios normados, y los morfismos son las transformaciones lineales que preservan la norma (inmersiones isométricas lineales). Los isomorfismos son las transformaciones lineales sobreyectivas que preservan la norma.
Esta categoría es una subcategoría no plena de la categoría METRIC, y también es una subcategoría no plena de la categoría EVT.

Proposición 1.24. *En esta categoría, las siguientes afirmaciones, respecto a un mapeo f, son equivalentes:*

a. f es Lipschitziano (o acotado);

b. f es uniformemente continuo;

c. f es continuo (en todo punto); *(2 NORM)*

d. f es continuo en 0;

e. f es continuo en algún punto.

1.1.7. La Categoria $bNORM$

Sus objetos son los espacios normados, y sus morfismos son las transformaciones lineales acotadas (bTL), es decir, transformaciones lineales Lipschitzianas. Los isomorfismos son las bTL biyectivas cuyas inversas también son bTL.

1.1.8. La Categoria BAN

Es una subcategoría plena de la categoría NORM. Los objetos son los espacios de Banach (espacios normados completos).

1.1.9. La Categoria EPI

Los objetos son los espacios con producto interno (epi), y los morfismos son las transformaciones lineales que preservan el producto interno, ($hom-epi$), necesariamente inyectivas, porque también preservan la norma inducida. Los isomorfismos son los $hom-epi$ sobreyectivos.

Proposición 1.25 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sea $(H, <, >)$ un epi. Para cualesquiera $f, g \in H$:*

$$|< f, g >| \leqslant \| f \| \| g \|$$

1.1.10. La Categoria $HILB$

Es una subcategoría plena de la categoría EPI. Sus objetos son los espacios de Hilbert (*epi* con norma completa). También es una subcategoría de la categoría BAN, de manera que aquí también vale (2 NORM)

Funcionales Lineales Acotados

Definición 1.26. Definición - Sea H un k-espacio de Hilbert. Una función Φ de H en k es un **funcional lineal acotado** si satisface las siguientes condiciones:

1. $\Phi(af + bg) = a\Phi(f) + b\Phi(g)$ para f y g en H, $a, b \in k$ y
2. existe $M > 0$ tal que $\| \Phi(f) \| \leqslant M \| f \|$ para todo $f \in H$, es decir, Φ es un mapeo Lipschitziano.

Proposición 1.27. *Sea $g \in H$. El mapeo $\Psi : H \longrightarrow k$ definido por $\Psi(f) =< f, g >$ para todo $f \in H$ es un funcional acotado.*

Demostración. Es suficiente considerar el caso $g \neq 0$. Es claro que $< f, g >$ es lineal en f, y $| \Psi(f) | = |< f, g >| \leqslant \| g \| \| f \|$ (por la desigualdad de Cauchy-Schwarz) para todo $f \in H$, se obtiene el resultado tomando $M = \| g \|$. Por lo tanto Ψ es un funcional acotado. □

Denotemos por H^* al conjunto de todos los funcionales acotados sobre H.

Proposición 1.28. *H^* es un espacio de Hilbert.*

El Teorema De Representación De Riesz

Teorema 1.29. *(Teorema de representación de Riesz) Si Ψ es un funcional lineal acotado en H, entonces existe un único $g \in H$ tal que $\Psi(f) = < f, g >$ para todo $f \in H$. Ahora definimos el mapeo $\varrho : H \longrightarrow H^*$ por $\varrho(g)(f) = < f, g >$ con $g, f \in H$.*

(Tengamos en cuenta que todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach).

Proposición 1.30. *$\varrho : H \longrightarrow H^*$ es un monomorfismo de espacios de Banach, es decir, es lineal inyectivo y preserva la norma.*

Demostración. El teorema de representación de Riesz garantiza la inyectividad y como la formula $\varrho(g)(f) = < f, g >$ es lineal en g, entonces ϱ es lineal y por la referencia [3, Teorema, III. 31] ϱ preserva la norma. □

1.1.11. La Categoria ALG

Los objetos son las k-álgebras, y los morfismos son los homomorfismos de k-álgebras ($hom - alg$), es decir, mapeos k-lineales que preservan la multiplicación. Los isomorfismos son los $hom - alg$ biyectivos.

Definición 1.31. Sea $(B, \|\|)$ un espacio de Banach sobre el cuerpo k. Decimos que B es una **álgebra de Banach** si es una álgebra y satisface la desigualdad submultiplicativa $\| fg \| \leqslant \| f \| \| g \|$ para cualesquiera $f, g \in B$, lo cual implica que la multiplicacilón es continua.

Decimos además que B es conmutativa si $fg = gf$ para todo $f, g \in B$. Además B es llamada una álgebra con identidad si existe $1 \in B$ tal que $f1 = f = 1f$ para todo $f \in B$ y $\| 1 \| = 1$.

Definición 1.32. Una **involución** en una $\mathbb{C}$-álgebra A es un anti-automorfismo de A de orden 2 . Es decir, una transformación $x \longrightarrow x^*$, $x \in A$, que satisface las siguientes condiciones :

a. $\forall\ x, y \in A : (x+y)^* = x^* + y^*$,

b. $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}, \forall\ x \in A : (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$,

c. $\forall\ x, y \in A : (xy)^* = y^* x^*$,

d. $\forall\ x \in A : x^{**} = x$

Definición 1.33. Una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach A es llamada una **C^*-álgebra** si es conmutativa , con identidad e tal que $\| e \| = 1$ y una involución $*$ tal que para todo $a \in A :\ \| a^* a \| = \| a \|^2$.

1.1.12. La Categoria *ALGBAN*

Es una subcategoría plena de la categoría ALG. Sus objetos son las álgebras de Banach.
En términos generales, hay tres tipos de álgebras de Banach: (1) álgebras de operadores lineales acotados en espacios de Banach con composición como multiplicación y norma de operador, (2) álgebras que constan de funciones continuas acotadas en espacios topológicos con la multiplicación punto a punto y la norma uniforme, y (3) álgebras de funciones integrables en grupos localmente compactos con convolución como multiplicación. Todas éstas juegan un papel clave en el análisis moderno. Gran parte de la teoría de operadores se aborda mejor desde el punto de vista de las álgebras de Banach y muchos temas en análisis complejo (como la aproximación por polinomios o funciones racionales en dominios específicos) se entienden mejor en el marco de las álgebras de Banach. También, el estudio de un grupo abeliano localmente compacto G está estrechamente relacionado con el estudio de la álgebra de grupo $L^1(G)$.

1.1.13. La Categoria *CEST*

Los objetos son las C^*-álgebras, y los morfismos son los homomorfismos de álgebras que preservan identidad e involución. Los isomorfismos son los morfismos de C^*-álgebras biyectivos.

2. Funtores

En esta sección presentamos la noción de funtor que sirve para relacionar diferentes categorías.

Definición 2.1. Dadas dos categorías $\mathscr{A}, \mathscr{B}$. Un **funtor (covariante)** $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es una regla que

1. a cada objeto X de $\mathscr{A}$ asigna un objeto $F(X)$ de $\mathscr{B}$,

2. a cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{A}$ asigna un morfismo $F(f) =: f_* : F(X) \longrightarrow F(Y)$ en $\mathscr{B}$.
   Tal que satisface las siguientes condiciones:

a. F preserva los morfismos identidad: $(id_X)_* = id_{F(X)}$ para cada X;

b. F preserva la composición de morfismos: $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Definición 2.2. Dadas dos categorías $\mathscr{A}, \mathscr{B}$. Un **funtor contravariante** $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es una regla que a cada objeto X de $\mathscr{A}$ asigna un objeto $F(X)$ de $\mathscr{B}$, y a cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{A}$ asigna un morfismo $F(f) =: f^* : F(Y) \longrightarrow F(X)$ en $\mathscr{B}$, de modo que

$$id_X^* = id_{F(X)}, \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

2.1. Algunos funtores Importantes

A continuación presentamos algunos ejemplos de funtores

2.1.1. El Funtor C

Es un funtor contravariante de TOP en ALG. Como mapeo de morfismos está definido de la siguiente manera:
Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo continuo, entonces $f^* = C(f) : C(Y) \longrightarrow C(X)$ asigna a $h : Y \longrightarrow k$, $h \circ f$. Es decir, $f^*(h) = h \circ f$, el compuesto de $f : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow k$. Es fácil comprobar que f^* es un homomorfismo de k-álgebras y que C preserva identidades e invierte la composición, o sea, si gof está definido, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Teorema 2.3. *[8, Teorema 4.9, p. 95] Si X es un espacio compacto, entonces el espacio $C(X, k)$ de todas las funciones continuas en X con valores en el cuerpo k, es un espacio de Banach con la norma $\| f \| = max\{| f(x) | \ / \ x \in X\}$, cuya topología asociada es la topología de la convergencia uniforme.*

El funtor C restringido a la categoría $COMPACT2$ toma valores en $ALGBAN$, de manera que C resulta un funtor contravariante de $COMPACT2$ en $ALGBAN$:
Para todo $X \in Obj(COMPACT2)$, $C(X)$ es una álgebra de Banach sobre k; y para todo $f \in hom(X, Y) : f^*$ es un homomorfismo de k-álgebras de Banach. Ver [7, p. 41]

El funtor $C : COMPACT2 \longrightarrow ALGBAN$ resulta ser una valiosa herramienta para estudiar los espacios compactos de Hausdorff. Recordemos que los funtores de homotopía y de homología de TOP en $GROUP$ son valiosas herramientas para estudiar topología con más profundidad.

Se pueden caracterizar y estudiar las propiedades topológicas de un espacio compacto de Hausdorff X a partir de las propiedades, tanto algebraicas como topológicas, de su correspondiente álgebra de funciones continuas :

$$C(X) = \{f : X \longrightarrow R \ / \ f \text{ es continua}\}$$

$$C(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \ / \ f \text{ es continua}\}$$

Dentro del álgebra topológica destaca el estudio de tales álgebras de funciones, por lo que analizaremos su estructura algebraico-topológica, temática que ha dado lugar a múltiples resultados de gran importancia en matemáticas como el Teorema de Stone-Weierstrass. Uno de los teoremas más importantes en relación a esta temática es el resultado obtenido en 1932 por Banach, que establece lo siguiente:

Teorema 2.4. *(Banach)[7, p. 5] Sean X y Y dos espacios métricos compactos. Si sus k-álgebras $C(X)$ y $C(Y)$ son linealmente isométricas, entonces X e Y son homeomorfos.*

Unos años después, más concretamente en 1937, Stone generalizó dicho Teorema para espacios X e Y arbitrarios, quedando así lo que hoy día conocemos como el Teorema de Banach-Stone.

Teorema 2.5. *[7, Teorema 2.2, p. 24] $C(X)$ tiene dimensión finita si y solo si X es finito.*

Teorema 2.6. *[7, Teorema 2.7, p. 31] Si X es un espacio compacto de Hausdorff, entonces son equivalentes:*

X es metrizable

$C(X)$ es separable

2.1.2. Los Funtores M y Cb

Sabemos que $M(A)$ está contenido en A^* y que para cualquier álgebra de Banach $A : M(A)$ es un T_2-espacio topológico compacto bajo la topología débil $*$ para A^*. Para mayor información el lector puede consultar [12].

2.1.3. El Funtor M

El funtor (contravariante) M : ALGBAN $\longrightarrow$ COMPACT2 como mapeo de morfismos está definido de la siguiente manera: Si $f : A \longrightarrow B$ es un $hom - alg$, entonces
$f^* = M(f) : M(B) \longrightarrow M(A)$ está definido po $f^*(h) = h \circ f$, el compuesto de $f : A \longrightarrow B$ y $h : B \longrightarrow \mathbb{C}$ (cuerpo de los complejos). Es fácil comprobar que f^* es un mapeo continuo y que M preserva identidades e invierte la composición, o sea, si $g \circ f$ está definido, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

2.1.4. El Funtor Cb

Sabemos que para cualquier T_2-espacio compacto $X : Cb(X)$ es una álgebra de Banach.ver [12, Proposición 3.3.5, p. 55]
El funtor (contravariante) $Cb : COMPACT2 \longrightarrow ALGBAN$ como mapeo de morfismos está definido de la siguiente manera: Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo continuo, entonces $f^* = Cb(f)$: $Cb(Y) \longrightarrow Cb(X)$ está definido por $f^*(h) = h \circ f$, el compuesto de $f : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow \mathbb{C}$. Es fácil comprobar que f^* es un $hom - alg$, y que Cb preserva identidades e invierte la composición, o sea, si $g \circ f$ está definido, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

3. Representaciones de Álgebras de Banach y Funtores Adjuntos

Otra temática importante es la de la teorías de representaciones de álgebras.
Observación. Es posible unificar el estudio de las teorías de representaciones de grupos , de álgebras de *Lie* y de *carcajes* ver [13].

La teoría de representaciones nació en 1896 en la obra del alemán matemático F. G. Frobenius. Este trabajo fue impulsado por una carta a Frobenius de R. Dedekind. En esta carta, Dedekind hizo la siguiente observación: toma la tabla de multiplicar de un grupo finito G y conviértelo en una matriz X_G reemplazando cada entrada g de esta tabla por una variable x_g. Entonces el determinante de X_G se factoriza en un producto de polinomios irreducibles en $\{x_g\}$, cada uno de los cuales ocurre con multiplicidad igual a su grado. Dedekind comprobó este sorprendente hecho en algunos casos especiales pero no pudo probarlo en general. Entonces él dio este problema a Frobenius. Para encontrar una solución a este problema, Frobenius creó la Teoría de Representaciones de grupos finitos.

Definición 3.1. Una **representación** de una álgebra asociativa A (también llamada A-módulo a la izquierda) es un par ordenado (V, ϱ), donde V es un k-espacio vectorial y $\varrho : A \longrightarrow EndV$, es un homomorfismo de álgebras, es decir, un mapeo lineal que preserva la multiplicación y la identidad. Como es usual, la representación (V, ϱ) se denotará por V, si no hay lugar a confusión.

Definición 3.2. Una **subrepresentación** de una representación V es un subespacio U de V que es invariante bajo todos los operadores $\varrho(a), a \in A$.

Teorema 3.3. *[7, Teorema 3.14, p. 50]. Sea A un álgebra real de Banach conmutativa, con identidad* **e** *tal que* $\| e \|= 1$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

(i) *A es linealmente isométrica a una álgebra $C(X)$ para cierto T_2-espacio compacto X.*

(ii) $\forall\, a, b \in A :\| a^2 – b^2 \| \leqslant \| a^2 + b^2 \|$.

El principal resultado sobre $\mathbb{C}$-álgebras de Banach es el siguiente teorema de representación.

Teorema 3.4. *(Gelfand-Naimark). Si A es una C^*-álgebra, entonces existe una representación (de C^*-álgebras) ϱ de A sobre una C^*-álgebra $C(X, \mathbb{C})$, donde X es un T_2-espacio compacto, y además ϱ preserva normas, de manera que A es isométrica como C^*-álgebra a $C(X, \mathbb{C})$.*

Demostración. Observemos en primer lugar que (ii) del teorema anterior implica que la involución es una isometría en $A :\| a* \|^2 =\| a^{**} a^* \| =\| aa^* \| =\| a \|^2$. Sea $A_{\mathbb{R}}$ la subálgebra cerrada de A que contiene a todos los elementos auto-adjuntos de A. Entonces $A_{\mathbb{R}}$ es una álgebra de Banach real. Mostremos que satisface las condiciones del Teorema anterior.
En efecto : si $a, b \in A_{\mathbb{R}}$, entonces $\| (a + ib)^2 \| = \| (a – ib)^2 \|$; luego $\| a^2 – b^2 \| = (1/2) \| (a + ib)^2 + (a – ib)^2 \| \leqslant \| (a + ib)^2 \| \leqslant \| a + ib \|^2 = \| (a + ib)(a – ib) \| = \| a^2 + b^2 \|$ Por tanto podemos obtener una isometría lineal de álgebras de Banach reales $J : A_{\mathbb{R}} \longrightarrow C(X) = C_{\mathbb{R}}(X)$ para cierto T_2-espacio compacto X. La aplicación J se puede extender trivialmente a un isomorfismo de $*$-álgebras $\overline{J} : A \longrightarrow C_{\mathbb{C}}(X)$ Finalmente, si $x = a + ib$ con $a, b \in A_{\mathbb{R}}$, entonces $\|x\|^2 = \|a^2 + b^2\| = \|\overline{J}(a^2 + b^2)\| = \|\overline{J}x\|^2$ y por lo tanto $\overline{J}$ es una isometría.

$\square$

Según el Convenio de Identificación, las únicas C^*-álgebras son las C^*-álgebras de funciones $C(X, \mathbb{C})$, con $X \in Obj(COMPACT2)$. Para mayor detalle el lector puede consultar [12], [14].

3.1. Adjunción de Funtores

Las definiciones de objeto terminal, producto binario, ecualizador y pullback, son casos particulares de un concepto general, llamado límite de un funtor. Ver los capitulos. 11, 12, 14 y 15 de [2]
Los límites, los colímites y todas las construcciones fundamentales de la teoría de categorías pueden describirse como adjuntos. Por lo tanto, los productos y coproductos son adjuntos, al igual que los ecualizadores y coecualizadores, pullbacks y pushouts, etc. Todas las nociones mencionadas anteriomente, aunque son importantes, no son fundamentales en la teoría de categorías. Podría decirse que este último título incluye las nociones de límite/colímite; a su vez, estos son casos especiales de lo que sin duda es la piedra angular de la teoría de categorías, el concepto de funtores adjuntos, definido por primera vez por Daniel Kan en 1956 y publicado en 1958.

Definición 3.5. Consideremos las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$. Una **adjunción** de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ es una terna ordenada (F, G, Ψ) donde $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ son funtores y
$\Psi : Hom_{\mathscr{C}}(FX, A) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(X; GA)$ es una biyección de conjuntos que es natural en el siguiente sentido: Si X y Y son elementos de $Obj\mathscr{C}$, y A y B son elementos de $Obj\mathscr{D}$, entonces para cualesquiera morfismos $f \in Hom_C(X, GA), g \in Hom_D(FX, A), h \in Hom_C(Y, X)$, y $k \in Hom_D(A, B)$ se tiene :

1. $\Psi(G(k) \circ f) = k \circ \Psi(f)$
2. $\Psi^{-1}(g \circ Fh) = \Psi^{-1}(g) \circ h$

Teorema 3.6. *[12, Teorema 4.1.2, p. 57] El funtor M es adjunto por la izquierda a Cb.*

Resultados de la adjunción de los funtores Cb y M : Se obtiene para cada álgebra de Banach A, el homomorfismo de álgebras de Banach, $\Gamma_A : A \longrightarrow Cb(M(A))$ definido por

$$\Gamma_A(a) = ev_a : M(A) \longrightarrow \mathbb{C} \quad ev_a(\varphi) = \varphi(a).$$

Este homomorfismo es llamado la transformada de Gelfand. Análogamente se obtiene la transformada de Stone-Cech : a cada T_2-espacio de Hausdorff X corresponde un homeomorfismo, $\Psi_X : X \longrightarrow M(Cb(X))$ definido por

$$\Psi_X(x) = ev_x : CbX \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ donde } ev_x(h) = h(x)$$

llamado la transformada de Stone-Cech en X.

Para mayor información consultar en [14, Corolario 5.6, p.28].

4. Conclusión

Se ha logrado el objetivo de enfocar categóricamente el estudio sistemático de los continuos y de las álgebras de Banach de la escuela polaca (las teorías de Banach y de Stone), aplicando el lenguaje funtorial (dualidad y adjunción), y la teoría de Gelfand-Naimark, interpretándola según la teoría de representaciones. Se ha motivado el enfoque categórico-funtorial ilustrando su eficacia y valía con aspectos del análisis funcional de gran alcance.

En conclusión, se ha mostrado que las estructuras matemáticas universales del enfoque categórico constituyen una metodología de alto nivel para la investigación y la enseñanza del Análisis Funcional y otras teorías científicas y tecnológicas.

Referencias bibliográficas

[1] Aguilar Rangel, P. (2018). *Introducción a los Espacios Métricos Compactos y Conexos*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

[2] Beshenov, A. (2018). *Introducción al lenguaje funtorial*, Universidad de El Salvador.

[3] Corach, G., Andruchov, E. (1997). *Notas de ANALISIS FUNCIONAL*.

[4] Córdova Salazar, V. (2011). *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos*. Tesis para obtener el título de: Licenciada en Matemáticas. BUAP. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

[5] Fernández Fuertes , E. (2016). *TOPOLOGIA GENERAl Paracompacidad y metrización*. Trabajo de fin de grado del Grado en Matemáticas. UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS. Departamento de Geometría y Topología.

[6] Fernández, I. (2020). *Axiomas de separación en espacios topológicos*. Trabajo Fin de Grado Matemáticas.

[7] Fernández Martínez, A. (2017). *Espacios C(K) como Álgebras de Banach*. Trabajo de fin de grado. Universidad de Murcia Facultad de Matemáticas.

[8] Ivorra Castillo, C. (2009). *TOPOLOGÍA*.

[9] Kaniuth, E. (2009). *A Course in Commutative Banach Algebras*. Editorial Springer.

[10] López Pérez, G. (1998). *Análisis Funcional*. PROYECTO DOCENTE.

[11] Lugo Alcántar, G. (2021). *Niveles de Whitney en Hiperespacios de Continuos*. TESIS para obtener el título de Licenciado en Matemática. UNIVERSIDAD DE SONORA, División de Ciencias Exactas y Naturales. Programa de Licenciatura en Matemáticas.

[12] Muñoz Deras, E. A. (2021). *Categorías aplicadas a la teoría de álgebras de Banach*. Universidad de El Salvador Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

[13] Etingof, P., Golberg, O., Hensel, S., Liu, T., Schwendner, A., Vaintrob, D., & Yudovina, E. (2009). *Introduction to representation theory*.

[14] Rafkin, C. (1999). *Categoric Theory and the Gelfand-Naimark Theorem*.

[15] Rudin, W. (1991). *FUNCTIONAL ANALYSIS*. Second Edition McGraw-Hill. Inc.

[16] Sambarino, M. (2022). *Introducción a la Topología*.