PESQUIMAT 27(2): 11–20 (2024) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v27.i2.27401 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

La Ecuación del Calor y de Schrödinger en Espacios con Peso

***Nancy Moya Lázaro*[1], *Teodoro Sulca Paredes* [2] *y Gladys Chancan Rojas*[3]**

Resumen: En el presente artículo se analiza la solución de la ecuación del calor y de la ecuación de Schrödinger en espacios de Sobolev con peso en $\mathbb{R}^N$. Con pesos en la clase R_{ρ_1,ρ_2} probamos que la ecuación del calor tiene una única solución $u(t) := S(t)u_0$, donde $\left\{S(t) := e^{\Delta t}\right\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo analítico generado por el operador elíptico lineal de segundo orden $-\Delta$ realizado en el espacio de Banach $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$. También se prueba que el operador de Schrödinger $-\Delta - V(x)I$, con potenciales V en espacios localmente uniformes en $\mathbb{R}^N$ genera un semigrupo analítico $S_V(t) := e^{(\Delta+V(x)I)t}$ que preserva orden en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ y tiene los mismos espacios de potencias fraccionarias del $-\Delta$.

Palabras clave: Ecuación del calor, operadores de Schrödinger,espacios con peso, espacios localmente uniformes, semigrupo analítico, espacios de potencias fraccionarias.

The Heat and Schrödinger Equation in Weighted Spaces

Abstract: This article analyzes the solution of the heat equation and the Schrödinger equation in Sobolev space with weight in $\mathbb{R}^N$. With weights ρ in the class $\mathbb{R}_{\rho_1,\rho_2}$ it is proven that the heat equation hs a unique solution $u(t) := S(t)u_0$, where $\left\{S(t) := e^{\Delta t}\right\}_{t\geq 0}$ is the analytical semigroup generated by the elliptic operator second-order linear $-\Delta$ realized in the Banach space $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$. We also prove thath the Schrödinger operator $-\Delta - V(x)I$, with potentials V in locally uniform sapces in $\mathbb{R}^N$ generates an anlytical semigroup $S_V(t) := e^{(\Delta+V(x)I)t}$ that preserves order in $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ and has the same fractional power spaces of $-\Delta$.

Keywords: Heat equation, Schrödinger operators, weighted spaces, locally uniform spaces, analytical semigroup, fractional power spaces.

Recibido: 16/02/2024 *Aceptado:* 15/06/2024 *Publicado online:* 30/12/2024

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: nmoyal@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: tsulcap@unmsm.edu.pe
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail:gchancanr@unmsm.edu.pe

1. Introducción

En este artículo se estudia la ecuación del calor y de Schrödinger en espacios de Sobolev con peso en $\mathbb{R}^N$. Con pesos de la clase R_{ρ_1,ρ_2} se prueba la existencia del semigrupo analítico asociado a la ecuación del calor y de Schrödinger.

En la sección 2 se presenta la definición de peso y ejemplos de pesos, se introduce también una clase de pesos R_{ρ_1,ρ_2} y se formúla algunas estimaciones. Se estudia también algunas relaciones entre espacios de Sobolev con peso y espacios de Sobolev sin peso.

Para los pesos de la clase R_{ρ_1,ρ_2} se establece un isomorfismo J entre espacios con peso $L^p_\rho(\mathbb{R}^N)$ y el espacio sin peso $L^p(\mathbb{R}^N)$ via la relación $J(u) = u.\rho^{1/p}$, estas isometrías permiten construir las inclusiones de Sobolev con peso entre los espacios $L^p_\rho(\mathbb{R}^N)$ y $L^p(\mathbb{R}^N)$.

En la sección 3, se comienza el estudio con la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0,\ x \text{ en } \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(0) = u_0 \in L^q_\rho(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{1}$$

Para ello con $1 < q < \infty$ y $\rho \in R_{\rho_1,\rho_2}$, se estudia el operador elíptico lineal de segundo orden $-\Delta$ en el espacio $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$. Vía el isomorfismo J se le lleva a un operador transformado Λ en $L^q(\mathbb{R}^N)$ que tiene la forma $\Lambda w := -\Delta w + \frac{2}{q}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)\nabla w + \left[\frac{1}{q}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) + \frac{(-1-\frac{1}{q})}{q}\frac{|\nabla\rho|^2}{\rho^2}\right] w.$

Λ es una perturbación de $-\Delta$, con coeficientes acotados desde que $\rho \in R_{\rho_1,\rho_2}$.

Luego se utiliza los resultados conocidos de $L^q(\mathbb{R}^N)$, los cuales permiten obtener que Λ es un operador sectorial en $L^q(\mathbb{R}^N)$ y por tanto genera un semigrupo analítico en $L^q(\mathbb{R}^N)$. Obtenida esta información se regresa a los espacios de Sobolev con peso vía el isomorfismo J para concluir que Δ con dominio $W^{2,q}_\rho(\mathbb{R}^N)$ genera un semigrupo analítico $\left\{S(t) := e^{\Delta t}\right\}_{t\geq 0}$ en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$. Se prueba tambien que el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ preserva orden en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$.

En la sección 4, se discute el comportamiento de los operadores de Schrödinger en los espacios con peso $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ y se analiza las soluciones de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = V(x)u,\ x \text{ en } \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(0) = u_0 \in L^q_\rho(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{2}$$

Aquí la atención se enfoca en el Operador de Schrödinger $-\Delta - V(x)I$, donde V pertenece a un espacio de potenciales, denominados espacios localmente uniformes y denotados por $L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)$, $\sigma > \frac{N}{2}$. Se puede así usar potenciales con singularidades locales y que no decaen en el infinito.

2. Función peso y espacios con peso

Función Peso

Una función $\rho : \mathbb{R}^N \to (0, +\infty)$ continua y estrictamente positiva se denomina función peso.

Definición 2.1 *Diremos que una función peso $\rho : \mathbb{R}^N \to (0, +\infty)$ es una función de clase $R_{\rho_1\,,\,\rho_2}$ si*

i) $\rho \in C^{(2)}(\mathbb{R}^N)$

(ii) $|D^\alpha\rho(x)| \leq \rho_r \cdot \rho(x)$, *para* $x \in \mathbb{R}^N$, $|\alpha| = r$, *con* $1 \leq r \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$ *y para ciertas constantes positivas* ρ_r.

Ejemplo 2.1 *El peso $\rho(x) := (1 + |x|^2)^\gamma$, $x \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ verifica las siguientes estimaciones:*
$|\nabla\rho(x)|_{\mathbb{R}^N} \leq 2|\gamma|\,\rho(x)$ *para cada* $x \in \mathbb{R}^N$.
$|\partial_i\partial_j\rho(x)| \leq (4|\gamma||\gamma - 1| + 2|\gamma|)\rho(x)$ *para cada* $i, j = 1, 2, \ldots, N$.
En consecuencia, se tiene que $\rho(x) := (1 + |x|^2)^\gamma$ pertenece a la clase $R_{\rho_1\,,\,\rho_2}$ considerando $\rho_1 = 2|\gamma|$ y $\rho_2 = 4|\gamma||\gamma - 1| + 2|\gamma|$.

Ejemplo 2.2 *Si $\rho(x)$ es un peso de $C^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $\rho(x) = e^{\gamma|x|}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ para todo $|x| \geq 1$ entonces $\rho \in R_{\rho_1,\rho_2}$, para ciertos ρ_1 , ρ_2 que dependen de γ.*

Espacios con Peso

Definición 2.2 *El espacio $L^p(\mathbb{R}^N)$ con peso ρ, denominado el espacio de Lebesgue con peso, se define como*

$$L^p_\rho(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p \cdot \rho(x) dx < \infty \right\}, \, 1 \leq p < \infty$$

con norma

$$||u||_{L^p_\rho(\mathbb{R}^N)} := \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p \cdot \rho(x) dx \right]^{1/p}$$

Análogamente se define los espacios de Sobolev con peso $W^{k,p}_\rho(\mathbb{R}^N)$.

Definición 2.3 *Para $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ denotamos por $W^{k,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ el espacio de las $\phi \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ que tienen derivadas direccionales $D^\alpha \phi \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $|\alpha| \leq k$. También definimos $W^{k,p}_\rho(\mathbb{R}^N)$ como el espacio de Banach que consiste de todas las $\phi \in W^{k,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que la norma*

$$||\phi||_{W^{k,p}_\rho(\mathbb{R}^N)} := \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha \phi||_{L^p_\rho(\mathbb{R}^N)} < \infty$$

Observación 2.1 *Si el peso es tal que $0 < m \leq \rho(x) \leq M$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, entonces los espacios $L^p_\rho(\mathbb{R}^N)$ coinciden con los espacios $L^p(\mathbb{R}^N)$, con norma equivalente y de la misma manera se tiene que los espacios de Sobolev con peso $W^{k,p}_\rho(\mathbb{R}^N)$ coinciden con los espacios de Sobolev standard sin peso $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Establecemos ahora un isomorfismo isométrico entre espacios de Lebesgue con peso y espacios de Lebesgue sin peso, el cual nos va permitir trasladar consideraciones y propiedades de estos últimos a los primeros.

Proposición 2.1 *Sea $1 \leq q < \infty$, $\rho \in R_{\rho_1,\rho_2}$. La aplicación*

$$\begin{array}{rcccl} J & : & L^q_\rho(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & L^q(\mathbb{R}^N) \\ & & u & \longmapsto & J(u) := u \cdot \rho^{1/q} \end{array}$$

es un isomorfismo isométrico.

Demostración:
Sea $u \in L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ entonces

$$||u||^q_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)} := \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q \cdot \rho(x) dx < \infty \, , \, 1 \leq q < \infty \tag{3}$$

Veremos que $u \cdot \rho^{1/q} \in L^q(\mathbb{R}^N)$.

$$\begin{aligned} ||J(u)||^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} &:= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x) \cdot \rho^{1/q}(x)|^q dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q \cdot \rho(x) dx \\ &= ||u||^q_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)} < \infty \end{aligned}$$

La última igualdad a la derecha es finito por (3).
Luego se tiene que

$$||J(u)||_{L^q(\mathbb{R}^N)} = ||u||_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)} \, , \, \forall u \in L^q_\rho(\mathbb{R}^N) \tag{4}$$

En consecuencia la aplicación J está bien definida. Es claro que J es lineal, inyectiva, sobreyectiva pues dado $w \in L^q(\mathbb{R}^N)$ existe $u \in L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ tal que $J(u) = w$, es decir, $u \cdot \rho^{1/q} = w$ del cual tenemos $u = w \cdot \rho^{-1/q}$. J es continua y por el teorema de la aplicación abierta tiene inversa continua. Por tanto es un isomorfismo. De la ecuación (4) J es una isometría.

Observación 2.2 *Observese que mediante la aplicación J podemos definir normas equivalentes en los espacios $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq q < \infty$ de la siguiente forma:*

$$||u||_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)} := ||u \cdot \rho^{1/q}||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \tag{5}$$

3. La ecuación del calor

En esta sección se estudia y formúla resultados concernientes a la ecuación lineal del calor en los espacios con peso $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$

$$u_t - \Delta u = 0 \, , \; x \in \mathbb{R}^N \; , \; t > 0 \, .$$

Se demuestra que el operador elíptico lineal de segundo orden $-\Delta$ realizado en el espacio de Banach $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ con un peso de la clase $\rho \in R_{\rho_1,\rho_2}$ es tal que, Δ genera un semigrupo analítico. Las ideas principales a seguir abajo son como sigue:
Se toma $X = L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ e $Y = L^q(\mathbb{R}^N)$ y se considera el isomorfismo isométrico definido entre X e Y por la relación de la forma $J(\phi) := \phi\rho^{1/q}$.

Sea el operador $-\Delta$ actuando en el espacio $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$, usando el isomorfismo isométrico J y se obtiene un nuevo operador Λ actuando en $L^q(\mathbb{R}^N)$. Al estar ρ en la clase R_{ρ_1,ρ_2}, se pueden aplicar resultados conocidos en estos espacios, como es que Λ con dominio $W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ realizado en $L^q(\mathbb{R}^N)$ es un operador sectorial. Seguidamente vía lema 3.1 y el hecho que J es biyectiva se consigue que $-\Delta$ es un operador sectorial en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ con dominio $W^{2,q}_\rho(\mathbb{R}^N)$.

A continuación se enuncia una definición y un lema para la demostración.

Definición 3.1 *Sea $k \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ y $\theta \in]0, \pi/2[$. Diremos que un operador lineal*

$$\Lambda : D(\Lambda) \subset Y \to Y$$

es $(k, \theta, a)-$ sectorial en el espacio de Banach Y si el sector

$$S_{a,\theta} = \{z \in \mathbb{C} \, : \, \theta \leq |\arg(z - a)| \leq \pi\} \cup \{a\}$$

está contenido en el conjunto resolvente de Λ y se verifica la desigualdad siguiente

$$||\,(\lambda I - \Lambda)^{-1}\,||_{\mathcal{L}(Y,Y)} \leq \frac{K}{|\lambda - a|}$$

para cada $\lambda \in S_{a,\theta}$. [2](1981, p. 18)

A continuación presentamos un resultado que es un caso particular del Lema 5.1 en [3].

Lema 3.1 *Sea Y un espacio de Banach y $\Lambda : D(\Lambda) \subset Y \to Y$ un (k, θ, a) operador sectorial. Supongamos además que X es otro espacio de Banach tal que existe un isomorfismo lineal $\phi : X \to Y$ entonces* *i)* *El operador* $\Lambda_\phi := \Phi^{-1}\Lambda\Phi : D(\Lambda_\phi) \subset X \to X$ *con dominio* $D(\Lambda_\phi) = \phi^{-1}(D(\Lambda))$*, es un* $(\hat{k}, \theta, a)$ *operador sectorial en* X*, con* $\hat{k} = ||\phi||\,||\phi^{-1}||\,k$*. Además los conjuntos resolventes de* Λ_Φ *y* Λ *coinciden y los semigrupos estan relacionados por la fórmula*

$$e^{-\Lambda_\phi t} = \Phi^{-1}\, e^{-\Lambda t}\phi.$$

ii) *Si el operador* Λ *está densamente definido entonces para cada* $\alpha \geq 0$*,* Φ *es un isomorfismo de* X^α *en* Y^α*, y si* ϕ *es una isometría se tiene que* Φ *es una isometría entre* X^α *y* Y^α*, donde* X^α *e* Y^α *son los espacios de potencias fraccionarias de* Λ_Φ *y* Λ *respectivamente*

El resultado que enunciamos a continuación es un caso particular del Teorema 5.1 en [3] .

Proposición 3.1 *Sea* $\rho \in R_{\rho_1,\rho_2}$*. El operador lineal no acotado* $-\Delta$ *en* $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ *con dominio* $W^{2,q}_\rho(\mathbb{R}^N)$*, es tal que,* Δ *genera un semigrupo analítico* $\left\{S(t) := e^{\Delta t}\right\}_{t\geq 0}$ *que preserva orden en* $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$*, para* $1 < q < \infty$ *y la ecuación lineal*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \ \ en\ \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(0) = u_0 \in L^q_\rho(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

tiene una única solución $u(t) := S(t)u_0$ *para* $t \geq 0$*.*

Demostración:
La demostración se sintetiza en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
L^q_\rho(R^N) \arrow[r, "-\Delta"] & L^q_\rho(R^N) \\
u \arrow[r] \arrow[d, "J"'] & -\Delta u \arrow[d, "J"'] \\
L^q(R^N) \arrow[r, "\Lambda"] & L^q(R^N) \\
w = u\rho^{1/q} \arrow[r] & \Lambda(w) := -\Delta u\rho^{1/q}
\end{tikzcd}$$

Sea el operador elíptico $-\Delta$ actuando en $u \in L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$. Por el isomorfismo isométrico J, lo llevamos al espacio $L^q(\mathbb{R}^N)$ de la siguiente manera, se multiplica $-\Delta u$ por $\rho^{1/q}$ y se considera que $u = w\rho^{-1/q}$ con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda w := (-\Delta u)\rho^{1/q} &= -\Delta(w\rho^{-1/q})\rho^{1/q} \\ &= -\Delta w + \frac{2}{q}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)\nabla w + \left[\frac{1}{q}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) + \frac{(-1-1/q)}{q}\frac{|\nabla\rho|^2}{\rho^2}\right] w \end{aligned}$$

Entonces Λ es un operador en $L^q(\mathbb{R}^N)$ que tiene la misma parte principal que el operador $-\Delta$. Puesto que $\rho \in R_{\rho_1,\rho_2}$ y Λ tiene los coeficientes acotados se pueden aplicar los resultados debidos a Amann, Hieber , Simonett dados en [1], obteniendose que Λ realizado en $L^q(\mathbb{R}^N)$ con dominio $W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ es un operador sectorial en $L^q(\mathbb{R}^N)$. Luego aplicamos el lema 3.1, con lo cual se obtiene que $-\Delta$ con dominio $W^{2,q}_\rho(\mathbb{R}^N)$ es un operador sectorial en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ y por tanto Δ genera un semigrupo $\left\{S(t) := e^{\Delta t}\right\}_{t\geq 0}$ analítico en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ y la ecuación lineal

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \text{ en } \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(0) = u_0 \in L^q_\rho(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{6}$$

tiene una única solución $u(t) := e^{\Delta t}u_0$ para $t \geq 0$.

Formalmente la solución de (6) está en su forma integral dado por la convolución del núcleo del calor con la condición inicial

$$u(t,x) = S(t)u_0 = (4\pi t)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy \tag{7}$$

de este hecho se prueba que el semigrupo $\left\{S(t) := e^{\Delta t}\right\}_{t\geq 0}$ preserva orden en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$.

En efecto, sea $u_0 \geq 0$, con $u_0 \in L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ entonces por el lema 4.1 existe una sucesión $u_{0n} \in L^q(\mathbb{R}^N) \cap L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ con $u_{0n} \geq 0$ tal que $u_{0n} \to u_0$ en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$.

Por la continuidad del semigrupo $\left\{S(t) := e^{\Delta t}\right\}_{t\geq 0}$ tenemos que $S(t)u_{0n} \to S(t)u_0$ en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$. Por la forma integral de la solución de (6), $S(t)u_{0n}(x) = (4\pi t)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_{0n}(y)dy$ se sigue que $S(t)u_{0n} \geq 0$, por lo cual se concluye que $S(t)u_0 \geq 0$, $\forall t \geq 0$.
La proposición anterior es un caso particular del Teorema 5.1 en [3].

4. Operadores de Schrödinger en Espacios con Peso

Por su importancia en las aplicaciones se estudiará el comportamiento de los operadores de Schrödinger en espacios con peso.

Supongamos que $\rho \in R_{\rho_1,\rho_2}$. Aquí se expone los resultados para la solución de la ecuación parabólica lineal

$$\left\{\begin{array}{ccc} \partial_t u - \Delta u & = & V(x)\,u, x \in \mathbb{R}^N\,,\, t > 0 \\ u(0) & = & u_0 \in L^q_\rho(\mathbb{R}^N) \end{array}\right. \tag{8}$$

A continuación se introduce un espacio de potenciales, denominados espacios localmente uniformes y denotados por $L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq \sigma \leq \infty$ definido como

$$L^\sigma_U(\mathbb{R}^N) := \left\{\phi \in L^\sigma_{loc}(\mathbb{R}^N) : \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{B(x,1)} |\phi(y)|^\sigma dy < \infty\right\}$$

con norma

$$||\phi||_{L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} ||\phi||_{L^\sigma(B(x,1))}.$$

Enfocaremos nuestra atención en el operador $-\Delta - V(x)I$, donde V es un potencial en $L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)$, $\sigma > \frac{N}{2}$, $\sigma \geq 1$, permitiendo así usar potenciales con singularidades locales y que no decaen en el infinito.

Se probará que para $q < \sigma$, el operador de Schrödinger $-\Delta u - V(x)u$ es tal que $\Delta + V(x)I$ genera un semigrupo analítico en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$. En la prueba, trataremos al operador de Schrödinger como una perturbación del operador de Laplace.

Teorema 4.1 *Si $V \in L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)$ con $\sigma > \frac{N}{2}$, $\sigma \geq 1$ entonces $\Delta + V(x)I$, con dominio $W^{2,q}_\rho(\mathbb{R}^N)$ genera un semigrupo analítico, $S_V(t) = e^{(\Delta+V(x)I)t}$, que preserva el orden en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ para cada $1 \leq q < \sigma$ y tiene los mismos espacios de potencias fraccionarias del $-\Delta$.*

Demostración:
De la Proposición 3.1 se tiene que $-\Delta$ con dominio $W^{2,q}_\rho(\mathbb{R}^N)$, es tal que, Δ genera un semigrupo analítico $S_V(t) := e^{(\Delta+V(x)I)t}$, que preserva orden en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ para cada $1 \leq q < \infty$.

Denotamos por P el operador de perturbación lineal, definido de la siguiente manera,

$$\begin{array}{rcl} P : L^r_\rho(\mathbb{R}^N) & \to & L^q_\rho(\mathbb{R}^N) \\ u & \mapsto & P(u)(x) = -V(x).u(x) \end{array}$$

Se probará que P es acotado si $\dfrac{1}{\sigma}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}$ y $1\leq q<\sigma$.

Para ello, primero se descompone $\mathbb{R}^N$ en cubos de la siguiente forma: para cada $i\in\mathbb{Z}^N$, denotamos por Q_i al cubo abierto en $\mathbb{R}^N$ centrado en i, con lados de longitud 1 y paralelos a los ejes. Entonces $Q_i\cap Q_j=\emptyset$ para $i\neq j$ y $\mathbb{R}^N=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}^N}\overline{Q_i}$.

Aplicamos la desigualdad de Holder

$$\begin{aligned}
||Vu||^q_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N}|V(x)|^q\,|u(x)|^q\,\rho(x)dx\\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}^N}\int_{Q_i}\left(|V(x)|^q\right)^{\theta'}\left(|u(x)|^q\rho(x)\right)^{\theta}dx\\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{Z}^N}\left[\int_{Q_i}|V(x)^{q\theta'}\,|dx\right]^{1/\theta'}\left[\int_{Q_i}|u(x)|^{q\theta}\,[\rho(x)]^{\theta}dx\right]^{1/\theta}
\end{aligned}$$

donde $\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{\theta'}=1$, haciendo $\sigma=q\theta'$ y $r=q\theta$ se obtienen $\theta'=\frac{\sigma}{q}$ y $\theta=\frac{r}{q}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}^N}\left[\int_{Q_i}|V(x)|^{\sigma}dx\right]^{q/\sigma}\left[\int_{Q_i}|u(x)|^{r}\,\rho^{r/q}(x)dx\right]^{q/r}\\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}^N}||V||^q_{L^\sigma(Q_i)}\,||u\,\rho^{1/q}||^q_{L^r(Q_i)}\,,\ \text{con}\ \frac{1}{\sigma}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q} \qquad (9)
\end{aligned}$$

lo cual es posible desde que $1\leq q<\sigma$.

Por las inclusiones de Sobolev

$$W^{2,q}(Q_i)\hookrightarrow L^s(Q_i)\,,\ \text{con } s \text{ tal que } \frac{2}{N}-\frac{1}{q}=-\frac{1}{s}$$

y con constantes independientes de i.

Como $\frac{1}{q}=\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{r}$, considerando la hipotesis $\sigma>\frac{N}{2}$ conseguimos $q<r<s$.

Por interpolación con $\frac{1}{r}=\theta\frac{1}{q}+(1-\theta)\frac{1}{s}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
||u\,\rho^{1/q}||^q_{L^r(Q_i)} &\leq ||u\,\rho^{1/q}||^{q(1-\theta)}_{L^s(Q_i)}\,||u\ \rho^{1/q}||^{q\theta}_{L^q(Q_i)}\\
&\leq ||u\,\rho^{1/q}||^{(1-\theta)q}_{W^{2,q}(Q_i)}\,||u\,\rho^{1/q}||^{q\theta}_{L^q(Q_i)}
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young se obtiene

$$||u\,\rho^{1/q}||^q_{L^r(Q_i)}\leq\epsilon||u\,\rho^{1/q}||^q_{W^{2,q}_{(Q_i)}}+C_\epsilon\,||u\,\rho^{1/q}||^q_{L^q(Q_i)}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
||Pu||^q_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)} &\leq \sum_{i\in\mathbb{Z}^N}||V||^q_{L^\sigma(Q_i)}\,||u\,\rho^{1/q}||^q_{L^r(Q_i)}\\
&\leq ||V||^q_{L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)}\cdot\sum_{i\in\mathbb{Z}^N}\left[\epsilon||u\,\rho^{1/q}||^q_{W^{2,q}(Q_i)}+C_\epsilon||u\,\rho^{1/q}||^q_{L^q(Q_i)}\right]\\
&\leq ||V||^q_{L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)}\cdot\left[\epsilon||u\,\rho^{1/q}||^q_{W^{2,q}(\mathbb{R}^N)}+C_\epsilon||u\,\rho^{1/q}||^q_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right]
\end{aligned}$$

Renombrando los coeficientes se llega a la desigualdad

$$||Vu||^q_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)}\ \leq\ \epsilon||u||^q_{W^{2,q}_\rho(\mathbb{R}^N)}+C_\epsilon\,||u||^q_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)}$$

Por un teorema de perturbación, ver [2], Teorema 1.3.2 , se tiene que $\Delta + V(x)I$ genera un semigrupo analítico en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$.

Ahora se probará que el operador $-\Delta - V(x)I$ tiene los mismos espacios de potencias fraccionarias del $-\Delta$, para ello, según el Teorema 1.4.8 en [2] sera suficiente probar que

$$||Vu||_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)} \leq C\,||u||_{H^{2\alpha,q}_\rho(\mathbb{R}^N)}, \text{para algún } 0 \leq \alpha < 1.$$

Acotaremos por arriba la desigualdad (9), la cual es

$$||Vu||^q_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)} \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}^N} ||V||^q_{L^\sigma(Q_i)} ||u\,\rho^{1/q}||^q_{L^r(Q_i)}\ ,\ \text{con } \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$$

y para ello usaremos las siguientes inclusiones

$$H^{2\alpha,q}(Q_i) \hookrightarrow L^r(Q_i)\,,\ \text{para } 2\alpha - \frac{N}{q} \geq -\frac{N}{r}\ ,\ 0 \leq \alpha < 1$$

con constantes independientes de i.

Usando la relación que cumplen σ, r y q dados en (9) se tiene que $2\alpha \geq \frac{N}{\sigma}$, lo cual es posible para cierto $0 \leq \alpha < 1$ ya que $\sigma > \frac{N}{2}$. De aquí conseguimos

$$||Vu||^q_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)} \leq C||V||^q_{L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)} \sum_{i\in\mathbb{Z}^N} ||u\rho^{1/q}||^q_{H^{2\alpha,q}(Q_i)} \leq C||V||^q_{L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)} ||u\rho^{1/q}||^q_{H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)}$$

donde la última desigualdad se debe al lema 4.2 enunciado más abajo.
Análogamente a la observación 2.2 para espacios de Sobolev con peso, las normas $||u||_{H^{2\alpha,q}_\rho(\mathbb{R}^N)}$ y $||u\rho^{1/q}||_{H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)}$ son equivalentes, concluimos que

$$||Vu||_{L^q_\rho(\mathbb{R}^N)} \leq C||V||^q_{L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)} ||u||_{H^{2\alpha,q}_\rho(\mathbb{R}^N)}$$

para cierto $0 < \alpha < 1$.

Finalmente, se prueba que el semigrupo analítico generado por el operador $\Delta + V(x)I$ con $V \in L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)$, con $\sigma > 1$, $\sigma > \frac{N}{2}$ preserva orden en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq q < \sigma$.
En efecto, esto se logra usando un argumento de densidad, pero antes mencionamos que el semigrupo generado por $\Delta + V(x)I$, con V como antes, preserva orden en $L^q(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq q \leq \infty$, para mayores detalles ver [4] . Sea $f \geq 0$, con $f \in L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ entonces existe una sucesión $f_n \in L^q(\mathbb{R}^N) \cap L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$, con $f_n \geq 0$ como en el lema 4.1 tal que $f_n \to f$ en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$. Entonces por la continuidad del semigrupo $S(t)f_n \to S(t)f$ en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ y como $S(t)f_n \geq 0$, concluimos que $S(t)f \geq 0$, para cada $t \geq 0$.
Los resultados aquí, son un caso particular del Teorema 5.2 en [3].

Lema 4.1 $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^p_\rho(\mathbb{R}^N)$ *es denso en* $L^p_\rho(\mathbb{R}^N)$, *para* $1 \leq p < \infty$.

Demostración:
Se probará que dada $f \in L^p_\rho(\mathbb{R}^N)$ existe una sucesión $\{f_n\} \subset L^p_\rho(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$, tal que $f_n \to f$ en $L^p_\rho(\mathbb{R}^N)$.

Consideremos la sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in B(0,n) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin B(0,n) \end{cases} .$$

Veamos primero que la sucesión $f_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p\,dx &= \int_{B(0,n)} |f(x)|^p dx \\ &\leq \frac{1}{\min_{x\in B(0,n)} \rho(x)} \int_{B(0,n)} |f(x)|^p\,\rho(x)dx \\ &< \infty \end{aligned}$$

Ahora veamos que $f_n \to f$ en $L^p_\rho(\mathbb{R}^N)$.
En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)|^p \rho(x)dx = \int_{|x|>n} |f(x)|^p \rho(x)dx \to 0 \text{ , puesto que } f \in L^p_\rho(\mathbb{R}^N).$$

Lema 4.2 *Sea el cubrimiento de* $\mathbb{R}^N$ *por los cubos* $\{Q_i\}$ *del Teorema 4.1. Entonces como*

$$\sum_i ||\Phi_i||^q_{L^q(Q_i)} \leq C||\Phi||^q_{L^q(\mathbb{R}^N)}, \text{ para cada } \Phi \in L^q(\mathbb{R}^N)\,.$$

y

$$\sum_i ||\Phi||^q_{H^{2,q}(Q_i)} \leq C||\Phi||^q_{H^{2,q}(R^N)}, \text{ para cada } \Phi \in H^{2,q}(\mathbb{R}^N)\,.$$

Se tiene que, para cada $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$\sum_i ||\Phi||^q_{H^{2\alpha,q}(Q_i)} \leq C||\Phi||^q_{H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)} \text{ , para todo } \Phi \in H^{2\alpha,q}(\mathbb{R}^N)\,.$$

5. Conclusiones

- Un primer resultado que se enuncia en la Proposición 3.1, de la sección 3, es el siguiente. Sea $\rho \in R_{\rho_1,\rho_2}$. El operador lineal no acotado $-\Delta$ en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ con dominio $W^{2,q}_\rho(\mathbb{R}^N)$, es tal que, Δ genera un semigrupo analítico $\left\{S(t) := e^{\Delta t}\right\}_{t\geq 0}$ que preserva el orden en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$, para $1 < q < +\infty$. Por tanto, la ecuación (1) tiene una única solución $u(t) := e^{\Delta t}u_0$ para $t \geq 0$.

- Un resultado en la sección 4, que se enuncia en el Teorema 4.1 es el siguiente. Para cada $1 \leq q < \sigma$, con potenciales $V \in L^\sigma_U(\mathbb{R}^N)$, con $\sigma > \frac{N}{2}$, $\sigma \geq 1$, entonces $\Delta + V(x)I$ con dominio $W^{2,q}_\rho(\mathbb{R}^N)$ genera un semigrupo analítico, $S_V(t) := e^{(\Delta+V(x)I)t}$, que preserva orden en $L^q_\rho(\mathbb{R}^N)$ para cada $1 \leq q < \sigma$ y mantiene invariante la escala de espacios del $-\Delta$.

- Los resultados obtenidos en el Lema 3.1, Proposición 3.1 y Teorema 4.1 son un caso particular del Lema 5.1, Teorema 5.1 y el Teorema 5.2 de [3].

Referencias Bibliográficas

[1] Amann H., Hieber M. & Simonett G. (1994). Boundet H_∞ Calculus for Elliptic Operators. Differential and Integral Equations, Volume 7, Number 3, May pp 613-653 .

[2] Henry D. (1981) Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Lecture Notes Math, Vol 840, Springer, Berlin.

[3] Rodriguez-Bernal, A. Arrieta, J.M. Cholewa, Jan W. Dlotko (2004) Linear Parabolic Equations in Locally Uniform Spaces. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol 14, ($N°$ 2), 253-293.

[4] Simon B. (1982) Schrödinger Semigroups. American Mathematical Society, Vol 7, $n°$3 pp 447-526.