PESQUIMAT 27(2): 51–63 (2024) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v27.i2.28179 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Maximalidad Proyectiva sobre Extensiones H-cerradas de un espacio de Hausdorff

Sandra Serrato Vargas [1] y ***Bartleby Ordoñez Delgado*** [2]

Resumen: Este artículo contiene una visión moderna del estudio de las extensiones H-cerradas de un espacio de Hausdorff X. Se plantean varias preguntas: ¿Cómo se pueden construir extensiones H-cerradas? ¿Es posible comparar estas extensiones? De ser así, ¿existe una extensión maximal? Se responde afirmativamente a estas preguntas, demostrando que la extensión de Katětov es la extensión H-cerrada maximal buscada. Además, se presentan aplicaciones a la teoría de extensión de funciones y espacios HČ-completos.

Palabras clave: Espacios de Hausdorff; Filtros abiertos; Extensión de Katětov.

Projective Maximality on H-closed extensions of Hausdorff Spaces

Abstract: This article presents a modern view of the study of the H-closed extensions of a Hausdorff space X. Several questions are posed: How can H-closed extensions be constructed? Is it possible to compare these extensions? If so, does a maximal extension exist? These questions are answered affirmatively, demonstrating that the Katětov extension is the desired maximal H-closed extension. Furthermore, applications to the theory of extension of functions and HČ-complete spaces are presented.

Keywords: Hausdorff Spaces; Open Filters; Katětov Extension.

Recibido: 14/07/2024 *Aceptado:* 14/09/2024 *Publicado online:* 30/12/2024

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: sandra.serrato@unmsm.edu.pe
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: bordonezd@unmsm.edu.pe

1. Introducción

En [1], el término “ extensión de un espacio” implica crear un nuevo espacio a partir de uno existente de manera que incluya al espacio original como un subespacio denso. Una razón importante para estudiar estas construcciones de extensiones es la capacidad de transformar un problema planteado en el espacio original a su extensión, lo que a menudo facilita la resolución del problema.
Katětov mostró un resultado muy importante: Dado un espacio de Hausdorff X, se puede encontrar un espacio H-cerrado κX en el cual se puede sumergir densamente X. Este nuevo espacio κX es llamado extensión Katětov de X. Además, Katětov construyó κX añadiéndole a X la clase de todos los ultrafiltros abiertos libres (no convergentes) y así definió una base para la topología de este nuevo espacio κX.

Inspirados en los resultados presentados en [1], [3] y [4], surgen varias cuestiones importantes: la posibilidad de realizar la construcción explícita de la extensión de Katětov sobre el espacio de los números reales con su topología usual, utilizando filtros; los métodos para construir extensiones H-cerradas en espacios de Tychonoff y, en general, en espacios de Hausdorff; las propiedades que posee la extensión de Katětov de un espacio de Hausdorff; y las aplicaciones prácticas de la extensión de Katětov. Este artículo amplía la comprensión de las extensiones H-cerradas específicamente en espacios de Tychonoff y Hausdorff, lo cual se relaciona directamente con estudios realizados por Katětov en [2].

En este artículo presentaremos los principales conceptos de teoría de filtros ya que el nuevo espacio κX se forma mediante la unión de X y la clase de ultrafiltros abiertos libres. El procedimiento de compactificación proporciona extensiones H-cerradas, con la condición de que el espacio sea Tychonoff. Sin embargo, para construir una extensión H-cerrada para cualquier espacio de Hausdorff, se recurrirá a las extensiones de Katětov. La construcción de las extensiones de Katětov se basará en la teoría de filtros, el mérito que se tiene en el presente artículo es que podemos tener explícitamente un ejemplo de un ultrafiltro abierto libre sobre $\mathbb{R}$ (en la Proposición 3.3) y con ello generalizar la idea para un ultrafiltro abierto libre sobre cualquier espacio Hausdorff. Al final se presentarán aplicaciones que aprovecharán directamente esta construcción en espacios de Hausdorff.

2. Teoría de Filtros

Se recordará la teoría de filtros, dado que resultará beneficiosa para la construcción de la extensión de Katětov. Específicamente, se utilizará para describir los espacios H-cerrados.

Definición 2.1 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{T}$ es un* ***$\mathcal{T}$-filtro o filtro abierto*** *si se satisface:*

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$
2. *Si F_1, $F_2 \in \mathfrak{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$.*
3. *Si $F_1 \in \mathfrak{F}$ y $F_2 \in \mathcal{T}$ con $F_1 \subseteq F_2$, entonces $F_2 \in \mathfrak{F}$,*

Nota 2.2 *Denotaremos por $\mathcal{T}_X$ a la topología sobre X. Si no hay ambigüedad sobre el espacio, simplemente escribiremos $\mathcal{T}$.*

Ejemplo 2.3 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. Luego $\mathcal{T}(x) = \{U \in \mathcal{T} \colon U$ es vecindad abierta de $x\}$ es un filtro abierto sobre X. $\mathcal{T}(x)$ es llamado el* ***filtro de vecindades abiertas de x.***
Demostración. Se satisfacen las siguientes condiciones:

1. *$\emptyset \notin \mathcal{T}(x)$, ya que $\emptyset$ no es vecindad abierta de $x \in X$.*

2. *Sean U_1, $U_2 \in \mathcal{T}(x)$, entonces tanto U_1 como U_2 son vecindades abiertas de x. Luego, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}(x)$.*

3. *Sea $U \in \mathcal{T}(x)$ y $V \in \mathcal{T}$ con $U \subset V$, claramente se concluye que $V \in \mathcal{T}(x)$.*

Por lo tanto, $\mathcal{T}(x)$ es un filtro abierto sobre X. □

Ahora, se presenta la noción de filtro fino, la cual será útil para realizar comparaciones entre los $\mathcal{T}$-filtros de manera similar a como se llevaba a cabo con las topologías sobre un conjunto.

Definición 2.4 *Sean $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ $\mathcal{T}$-filtros (o simplemente filtros) sobre un espacio X. Diremos que $\mathfrak{G}$ es* ***más fino*** *(ó equivalentemente* ***menos grueso****) que $\mathfrak{F}$, si $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$.*

En el ámbito de la topología, los filtros son herramientas fundamentales para comprender la convergencia y la continuidad en un espacio topológico. A continuación se representará a la colección de puntos en X que estén "cerca" de los elementos del filtro abierto.

Definición 2.5 *Sea $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{T}$-filtro en el espacio X y $cl_X(F)$ denota cerradura de F en X. El conjunto $\bigcap\{cl_X\ F : F\in \mathfrak{F}\}$ es llamado* ***adherencia*** *de $\mathfrak{F}$ y se denotará por $ad_X(\mathfrak{F})$. Si $ad_X(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$, se dice que $\mathfrak{F}$ es un* ***$\mathcal{T}$-filtro fijo****, caso contrario se dice que es un* ***$\mathcal{T}$-filtro libre****.*

A continuación, se presenta la definición de convergencia de filtros abiertos ya que es importante para estudiar y entender las propiedades topológicas de un espacio.

Definición 2.6 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{T}$ un filtro abierto en X con $x \in X$. Se dice que $\mathfrak{F}$* ***converge*** *a x, denotado por $\mathfrak{F} \to x$, si $\mathcal{T}(x) \subseteq \mathfrak{F}$. Al conjunto de puntos tal que $\mathfrak{F}$ converge, se denotaremos con $c(\mathfrak{F})$. Se tiene $c(\mathfrak{F}) \subseteq ad(\mathfrak{F})$.*

Nota 2.7 *En el caso $\mathfrak{F}$ fuese un ultrafiltro, se tiene que $c(\mathfrak{F}) = ad(\mathfrak{F})$.*

Se presentará la definición de ultrafiltro abierto y se demostrarán algunos resultados que serán de utilidad en el desarrollo del artículo.

Definición 2.8 *Se dice que $\mathcal{U}$ es un* ***$\mathcal{T}$-ultrafiltro*** *(o* ***ultrafiltro abierto****) si es un filtro abierto maximal con respecto a la inclusión. Es decir, no existe un filtro abierto más fino que él. Denotaremos con $\mathcal{U}(X)$ al conjunto de todos los ultrafiltros abiertos sobre X.*

Según la Proposición 2.9 se tiene que todo $\mathcal{T}$-filtro se puede extender a un $\mathcal{T}$-ultrafiltro.

Proposición 2.9 (Tarski) *Todo $\mathcal{T}$-filtro sobre un conjunto puede extenderse a un $\mathcal{T}$-ultrafiltro.*
Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{T}$-filtro y $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ representa el conjunto de todos los $\mathcal{T}$-filtros que contienen a $\mathfrak{F}$, parcialmente ordenado por la relación de inclusión $(\subseteq)$.
Afirmación*: Si $\mathcal{C}$ es una cadena (o conjunto totalmente ordenado) de $\mathcal{T}$-filtros respecto a la inclusión, entonces $\bigcup\mathcal{C}$ es $\mathcal{T}$-filtro. En efecto, se satisfacen*

1. *$\emptyset \notin \bigcup\mathcal{C}$, pues $\mathcal{C}$ es una cadena de $\mathcal{T}$-filtros.*

2. *Desde que $\mathcal{C}$ es una cadena, entonces para cualesquiera $A, B \in \bigcup\mathcal{C}$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que A, $B \in C$. Como C es filtro, entonces $A \cap B \in C$ y por tanto $A \cap B \in \bigcup\mathcal{C}$.*

3. *Sean $A \in \bigcup\mathcal{C}$ y $A \subseteq B \in \mathcal{T}$. Por verificar que $B \in \bigcup\mathcal{C}$.*
   Como $A \in \bigcup\mathcal{C}$, entonces $\exists C \in \mathcal{C}$ tal que $A \in C$ y como $A \subseteq B \in \mathcal{T}$, como C es filtro, se tiene que $B \in C$. Así, $B \in \bigcup\mathcal{C}$.
   Por lo tanto, $\bigcup\mathcal{C}$ es un $\mathcal{T}$-filtro.

Si $\mathcal{C}$ es una cadena en $(\mathfrak{F}, \subseteq)$, entonces $\bigcup\mathcal{C}$ es un filtro que contiene a $\mathfrak{F}$ y es una cota superior para $\mathcal{C}$, por el ***Lema de Zorn*** *existe un elemento maximal $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}$, entonces $\mathcal{U}$ es ultrafiltro abierto.* □

Se deja para el lector realizar a detalle la demostración de las siguientes proposiciones. Estas serán de mucha utilidad para probar los principales resultados de este artículo.

Proposición 2.10 *Sea* $\mathcal{U}$ *es un ultrafiltro abierto sobre* $(X, \mathcal{T})$. *Si* U *es un subconjunto abierto de* X, *se tiene:* $\{U \cap V \neq \emptyset$ *para todo* $V \in \mathcal{U} \iff U \in \mathcal{U}\}$.
Demostración. $\Rightarrow$) *Fijado* $V \in \mathcal{U}$, *se define un ultrafiltro abierto* $\mathfrak{F}_V = \{G : U \cap V \subset G\}$. *Seguidamente, se tiene que* $\bigcup\limits_{V \in \mathcal{U}} \mathfrak{F}_V$ *es un filtro abierto. Además se tiene que* $\bigcup\limits_{V \in \mathcal{U}} \mathfrak{F}_V = \mathcal{U}$. *Así, para cada* $V \in \mathcal{U}$, *entonces* $U \cap V \in \mathcal{U}$. *Por lo tanto,* $U \in \mathcal{U}$.
$\Leftarrow$) *Sean* U, $V \in \mathcal{U}$, *entonces* $U \cap V \in \mathcal{U}$. *Como* $\emptyset \notin \mathcal{U}$, *entonces* $U \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Corolario 2.11 *Sea* $\mathcal{U}$ *es un ultrafiltro abierto sobre* $(X, \mathcal{T})$. *Si* U_1, U_2 *son subconjuntos abiertos de* X *y* $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$, *entonces* $U_1 \in \mathcal{U}$ *o* $U_2 \in \mathcal{U}$.
Demostración. La prueba es inmediata usando la Proposición 2.10. $\square$

Proposición 2.12 *Sean* X, Y *espacios topológicos tales que* X *es un subconjunto abierto de* Y *y* $cl_Y(X) = Y$. *Si* $\mathcal{U}$ *es un ultrafiltro abierto sobre* X, *entonces* $\mathfrak{G} := \{\ G\text{: } G$ *abierto en* Y *y* $G \cap X \in \mathcal{U}\}$ *es ultrafiltro abierto sobre* Y. *Además,* $\mathcal{U} \to t$ *si y solo si* $\mathfrak{G} \to t$.
Demostración. Se verifica que $\mathfrak{G}$ *es un filtro abierto sobre* Y. *Luego, si se supone que* $\mathfrak{G}$ *es un ultrafiltro abierto, entonces se tiene* $\mathfrak{G} = \mathcal{U}$.
Además, si $\mathcal{U} \to t$ *en* X, *luego toda vecindad abierta* U *de* t *está contenida en* $\mathcal{U}$. *Como* $\mathcal{U} \subset \mathfrak{G}$, *entonces por la Proposición 2.10 se tiene que* $\mathfrak{G} \to t$.
Recíprocamente, si $\mathfrak{G} \to t$, *luego todo subconjunto abierto* U *que contiene* t *en* Y *está contenido en* $\mathfrak{G}$. *Desde que* X *es denso y abierto en* Y, *para cualquier* $U \in \mathfrak{G}$ *se tiene que* $U \cap X \in \mathcal{U}$. *Por lo tanto,* $\mathcal{U} \to t$. $\square$

Proposición 2.13 *Sean* X *e* Y *espacios topológicos tal que* X *es abierto en* Y *y* $cl_Y(X) = Y$. *Si* $\mathfrak{G}$ *es ultrafiltro abierto sobre* Y, *entonces* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \cap X = \{G \cap X : G \in \mathfrak{G}\}$ *es un ultrafiltro abierto sobre* X. *Además,* $\mathfrak{F} \to t$ *si y solo si* $\mathfrak{G} \to t$.
Demostración. Como X *es un subconjunto denso y abierto en* Y, *entonces se tiene que* $X \in \mathfrak{G}$. *Entonces,* $\mathcal{U} = \{V \in \mathfrak{G}\text{: } V \subset X\}$. *Así,* $\mathcal{U}$ *es un ultrafiltro abierto sobre* X *y* $\mathfrak{G} = \{G\text{: } G$ *es abierto en* Y, $G \cap X \in \mathcal{U}\}$. *Además, por la Proposición 2.12, se tiene que* $\mathcal{U} \to t$ *si y solo si* $\mathfrak{G} \to t$. $\square$

Proposición 2.14 *Si* $h : X \to Y$ *es una función continua de* X *sobre* Y *entonces para todo* $\mathcal{T}_Y$*-filtro* $\mathfrak{F}$, $h^{-1}(\mathfrak{F})$ *es un filtro abierto sobre* X.
Demostración. La prueba es inmediata usando teoría de conjuntos. $\square$

3. Espacios H-cerrados

Se presentará el concepto de un espacio H-cerrado, en cierta forma son una generalización de los espacios compactos pues si X es un subespacio compacto del espacio de Hausdorff Y entonces X es cerrado en Y.

Definición 3.1 *Un espacio* X *es* ***H-cerrado*** (***o absolutamente cerrado***) *si* X *es cerrado en todo espacio de Hausdorff que contiene a* X *como subespacio.*

3.1. Caracterización de los espacios H-cerrados

A continuación vamos a caracterizar a los espacios H-cerrados usando filtros. En la siguiente proposición se caracterizará a los espacios H-cerrados en términos de filtros, ya que nos permitirá comprender la estructura topológica de las extensiones H-cerradas.

Proposición 3.2 *(Porter [1]) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Hausdorff, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es H-cerrado.*

2. *Todo filtro abierto sobre X tiene adherencia no vacía.*

3. *Todo ultrafiltro abierto sobre X tiene adherencia no vacía.*

4. *Para todo recubrimiento abierto de X, existe una subfamilia finita cuya unión es densa en X.*

En lo que sigue, se escribirá $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ para referirse a la topología usual en $\mathbb{R}$.

Proposición 3.3 $\mathbb{R}$ *no es H-cerrado.*
Demostración. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ un espacio topológico y

$$\mathfrak{F} = \{U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} : \exists m \in \mathbb{Z} \text{ con }]-\infty, m[\subset U\}$$

Afirmación: *$\mathfrak{F}$ es filtro abierto libre sobre $\mathbb{R}$.*
En efecto, pues se satisfacen

1. $\mathbb{R} \in \mathfrak{F}$, $\emptyset \notin \mathfrak{F}$

2. *Si U_1 y $U_2 \in \mathfrak{F}$, entonces existen m_1, $m_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $]-\infty, m_1[\subset U_1$, $]-\infty, m_2[\subset U_2$. Luego, sea $n = \text{mín}\{m_1, m_2\}$, se tiene que $]-\infty, n[\subset U_1 \cap U_2$*

3. *Sea $U \in \mathfrak{F}$ y $V \in \mathcal{T}$ con $U \subset V$. Se tiene que $]-\infty, m[\subset U \subset V$. Así, $V \in \mathfrak{F}$. Por lo tanto, $\mathfrak{F}$ es un filtro abierto sobre $\mathbb{R}$.*

Además, desde que $]-\infty, n[\subset U$, entonces $\bigcap cl(U) \subset \bigcap]-\infty, n[= \emptyset$. Por lo tanto, $\mathfrak{F}$ es filtro abierto libre sobre $\mathbb{R}$. Así, se tiene que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ no es H-cerrado ya que existe un filtro abierto libre. □

3.2. Caracterización de los espacios compactos usando filtros

Proposición 3.4 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. X es compacto si y solo si cada ultrafiltro abierto $\mathcal{U}$ en X converge al menos a un punto.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe un ultrafiltro abierto $\mathcal{U}$ que no converge a ningún punto. Entonces, podemos elegir para cada $x \in X$ una vecindad abierta $V_x \subseteq X$ tal que $V_x \notin \mathcal{U}$. Así tenemos el recubrimiento $\{V_x\}_{x \in X}$ de X. Como X es compacto, este tiene un subrecubrimiento finito $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$. Como ninguno de los conjuntos del recubrimiento están contenidos en $\mathcal{U}$, este contiene completamente a $\{V_{x_i}^c\}_{i=1}^n$. Pero $\bigcap_{i=1}^n V_{x_i}^c = \emptyset$. Además, como los ultrafiltros abiertos son cerrados bajo intersecciones finitas, entonces $\emptyset \in \mathcal{U}$ y esto es una contradicción. Por lo tanto, cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ converge a un punto.
($\Leftarrow$) Supongamos X no es compacto. Sea $\mathcal{C}$ un recubrimiento abierto de X sin subrecubrimiento finito. Luego $\mathcal{C}'$, la colección de complementos de los conjuntos en $\mathcal{C}$, tiene P.I.F (propiedad de intersección finita) y puede ser extendido a un ultrafiltro $\mathcal{U}$. Podemos asumir que $\mathcal{U}$ converge a algún $x \in X$. Como $\mathcal{C}$ cubre X, existe un abierto $V \in \mathcal{C}$ tal que $x \in V$. Por definición de convergencia, $V \in \mathcal{U}$. Pero $V^c \in \mathcal{C}'$ que está contenida en $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ contiene a V y a V^c y esto no es posible. Por lo tanto, X es compacto.

3.3. Espacios compactos vs espacios H-cerrados

A continuación, se analizará la relación entre los espacios compactos y los espacios H-cerrados.

Proposición 3.5 *Un espacio H-cerrado y regular es compacto.*
Demostración. Consideremos C un cubrimiento abierto de X. Para $x \in X$ existe una vecindad abierta $V_x \in C$. Como X es regular, entonces por caracterización de espacios regulares se tiene $x \in U_x$ con $cl(U_x) \subset V_x$. Por otro lado, como X es H-cerrado, entonces por la Proposición 3.2 existe una familia finita $\{U_x\colon x$ es finito$\}$ tal que $X = cl(\bigcup\{U_x\colon x$ es finito$\}) \subset \bigcup\{V_x\colon x$ es finito$\}$. Por lo tanto, X es compacto. □

Proposición 3.6 *Un espacio X de Hausdorff y compacto es H-cerrado.*
Demostración. Como X es compacto, entonces todo recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento finito. Además como X es Hausdorff, entonces dicha unión del subrecubrimiento finito es denso en X. Además por la Proposición 3.2 se tiene que X es H-cerrado. □

Proposición 3.7 *No todo espacio H-cerrado es compacto.*
Demostración. Sea $Y = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n \in \mathbb{N}, |m| \in \mathbb{N}\} \cup \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N})\} \subseteq \mathbb{R}^2$ con la topología heredada de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$. Sea $Z = Y \cup \{q^+, q^-\}$, donde $q^+, q^- \in Z \backslash Y$.
Un subconjunto U es abierto en Z si y solamente si se verifican las tres condiciones siguientes:
(1)*$U \cap Y$ es abierto en Y.*
(2) *Si $q^+ \in U$ implica que $\exists r \in \mathbb{N}$ tal que $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n \geq r, m \in \mathbb{N}\}$ contenido en U.*
(3) *Si $q^- \in V$ implica que $\exists r \in \mathbb{N}$ tal que $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n \geq r, -m \in \mathbb{N}\}$ contenido en U.*
Esto nos define una topología Hausdorff en Z.
***Afirmación 1**: Z es H-cerrado:*
Sea $\mathcal{C}$ un recubrimiento abierto de Z, luego existen subconjuntos abiertos U^+, U^- de $\mathcal{C}$ tal que $q^+ \in U^+$ y $q^- \in U^-$. Entonces, existe algún $r \in \mathbb{N}$ tal que $Z \backslash cl_Z(U^+ \cup U^-) \subset \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n \leq r, |m| \in \mathbb{N}\} \cup \{(\frac{1}{n}, 0) : n \leq r\} = D$. Pero D es compacto, entonces $Z = cl_Z(U^+ \cup U^-) \cup (\bigcup \mathcal{C}) = cl_Z$ $[U^+ \cup U^- \cup (\bigcup \mathcal{C})]$. Por lo tanto, Z es H-cerrado.
***Afirmación** 2: Z no es compacto*
Se sabe que $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N})\}$ es cerrado, discreto e infinito en Z.
Por lo tanto, Z no es compacto. □

Proposición 3.8 *Si $(X, \mathcal{T})$ es H-cerrado y $U \in \mathcal{T}$, entonces $cl_X(U)$ es H-cerrado.*
Demostración. Ver la Proposición 1.5.4 en [5]. □

Proposición 3.9 *Un espacio es compacto y Hausdorff si y solo si este es H-cerrado, semiregular, y Urysohn.*
Demostración. $\Rightarrow$) Sea X un espacio de Hausdorff y compacto, entonces X es H-cerrado. Además, X es regular, en particular X es semiregular. Sean p, $q \in X$ con $p \neq q$ entonces se tiene que $X \backslash \{q\}$ es una vecindad abierta de p y como X es regular, entonces existe una vecindad abierta W de p tal que $W \subset cl(W) \subset X \backslash \{q\}$. Análogamente para $X \backslash cl(W)$ (vecindad abierta de q) se tiene que existe una vecindad abierta U de q tal que $U \subset cl(U) \subset X \backslash cl(W)$. Así, $cl(W) \cap cl(U) = \emptyset$. Por lo tanto, X es Urysohn.
$\Leftarrow$) Considere X un espacio de H-cerrado, Urysohn y semiregular. Por la Proposición 3.5 para mostrar que X es de Hausdorff y compacto es suficiente con verificar que X es regular. Consideremos un D cerrado en X y $p \in D^c$. Como X es semiregular, entonces existe un abierto regular U con $p \in U \subset D^c$. Sea $V = X \backslash cl(U)$, entonces X es regular. □

A continuación se dará un ejemplo en el cual se tiene un espacio que no es compacto y por tanto, haciendo uso de la proposición 3.9 dicho espacio no es Urysohn.

Ejemplo 3.10 *El espacio Z como se definió en la Proposición 3.7, no es Urysohn, pues Z es semiregular*
Es claro que $Z\backslash\{q^+, q^-\}$ es un abierto en Z que es semiregular. Sea U^+ un abierto básico de q^+ en Z. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que U^+ es de la forma $U^+ = \{q^+\} \cup \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n \geq r$, y $m, n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $cl_Z(U^+) = U^+ \cup \{(\frac{1}{n}, 0) : n \geq r, n \in \mathbb{N}\}$. Como $\{(\frac{1}{n}, 0) : n \geq r, n \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio cerrado y nunca denso de Z, entonces $int_Z[cl_Z(U^+)] = U^+$.

En lo que sigue del presente artículo, escribiremos X_s para referirnos a un espacio semiregular X.

Proposición 3.11 *$(X, \mathcal{T})$ es H-cerrado si y solo si X_s es H-cerrado.*
Demostración. Ver la Proposición 1.5.4 en [5]. □

4. Extensiones H-cerradas

En esta sección se estudiarán las extensiones H-cerradas y se planteará una pregunta crucial que será desarrollada en este artículo para un caso particular, dejando al lector la tarea de realizar la prueba del caso general.

Definición 4.1 *Se dice que Y es **extensión** de un espacio X si este es subespacio denso de Y. Denotaremos con $\mathcal{E}(X)$ a la colección de extensiones de X tal que dos elementos distintos de $\mathcal{E}(X)$ no son homeomorfos y cualquier extensión de X es homeomorfa a alguna extensión de $\mathcal{E}(X)$.*

Definición 4.2 *Dados Y_1, Y_2 en $\mathcal{E}(X)$, se dice que $Y_2 \geq Y_1$ si Y_1 es subconjunto de Y_2.*

Definición 4.3 *Sea $\emptyset \neq H \subseteq \mathcal{E}(X)$ para un espacio X. Se dice que $Y \in \mathcal{E}(X)$ es un **máximo proyectivo** en H si $Y \in H$ e $Y \geq Z$ para todo $Z \in H$. En este caso, $\geq$ recibe el nombre de **orden proyectivo**.*

Definición 4.4 *Sea un espacio X, denotaremos con $\mathcal{E}_C(X) = \{Y \in \mathcal{E}(X) : Y$ es compacto$\}$ al conjunto de las **extensiones compactas** (**compactificaciones**) de X.*

Proposición 4.5 *$\mathcal{E}_C(X) \neq \emptyset$ si y solo si X es Tychonoff.*
Demostración. ($\Rightarrow$) Como $\mathcal{E}_C(X) \neq \emptyset$, entonces existe una extensión compacta Y. Luego X es compacto y Hausdorff. Entonces, X es normal y así se tiene que X es Tychonoff.
($\Leftarrow$) Como X es Tychonoff, entonces X es compacto. Por lo tanto, $\mathcal{E}_C(X) \neq \emptyset$. □

Definición 4.6 *Sea un espacio X, denotaremos con $\mathcal{E}_H(X) = \{Y \in \mathcal{E}(X) : Y$ es H-cerrado$\}$ al conjunto de las **extensiones H-cerradas** de X.*

Ejemplo 4.7 *El espacio Z definido en la Proposición 3.7 es una extensión H-cerrada de $\mathbb{N}$, ya que $\mathbb{N}$ se puede identificar con el subespacio $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n \in \mathbb{N}, |m| \in \mathbb{N}\} \subseteq Z$ el cual es un subespacio denso en Z.*

El siguiente Lema nos será útil para probar que el Teorema 4.9.

Lema 4.8 *Sea X un espacio. Entonces X_s es compacto si y solo si H-cerrado y Urysohn.*
Demostración. La prueba es inmediata usando la Proposición 3.9. □

El siguiente teorema nos muestra la forma de conseguir compactificaciones a partir de extensiones H-cerradas.

Teorema 4.9 *Sea X un espacio. Sea Y una extensión H-cerrada y Urysohn de X. Entonces se tiene que Y_s es una compactificación de X_s.*
Demostración. Por el Lema 4.8, el espacio Y_s es compacto y así se tiene que Y_s es una compactificación de X_s. □

Ahora, se responderá a la siguiente interrogante: **¿Cómo se puede construir extensiones H-cerradas?**. El procedimiento de compactificación nos da extensiones H-cerradas siempre que el espacio X sea Tychonoff. Pero, **¿cómo se puede construir una extensión H-cerrada para cualquier espacio de Hausdorff?**. Se realiza utilizando la extensión de Katětov. A continuación, se estudiará la extensión $\kappa\mathbb{R}$ (extensión de Katětov de $\mathbb{R}$) y quedará para el lector generalizar la idea para cualquier espacio Hausdorff X.

5. La extensión de Katětov de $\mathbb{R}$

En esta sección mostraremos los pasos a seguir para construir la extensión de Katětov del espacio euclideano denotado por $\kappa\mathbb{R}$.
En el siguiente lema se verificará que existe un ultrafiltro abierto libre sobre $\mathbb{R}$.

Lema 5.1 (***Paso*** 1) *Existe un ultrafiltro abierto libre sobre $\mathbb{R}$.*
Demostración. Por la Proposición 3.3 existe un filtro abierto libre sobre $\mathbb{R}$. Por el Lema de Zorn, existe un ultrafiltro abierto libre sobre $\mathbb{R}$. □

Por el Lema 5.1, tiene sentido dar la siguiente definición.

Definición 5.2 *Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ un espacio topológico Hausdorff y*

$$\mathbb{R}_\infty = \{\mathfrak{F} \subset \mathcal{T} : \mathfrak{F} \text{ es un ultrafiltro abierto libre sobre } \mathbb{R}\}$$

Definimos el conjunto $\kappa\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_\infty$ unión disjunta cuya topología está generada por subconjuntos abiertos de la forma como indica la colección $\mathcal{B}$, donde

$$\mathcal{B} = \left\{ V \cup \{\mathfrak{F} : V \in \mathfrak{F} \in \mathbb{R}_\infty\}, U : U \text{es abierto en } \mathbb{R} \right\}$$

Lema 5.3 (***Paso*** 2) *La colección $\mathcal{B}$ mencionada en la Definición5.2 es una base para la topología sobre $\kappa\mathbb{R}$.*
Demostración. La colección $\mathcal{B}$ es una base para la topología sobre $\kappa\mathbb{R}$ mostrando que se satisfacen:

1. *Sea $x \in \kappa\mathbb{R}$, entonces hay 2 posibilidades:*
   Caso 1: *Si $x \in \mathbb{R}$, como $\mathbb{R}$ es un elemento de la base, entonces $x \in \mathbb{R} \in \mathcal{B}$.*
   Caso 2: *Si $x \in \mathbb{R}_\infty$, entonces $x = \mathcal{U}$(ultrafiltro abierto libre sobre $\mathbb{R}$) y así $x \in \{\mathcal{U}\} \cup V$, con $V \in \mathcal{U}$*

2. *Sean U, $V \in \mathcal{B}$, hay 2 posibilidades:*
   Caso 1: *Si $U = \{\mathcal{U}\} \cup G_1$ y $V = \{\mathcal{U}\} \cup G_2$ con $G_1, G_2 \in \mathcal{U}$.*
   Entonces $U \cap V = \{\mathcal{U}\} \cup (G_1 \cap G_2) \in \mathcal{B}$
   Caso 2: *Si $U = \{\mathcal{U}_1\} \cup G_1$ y $V = \{\mathcal{U}_2\} \cup G_2$ con $G_1 \in \mathcal{U}_1, G_2 \in \mathcal{U}_2$.*
   Entonces $U \cap V = G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$. □

Lema 5.4 (***Paso*** 3) *$\kappa\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff.*
Demostración. Consideraremos 3 casos:

- ***Caso 1***: *Sean $x \neq y \in \mathbb{R}$, entonces existen vecindades U_x, $U_y \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ tal que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Así, $\kappa\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff.*

- ***<u>Caso 2</u>**: Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_\infty$, es decir $x \in \mathbb{R}$ e $y = \mathcal{U}$. Sea U_x abierto y $U_x \notin \mathcal{U}$. Supongamos $U_x \cap V \neq \emptyset$, $\forall\, V \in \mathcal{U}$. Así $M' = \mathcal{U} \cup \{U_x \cap V : V \in \mathcal{U}\}$ es un ultrafiltro abierto libre sobre $\mathbb{R}$. Esto es una contradicción, ya que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro abierto libre sobre $\mathbb{R}$. Así, $\kappa\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff.*

- ***<u>Caso 3</u>**: Sean $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{R}_\infty$. Como $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, entonces existe $U_1 \in \mathcal{U}_1$ tal que $U_1 \notin \mathcal{U}_2$. Desde que $U_1 \notin \mathcal{U}_2$, entonces existe $U_2 \in \mathcal{U}_2$ tal que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Así, $\kappa\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff.* □

Lema 5.5 (***Paso*** 4) *$\kappa\mathbb{R}$ es un espacio H-cerrado.*
Demostración. Es suficiente con mostrar que todo ultrafiltro abierto sobre converge $\kappa\mathbb{R}$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro abierto sobre $\kappa\mathbb{R}$ mostraremos que $\mathcal{U}$ converge. Como $\mathbb{R}$ es un subconjunto abierto denso de $\kappa\mathbb{R}$ definimos un ultrafiltro abierto sobre $\mathbb{R}$ por $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathbb{R} = \{F \cap \mathbb{R} : F \in \mathcal{U}\}$ y lo podemos reescribir como $\mathcal{V} = \{F \in \mathcal{U} : F \subset \mathbb{R}\}$. Consideremos 2 posibilidades:

1. *Si $\mathcal{V}$ tiene un punto límite x en $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{U}$ tiene a x como punto límite en $\kappa\mathbb{R}$ y así $\mathcal{U} \to x$ en $\kappa\mathbb{R}$.*

2. *Si $\mathcal{V}$ no tiene un punto límite en $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{V} \in X_\infty$. Sea $V \cup \{\mathcal{V}\}$ un subconjunto abierto de $\kappa\mathbb{R}$ que contiene a $\mathcal{V}$ donde $V \in \mathcal{V}$. Como $\mathbb{R}$ es un subconjunto abierto denso de $\kappa\mathbb{R}$, entonces $V \in \mathcal{U}$. Esto muestra que $V \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{U}$. Además esto es $(V \cup \{\mathcal{V}\}) \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{U}$. Esto es, toda vecindad $V \cup \{\mathcal{V}\}$ de $\mathcal{V}$ intersecta a cada miembro F del ultrafiltro abierto $\mathcal{U}$. Esto impllica que $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$, entonces todo ultrafiltro abierto sobre $\kappa\mathbb{R}$ es fijo. Por lo tanto, $\kappa\mathbb{R}$ es H-cerrado.* □

Lema 5.6 (***Paso*** 5) *$\kappa\mathbb{R}$ es la extensión H-cerrado más larga de $\mathbb{R}$ con respecto al orden proyectivo.*
Demostración. Ver la página 308 de [1]. □

Lema 5.7 (***Paso*** 6) *$\kappa\mathbb{R}$ es una extensión única.*
*Demostración. Supongamos que L es la extensión H-cerrada más larga de un espacio de Hausdorff $\mathbb{R}$. Debemos probar que existe un homeomorfismo $h : \kappa\mathbb{R} \to L$ tal que $h(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $h(\mathcal{U}) = \mathfrak{G}$ para $\mathcal{U} \in \kappa\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}$, y $\mathfrak{G} \in L\backslash X$. Esto es, solo se debe verificar que para todo V abierto en $\kappa\mathbb{R}$, la imagen $h(V)$ es abierto en $\kappa\mathbb{R}$ (ya que por construcción h es continua y sobreyectiva). Consideremos **<u>2 casos</u>**:*

1. ***<u>Caso 1</u>**: V es abierto en $\mathbb{R}$, es decir, $\mathcal{U} \notin V$, luego $h(V) = V$. Desde que $V \subset \mathbb{R}$ es abierto en $\kappa\mathbb{R}$, V es abierto en $\mathbb{R}$. Sabemos que $\mathbb{R}$ es un subespacio abierto (denso) en de L, V es subconjunto abierto de L.*

2. ***<u>Caso 2</u>**: $\mathcal{U} \in V$, luego $C = \kappa\mathbb{R}\backslash V$ es cerrado en $\kappa\mathbb{R}$, y si este es compacto como subespacio de $\kappa\mathbb{R}$(pues $\kappa\mathbb{R}$ es Hausdorff). Ahora, desde que $C \subset \mathbb{R}$, este es un subespacio compacto de $\mathbb{R}$. Nuevamente, $\mathbb{R}$ es un subespacio de L, luego C es también subespacio compacto de L. Como L es Hausdorff, C es cerrado en L, así $h(C) = h(\kappa\mathbb{R}\backslash V) = h(\kappa\mathbb{R})\backslash h(V) = L\backslash h(V)$. Desde que $C \subset \mathbb{R}$, $h(C) \subset C$ y así $h(V) = L\backslash C$ es abierto en L. Por lo tanto, $\kappa\mathbb{R} = L$.* □

Ahora, se usará los Lemas 5.5, 5.6 y 5.7, para escribir el siguiente teorema.

Teorema 5.8 *Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathbb{R})$, existe un unico espacio $\kappa\mathbb{R}$, el cual es la más larga extensión H-cerrada de $\mathbb{R}$.*
Demostración. Definimos $\kappa\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_\infty$ como en la Definición 5.2 y sea

$$\mathcal{B} = \left\{ V \cup \{\mathfrak{F} : V \in \mathfrak{F} \in \mathbb{R}_\infty\}, U : U \textit{es abierto en } \mathbb{R} \right\}$$

la base que genera una topología sobre $\kappa\mathbb{R}$.
Si juntamos los Lemas 5.5, 5.6 y 5.7, la prueba de este teorema es inmediata. □

Se ha ejemplificado para el caso $\kappa\mathbb{R}$, de manera análoga la prueba se da para κX.

Definición 5.9 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff pero no H-cerrado y*

$$X_\infty = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{T} : \mathcal{U} \text{ es un ultrafiltro abierto libre sobre } X\}$$

El conjunto $\kappa X = X \cup X_\infty$ unión disjunta cuya topología está generada por subconjuntos abiertos de la forma como se indica la colección $\mathcal{B}$, donde

$$\mathcal{B} = \left\{ V \cup \{\mathfrak{F} : V \in \mathfrak{F} \in X_\infty\}, U : U \text{es abierto en } X \right\}$$

Teorema 5.10 *Para cualquier espacio de Hausdorff $(X, \mathcal{T})$, existe un unico espacio de Hausdorff κX, el cual es la más larga extensión H-cerrada de X.*
Demostración. La prueba es análoga a el Teorema 5.8. En el caso de los números reales, podemos ver explícitamente como es el ultrafiltro abierto libre en $\mathbb{R}$ y así poder definir $\kappa\mathbb{R}$. En el caso general, primero garantizamos la existencia de un ultrafiltro abierto libre sobre X sin saber la forma de sus elementos, para luego definir κX. □

6. Aplicaciones

6.1. Extensión de Funciones

Para un espacio X hemos construido una extensión H-cerrada $\kappa X = X \cup X_\infty$ donde X_∞ denota el conjunto de ultrafiltros abiertos y la topología sobre κX es la topología dada en la Definición 5.9. Usaremos tal construcción para el estudio de extensión de funciones.Dada una función continua h de un espacio topológico X a un espacio topológico Y, lo denotaremos por $[X, h, Y]$.

Definición 6.1 *Una extensión de un espacio topológico es un par (E, θ), donde E es un espacio topológico, θ es un homeomorfismo de X en E y $\theta(X)$ es denso en E.*
Sea (E, θ) una extensión de X y h denota una función continua de X a Y. Una función $\varphi : E \to Y$ es una extensión de h si $h(x) = \varphi \circ \theta(x)$ para todo $x \in X$. Dada una función $h : X \to Y$, las extensiones de $[X, h, Y]$ son los triples $[(E, \theta), \varphi, Y]$ donde (E, θ) extiende X y φ extiende h.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varphi"] & Y \\
X \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 1: Diagrama conmutativo

Definición 6.2 *Sean $[(E, \theta), \varphi, Y]$ y $[(E', \theta'), \varphi', Y]$ extensiones de $[X, h, Y]$. Se dice que son **equivalentes** $(=)$ si existe un homeomorfismo $f : E \to E'$ tal que*

1. *$\varphi' \circ f = \varphi$ sobre E y*
2. *$f \circ \theta = \theta'$ sobre X*

A continuación, utilizando la construcción de Katětov, se demostrará que existe una extensión maximal para $[X, h, Y]$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "\theta"] & E' \arrow[d, "\varphi'"] \\
E \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "\varphi"] & Y
\end{tikzcd}$$

Figura 2: Diagrama conmutativo

Teorema 6.3 *Sea $[E, \varphi, Y]$ una extensión de $[X, h, Y]$. Luego $[K(h), h', Y] \geq [E, \theta, Y]$*
Demostración. Sea $E = X \cup \mathcal{R}$ donde $\mathcal{R}$ está formada por todos los ultrafiltros abiertos libres h-convergentes. Para $\epsilon \in \mathcal{R}$, sea

$$\mathcal{V}(\epsilon) = \{\theta \in K(h) : \epsilon \subset \theta\}.$$

Definimos $f : X \cup \bigcup_{\epsilon \in \mathcal{R}} \mathcal{V}(\epsilon) \subset K(h) \to E$ por por $f(x) = x$ para todo $x \in X$ y $f(\theta) = \epsilon$ donde $\epsilon \subset \theta$ para $\theta \in \bigcup_{\epsilon \in \mathcal{R}} \mathcal{V}(\epsilon)$. Como E es Hausdorff, entonces un elemento de $\bigcup_{\epsilon \in \mathcal{R}} \mathcal{V}(\epsilon)$ no puede contener dos elemtos de $\mathcal{R}$. Así, f está bien definida. Ahora, como $K(h)$ es una extensión simple, entonces f es continua. Además f es sobreyectiva y se satisfacen:

1. *$\varphi \circ f = \varphi'$ sobre $X \cup \bigcup_{\epsilon \in \mathcal{R}} \mathcal{V}(\epsilon)$*
2. *$f \circ \theta' = \theta$ sobre X.* □

6.2. Espacios HČ-completos

Como otra aplicación estudiaremos bajo que condiciones κX es HČ-Completo. Los espacios HČ-completos son generalizaciones de los espacios localmente compactos. En este artículo tenemos la siguiente definición de espacios HČ-completos.

Definición 6.4 *Se dice que un espacio X es* ***HČ-completo*** *si existe una familia numerable $\{\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de recubrimientos abiertos del espacio X con la siguiente propiedad: Si $\mathfrak{F}$ es una familia con la PIF (propiedad de intersección finita) de subconjuntos cerrados de X satisfaciendo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $F_n \in \mathfrak{F}$ y $C_n \in \mathcal{C}_n$ con $F_n \subset C_n$, luego $\bigcap \mathfrak{F} \neq \emptyset$*

Ahora, surge la siguiente pregunta: **¿La extensión de Katětov es HČ-completo?**. No siempre la extensión de Katětov es HČ-completo. Pero si lo es bajo ciertas condiciones.
En las siguientes proposiciones y teorema se presentan algunas condiciones indispensables para que la extensión de Katětov sea HČ-completo. Las demostraciones de dichos resultados se encuentran desarrolladas a detalle en la Sección 4 ([3]) donde se presentan condiciones suficientes sobre X para que κX sea HČ-completo.
A continuación, mencionaremos algunas de ellas.

Teorema 6.5 *Sea X un espacio topológico con $X = D \cup C$, donde D es subespacio discreto de X y C es subespacio compacto de X con $D \cap C = \emptyset$. Luego la extensión Katétov κX es un espacio HČ-completo.*

Corolario 6.6 *Para cualquier espacio infinito X con una colección finita de puntos no aislados (en particular si X es discreto), κX es HČ-completo.*

Ejemplo 6.7 *$\kappa\mathbb{N}$ y $\kappa\mathbb{Z}$ son HČ-completos.*

Proposición 6.8 *Sea X un espacio localmente compacto y numerablemente compacto, entonces κX es HČ-completo.*

Ejemplo 6.9 *Consideremos* $X = \{0, 1\}$ *con la topología discreta.* X *es localmente compacta ya que cualquier conjunto abierto que contenga a* 0 *o a* 1 *en esta topología será un conjunto finito. Por la Proposición 6.8 se tiene que* X *es HČ-completo.*

Gracias a la siguiente proposición se obtiene espacios para el cual sus extensiones Katétov no son HČ-completos.

Proposición 6.10 *Sea* X *un espacio de Hausdorff sin puntos aislados. Si* κX *es un espacio HČ-completo, entonces* X *es débilmente compacta.*

Ejemplo 6.11 *Como* $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ *y* $\mathbb{Q}$ *no son débilmente compactos y son espacios de Hausdorff sin puntos aislados, entonces por la Proposición 6.10 se tiene que* $\kappa\mathbb{R}$, $\kappa\mathbb{I}$ *y* $\kappa\mathbb{Q}$ *no son espacios HČ-completos.*

7. Conclusión

En este artículo se define la extensión de un espacio X. En particular, se enfoca en el estudio de las extensiones compactas (compactificaciones) y las extensiones H-cerradas. En el corolario 4.5 se mostró que X debe ser Hausdorff y Tychonoff para que exista una compactificación. Por ello, surgió la siguiente interrogante: **¿cómo podemos construir una extensión H-cerrada para cualquier espacio de Hausdorff?**. La respuesta es la extensión de Katětov, esta extensión H-cerrada fue estudiada en este artículo. De hecho, iniciamos con la construcción de la extensión de Katětov para $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, lo que permite desarrollar intuición para el caso general. Es decir, la construcción de la extensión de Katětov para cualquier espacio de Hausdorff. Finalmente presentamos las principales aplicaciones del uso de la construcción de la extensión de Katětov κX, tales como la extensión de funciones y la generalización del Teorema de Categoria de Baire haciendo uso de la HČ-Completitud.

Referencias bibliográficas

[1] J.R. Porter and R.G. Woods (1988). *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*. Berlin. Springer.

[2] Katětov, Miroslav(1947).“ *On H-closed extensions of topological spaces*.” Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 072.1: 17-32.

[3] Martínez Morales, J.A., Rojas Sanchez, A.D., & Tamariz Mascarúa, A. (2020). *On HČ-Completeness and Kătetov extensions*. Topology and its Applications 284.

[4] M. M. Kiteu and S. Mayila (2021). *Construction of the Katetov Extension of a Hausdorff Space*. University of Dodoma, Dodoma, Tanzania.

[5] Nathan, Carlson (2007). *Lower and upper topologies in the Hausdorff partial order*. Topology and its Applications 154: 619–624.

[6] Viglino, Giovanni(1973). *Extensions of functions and spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 179: 61-69