PESQUIMAT 27(1): 1–17 (2024)
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v27.i1.28189
ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Estudio del problema bien puesto del sistema de Timoshenko unidimensional con retardo local

Alfonso Pérez Salvatierra [1]***, Eliseo Pumacallahui Salcedo*** [2] ***y Andrés Guardia Cayo*** [3]

Resumen: Muchos investigadores hasta los años 2010, estudiaron el sistema de Timoshenko en diversas presentaciones sin retardo, desde el año 2010 hasta nuestros días se vienen trabajando los problemas con retardo; cabe así mencionar que, en el presente articulo abordamos el sistema de Timoshenko con dos disipaciones internas parciales, que se aplican al desplazamiento transversal y al movimiento rotacional de la viga unidimensional, con retraso en el tiempo en ambas ecuaciones. Nos enfocamos hacer ver que, el problema está bien puesto, es decir, existe y es única la solución del sistema planteado, con sus condiciones iniciales y de frontera del tipo Dirichlet. Para ello usaremos la teoría de semigrupos lineales y la energía asociada al sistema.

Palabras clave: Sistema de Timoshenko, Retardos parciales, Energía, Semigrupos lineales

Study of the well-placed problem of the one-dimensional Timoshenko system with local delay

Abstract: Many researchers until the 2010s, studied the Timoshenko system in various presentations without delay, from the year 2010 to the present day the problems have been working with a delay; thus, it is worth mentioning that, in this article, we address the Timoshenko system with two partial internal dissipations, which are applied to the transversal displacement and the rotational movement of the one-dimensional beam, with a delay in time in both equations. We focus on showing that the problem is well posed, that is, the solution of the proposed system exists and is unique, with its initial and boundary conditions of the Dirichlet type. For this we will use the theory of linear semigroups and the energy associated with the system.

Keywords: Timoshenko system, Partial delay, Energy, Linear semigroups.

Recibido: 25/10/2023. *Aceptado:* 08/02/2024. *Publicado online:* 30/06/2024.

[1] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: aperezs@unmsm.edu.pe
[2] UNIQ, Facultad de Ingeniería, e-mail: eliseo.pumacallahui@uniq.edu.pe
[3] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: aguardiac@unmsm.edu.pe

1. Introducción

El modelo de una viga de Timoshenko tridimensional, fue deducido por S.P. Timoshenko [17], que consiste en una aproximación de la Teoría de la Elasticidad tridimensional. Cuando se deforma un punto del cuerpo tridimensional, todos sus puntos en la parte transversal también siguen la deformación en forma paralela; por eso se considera tan solo en una forma unidimensional. En ese sentido, las pequeñas vibraciones transversales de una viga son dadas por sistema unidimensional acoplado de dos ecuaciones diferenciales parciales,

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} &= \big(K(u_x-\psi)\big)_x \ , \text{ en } (0,L)\times(0,\infty) \\ I_\rho \psi_{tt} &= \big(EI\psi_x\big)_x + K\big(u_x-\psi\big) \ , \text{ en } (0,L)\times(0,\infty) \end{aligned}$$

Donde se supone que, la viga tiene una longitud L y el tiempo t, toma valores positivos.
La función $u=u(x,t)$, representa el movimiento transversal de la viga y $\psi=\psi(x,t)$ representa el ángulo de rotación del filamento de la viga. Los coeficientes ρ, I_ρ, E, I y K son: la masa por unidad de longitud, el momento polar, el módulo de Young, el momento de inercia y el módulo de corte, respectivamente.
Denotando $\rho_1=\rho, \rho_2=I_\rho, b=EI,\ k=K$ y reemplazando en las ecuaciones diferenciales precedentes obtenemos,

$$\begin{aligned} &\rho_1 u_{tt} - k\big(u_x-\psi\big)_x = 0 \ , \text{ en } (0,L)\times(0,\infty) \\ &\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\big(u_x-\psi\big) = 0 \ , \text{ en } (0,L)\times(0,\infty) \end{aligned}$$

Muchos investigadores hasta los años 2010, estudiaron el sistema de Timoshenko en diversas presentaciones sin retardo, como podemos citar [2, 3, 7, 8, 12].

Desde el año 2010 hasta nuestros días se vienen trabajando los problemas con retardo; los efectos de retardo surgen en muchas aplicaciones y problemas prácticos, ver por ejemplo [5, 13] y atrajo mucha atención de investigadores en diversos campos del quehacer humano como matemáticas, ingeniería, ciencias y economía.
Aunque la introducción voluntaria del retardo puede beneficiar al control como lo citado en [1], también puede desestabilizar un sistema que es asintóticamente estable en ausencia del retraso, para mayor información [6, 11]. Apalara [15], estudió dos sistemas de Timoshenko con retardo: Decaimiento uniforme de un sistema de Timoshenko débilmente disipativo con disipación débil y retroalimentación de retraso local interno [16]; Problema bien puesto y estabilidad exponencial para para un sistema de Timoshenko lineal amortiguado con segundo sonido y con retardo interno distribuido [15].
Shi y Feng [14], estudiaron el decaimiento exponencial de la viga de Timoshenko con retroalimentación localmente distribuida; Feng. et al. [6], estudiaron la estabilización de la viga de Timoshenko con retroalimentación en la frontera; Raposo et al. [12], estudiaron la estabilidad exponencial para el sistema de Timoshenko con dos amortiguamientos débiles, planteado por

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - k\big(u_x-\psi\big)_x + u_t = 0 \ , \text{ en } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\big(u_x-\psi\big) + \psi_t = 0 \ , \text{ en } (0,L)\times(0,\infty) \\ u(0,t)=u(L,t)=\psi(0,t)=\psi(L,t)=0 \ , \ t>0 \\ u(x,0)=u_0(x) \ , \ u_t(x,0)=u_1(x) \ , \ 0\le x\le L \\ \psi(x,0)=\psi_0(x) \ , \ \psi_t(x,0)=\psi_1(x) \ , \ 0\le x\le L \end{cases}$$

En el presente artículo, introduciendo en el sistema precedente dos términos de retardo en los términos de fricción interna, amortiguamiento local y con sus respectivas condiciones iniciales, frontera del tipo Dirichlet, presentado por

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k\big(\varphi_x - \psi\big)_x + \gamma_1(x)\varphi_t - \mu_1(x)\varphi_t(x,t-\tau) = 0 \ , \text{ en } (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\big(\varphi_x + \psi\big) + \gamma_2(x)\psi_t - \mu_2(x)\psi_t(x,t-\tau) = 0 \ , \text{ en } (0,L)\times(0,\infty) \\ \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0 \ , \ t>0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \ , \ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x) \ , \ 0\le x\le L \\ psi(x,0) = \psi_0(x) \ , \ \psi_t(x,0) = \psi_1(x) \ , \ 0\le x\le L \end{cases}$$

estudiamos el problema de Timoshenko con retardo localizado, con sus respectivas condiciones iniciales y de frontera siguiente

$$\rho_1\varphi_{tt} - k\big(\varphi_x + \psi)_x + \gamma_1(x)\varphi_t - \mu_1(x)\varphi_t(x,t-\tau) = 0, \text{ en } (0,\ L)\times\mathbb{R}^+ \tag{1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma_2(x)\psi_t - \mu_2(x)\psi_t(x,t-\tau) = 0, \text{ en } (0,\ L)\times\mathbb{R}^+ \tag{2}$$

donde $\rho_1, \rho_2 \ge 0, k \ge 0; \gamma_i, \mu_i$ funciones reales positivamente definidas en $(0, L), i = 1, 2$, con $\tau > 0$, es el tiempo de retardo, con condiciones iniciales:

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x) \ , \ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \ \ 0\le x\le L \tag{3}$$

$$\varphi_t(x,-t) = f_0(x,-\tau) \, , \ 0\le x\le L \ , \ 0\le t\le\tau \tag{4}$$

$$\psi(x,0) = \psi_0(x) \ , \ \psi_t(x,0) = \psi_1(x) \ , \ 0\le x\le L \tag{5}$$

$$\psi_t(x,-t) = g_0(x,-\tau) \ , \ 0\le x\le L \ , \ 0\le t\le\tau \tag{6}$$

y con las condiciones de frontera:

$$\varphi(0,t) = 0 = \varphi(L,t) \ , \ t\ge 0 \tag{7}$$

$$\psi(0,t) = 0 = \psi(L,t) \ , \ t\ge 0 \tag{8}$$

2. Preliminares

Enunciamos algunos resultados de la teoría de semigrupos lineales, que serán utilizados en el presente artículo.

Definición 1 (Semigrupo) Sea X un espacio de Banach. Un semigrupo sobre X es una familia $\{S\,(t)\}_{t\ge 0}$ de operadores lineales continuos $S(t) : X \to X$ que cumple las siguientes condiciones:

a) $S\,(0) = I$.

b) $S\,(t+s) = S\,(t)\,S\,(s)\,,\ \forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Definición 2 Diremos que un semigrupo $\{S\,(t)\}_{t\ge 0}$ es fuertemente continuo (o de clase C_0), si $\lim\limits_{t\to 0^+} \|S\,(t) - I\|_X = 0$, $\forall x \in X$.

Definición 3 Diremos que $\{S\,(t)\}_{t\ge 0}$ es un semigrupo acotado en $[0, +\infty\rangle$, si existe $M \ge 1$, tal que $\|S\,(t)\|_X \le M$. Si $M = 1$, se dice que $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ es un semigrupo de contracciones.

Definición 4 Sea $\{S\,(t)\}_{t\ge 0}$ un semigrupo sobre un espacio de Banach X. El generador infinitesimal de $\{S\,(t)\}_{t\ge 0}$ es el operador

$$\begin{array}{cccc} A & : & D(A) & \longrightarrow & X \\ & & x & \longmapsto & Ax = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)x - x}{t}, \end{array}$$

donde

$$D\,(A) = \left\{ x\in X \ \middle|\ \exists \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \in X \right\}.$$

Definición 5 Sea X un espacio de Hilbert y $T : D(T) \subset X \to X$ un operador lineal; no acotado en X, el conjunto resolvente $\rho(T)$ se define como

$$\rho(T) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - T) \text{ es invertible y } (\lambda I - T)^{-1} \text{ es un operador acotado en } X \right\}$$

El operador lineal acotado $R(\lambda; T) := (\lambda I - T)^{-1}$ con $\lambda \in \rho(T)$, se llama resolvente de T.

Teorema 1 Sea X un espacio de Hilbert y $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ un operador lineal disipativo con $\operatorname{Im}(I - \mathcal{A}) = X$. Si X es reflexivo, entonces $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.

Demostración. Ver [9].

Teorema 2 *Sea X un espacio de Banach y A un operador lineal (no acotado), disipativo y con dominio denso en X. Si $0 \in \rho(A)$, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones $S(t) = e^{At}$ sobre X.*

Demostración. [10]

Definición 6 Sea X un espacio de Banach, A un operador lineal no acotado, $D(A) \subset X$ y $U_0 \in X$ un dato inicial. El Problema de Valor Inicial

$$\left| \begin{array}{rcl} \dfrac{dU}{dt} & = & AU, \quad t > 0 \\ U(0) & = & U_0 \end{array} \right. \tag{9}$$

se denomina Problema Abstracto de Cauchy.

En el desarrollo del presente artículo, los conceptos y resultados de los espacios de Sobolev, Análisis funcional y como también la Teoría de los semigrupos lineales nos basamos de los textos que aparecen en [4, 9].

Finalmente, el propósito de este trabajo es estudiar el buen planteamiento del problema proyectando para un estudio de la estabilidad de la energía asociada al sistema de Timoshenko con retardo.

3. Existencia y unicidad

Problema equivalente

Deducimos el problema equivalente, para ello definimos la variable auxiliar para las funciones φ y ψ:

$$z_1(x,t,\rho) := \varphi_t(x, t - \rho\tau),\ 0 \leq x \leq L,\ t \geq 0,\ 0 \leq \rho \leq 1 \tag{10}$$
$$z_2(x,t,\rho) := \psi_t(x, t - \rho\tau),\ 0 \leq x \leq L,\ t \geq 0,\ 0 \leq \rho \leq 1 \tag{11}$$

De (10) y (11), para $\rho = 1$, tenemos la nueva variable auxiliar para φ y ψ :

$$z_1(x,t,1) := \varphi_t(x, t - \tau),\ 0 \leq x \leq L,\ t \geq 0,\ 0 \leq t \leq \tau \tag{12}$$
$$z_2(x,t,1) := \psi_t(x, t - \tau),\ 0 \leq x \leq L,\ t \geq 0,\ \ 0 \leq t \leq \tau \tag{13}$$

Reemplazando las ecuaciones (12) y (13) en las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

$$\rho_1\varphi_{tt} - k\big(\varphi_x + \psi\big)_x + \gamma_1(x)\varphi_t - \mu_1(x)z_1(x,t,1) = 0 \tag{14}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma_2(x)\psi_t - \mu_2(x)z_2(x,t,1) = 0 \tag{15}$$

Trabajando con (10) y (11), conseguimos las ecuaciones suplementarias:

$$\tau z_{1t}(x,t,\rho) + z_{1\rho}(x,t,\rho) = 0,\ 0 < x < L,\ t \geq 0,\ 0 \leq \rho \leq 1 \tag{16}$$
$$\tau z_{2t}(x,t,\rho) + z_{2\rho}(x,t,\rho) = 0,\ 0 < x < L,\ t \geq 0,\ 0 \leq \rho \leq 1 \tag{17}$$

de las condiciones iniciales (3)-(6), se tienen

$$z_1(x,0,\rho) = f_0(x,-\rho\tau),\ 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq \rho \leq 1 \tag{18}$$
$$z_2(x,0,\rho) = g_0(x,-\rho\tau),\ 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq \rho \leq 1 \tag{19}$$

y las condiciones de frontera (7) y (8),

$$z_1(0,t,\rho) = 0 = z_1(L,t,\rho),\ t \geq 0,\ 0 \leq \rho \leq 1 \tag{20}$$
$$z_1(x,t,0) = \varphi_t(x,t),\ 0 \leq x \leq L,\ t \geq 0 \tag{21}$$
$$z_2(0,t,\rho) = 0 = z_2(L,t,\rho),\ t \geq 0,\ 0 \leq \rho \leq 1 \tag{22}$$
$$z_2(x,t,0) = \psi_t(x,t),\ 0 \leq x \leq L,\ t \geq 0 \tag{23}$$

Entonces, tenemos el sistema equivalente formado por las ecuaciones (14) y (15) con condiciones iniciales (18) y (19), con condiciones de frontera (20)-(23), y con ecuaciones suplementarias (16) y (17).

Problema de Cauchy

Se puede observar que, el problema (14) y (15) no es autónomo, por lo tanto no podemos aplicar directamente la teoría de semigrupos, por lo que es necesario expresar, como un problema de valor inicial de tipo Cauchy o problema de valor inicial abstracto (9).
Efectuando el cambio de variable

$$v = \varphi_t, \quad w = \psi_t \tag{24}$$

y teniendo en cuenta las expresiones (14)-(17), obtenemos el problema de Cauchy

$$\left|\begin{array}{rcl} \dfrac{dU}{dt} & = & AU, \quad t > 0 \\ U(0) & = & U_0 \end{array}\right. \tag{25}$$

donde $A : D(A) \subset H \to H$ es el operador diferencial definido por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & -\dfrac{1}{\rho_1}\gamma_1(x) & \dfrac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \dfrac{1}{\rho_1}\mu_1(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\dfrac{k}{\rho_2}\partial_x & -\dfrac{1}{\rho_2}\gamma_2(x) & \dfrac{1}{\rho_2}(b\,\partial_{xx} - kI) & -\dfrac{1}{\rho_2}\gamma_2 & 0 & \dfrac{1}{\rho_2}\mu_2(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau}\partial_\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau}\partial_\rho \end{pmatrix} \tag{26}$$

siendo

$$U = (\varphi, v, \psi, w, z_1, z_2)^T, \quad U_0 = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x), f_0(x,-\rho\tau), g_0(x,-\rho\tau))^T,$$

$$z_1(x,0,\rho) = \varphi_t(x,-\rho\tau) = f_0(x,-\rho\tau) \quad \text{y} \quad z_2(x,0,\rho) = \psi_t(x,-\rho\tau) = g_0(x,-\rho\tau).$$

El problema de Cauchy Abstracto (25), tiene solución si, A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0.

Con el fin de efectuar la formulación del semigrupo asociado al sistema (14)-(23), definimos la energía asociada del sistema

$$\begin{aligned} E(t) := & \frac{\rho_1}{2}\int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ & + \frac{\xi}{2}\int_0^L \mu_1(x)\int_0^1 |z_1(x,t,\rho)|^2 d\rho dx + \frac{\xi}{2}\int_0^L \mu_2(x)\int_0^1 |z_2(x,t,\rho)|^2 d\rho dx \end{aligned} \tag{27}$$

a fin de poder determinar el espacio de Hilbert H.

Proposición 1 La energía $E(t)$ asociada al sistema (14)-(23) es disipativo, si

$$\frac{\tau}{2} \leq \xi \leq 2\tau\left(\frac{||\gamma_i||_\infty - ||\mu_i||_\infty}{||\mu_i||_\infty}\right) \quad \text{y} \quad \gamma_i, \mu_i \in L^\infty(0,L), \ \text{con } i = 1,2.$$

Demostración. Multiplicando formalmente la ecuación (14) y (15) por $\varphi_t, \psi_t \in L^2(0,L)$ respectivamente, y sumando, obtenemos

$$\begin{aligned} & (\rho_1\varphi_{tt}, \varphi_t)_2 + (\rho_2\psi_{tt}, \psi_t)_2 + (-b\psi_{xx}, \psi_t)_2 + (-k(\varphi_x + \psi)_x, \varphi_t)_2 \\ & \quad + (k(\varphi_x + \psi), \psi_t)_2 + (\gamma_1(x)\varphi_t, \varphi_t)_2 + (\gamma_2(x)\psi_t, \psi_t)_2 \\ & \quad + (-\mu_1(x)z_1(x,t,1), \varphi_t)_2 + (-\mu_2(x)z_2(x,t,1), \psi_t)_2 = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

En seguida aplicando integración por partes en cada término de (28) y teniendo en cuenta las condiciones de frontera para $\psi(x,t)$ y $\varphi(x,t)$ se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\varphi_t(x,t)|^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\psi_t(x,t)|^2 dx \\ & \quad + \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\varphi_x(x,t) + \psi(x,t)|^2\, dx \\ & \quad + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l |\psi_x(x,t)|^2 dx = -\int_0^L \gamma_1(x)|\varphi_t(x,t)|^2 dx \\ & \quad - \int_0^L \gamma_2(x)|\psi_t(x,t)|^2 dx \\ & \quad + \int_0^L \mu_1(x)z_1(x,t,1)\varphi_t(x,t)dx \\ & \quad + \int_0^L \mu_2(x)z_2(x,t,1)\psi_t(x,t)dx \end{aligned}$$

sumando término

$$\frac{\xi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \mu_1(x)\int_0^1 |z_1(x,t,\rho)|^2 d\rho dx + \frac{\xi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \mu_2(x)\int_0^1 |z_2(x,t,\rho)|^2 d\rho dx$$

a ambos lados en la expresión anterior y reagrupando términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{\rho_1}{2}\int_0^L |\varphi_t(x,t)|^2dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^L |\psi_t(x,t)|^2dx + \frac{b}{2}\int_0^l |\psi_x|^2dx\right.\\
&\quad +\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2dx + \frac{\xi}{2}\int_0^L \mu_1(x)\int_0^1 |z_1(x,t,\rho)|^2d\rho dx\\
&\qquad \left.+\frac{\xi}{2}\int_0^L \mu_2(x)\int_0^1 |z_2(x,t,\rho)|^2d\rho dx\right] = -\int_0^L \gamma_1(x)|\varphi_t(x,t)|^2dx\\
&\qquad\qquad -\int_0^L \gamma_2(x)|\psi_t(x,t)|^2dx\\
&\qquad\qquad +\int_0^L \mu_1(x)z_1(x,t,1)\varphi_t(x,t)dx\\
&\qquad\qquad +\int_0^L \mu_2(x)z_2(x,t,1)\psi_t(x,t)dx\\
&\qquad\qquad +\frac{\xi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \mu_1(x)\int_0^1 |z_1(x,t,\rho)|^2d\rho dx\\
&\qquad\qquad +\frac{\xi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \mu_2(x)\int_0^1 |z_2(x,t,\rho)|^2dx
\end{aligned}\tag{29}$$

Teniendo en cuenta la energía asociada al sistema definida por (27), de la relación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) = &-\int_0^L \gamma_1(x)|\varphi_t(x,t)|^2dx - \int_0^L \gamma_2(x)|\psi_t(x,t)|^2dx + \int_0^L \mu_1(x)z_1(x,t,1)\varphi_t(x,t)dx\\
&+\int_0^L \mu_2(x)z_2(x,t,1)\psi_t(x,t)dx + \frac{\xi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \mu_1(x)\int_0^1 |z_1(x,t,\rho)|^2d\rho dx\\
&+\frac{\xi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \mu_2(x)\int_0^1 |z_2(x,t,\rho)|^2dx
\end{aligned}\tag{30}$$

Utilizando las variables auxiliares, (10) y (11), se tienen:

$$z_1(x,t,0) = z_1(0) = \varphi_t(x,y), \text{ y, } z_1(x,t,1) = z_1(1) = \varphi_t(x,t-\tau) \tag{31}$$

$$z_2(x,t,0) = z_2(0) = \psi_t(x,y), \text{ y, } z_2(x,t,1) = z_2(1) = \psi_t(x,t-\tau) \tag{32}$$

En seguida vamos acotar algunos términos del segundo miembro de (30), par el cual aplicando la desigualdad de Young, (31) y $\mu_1 \in L^\infty(0,L)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L \mu_1(x)z_1(1)\varphi_t dx &\le ||\mu_1||_\infty \int_0^L |z_1(1)||\varphi_t| \le ||\mu_1||_\infty \int_0^L \left(\frac{1}{4}|z_1(1)|^2 + |\varphi_t|^2\right)dx\\
&\le \frac{||\mu_1||_\infty}{4}\int_0^L |z_1(1)|^2dx + ||\mu_1||_\infty \int_0^L |\varphi_t|^2dx
\end{aligned}\tag{33}$$

De modo similar; para $\mu_2 \in L^\infty(0,L)$ y (32) se obtiene

$$\int_0^L \mu_2(x)z_2(1)\psi_t dx \le \frac{||\mu_2||_\infty}{4}\int_0^L |z_2(1)|^2dx + ||\mu_2||_\infty \int_0^L |\psi_t|^2dx$$

de forma análoga se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\xi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \mu_1(x)\int_0^1 |z_1(x,t,\rho)|^2\,d\rho dx \le &-\frac{\xi}{2\tau}||\mu_1||_\infty \int_0^L |z_1(1)|^2dx\\
&+\frac{\xi}{2\tau}||\mu_1||_\infty \int_0^L |z_1(0)|^2dx
\end{aligned}\tag{34}$$

y

$$\frac{\xi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \mu_2(x)\int_0^1 |z_2(x,t,\rho)|^2\, d\rho dx \leq -\frac{\xi}{2\tau}||\mu_2||_\infty \int_0^L |z_2(1)|^2\, dx + \frac{\xi}{2\tau}||\mu_2||_\infty \int_0^L |z_2(0)|^2\, dx \tag{35}$$

Reemplazando las expresiones (33)-(35) en (30) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} \leq &-\int_0^L \gamma_1(x)|\varphi_t(x,t)|^2 dx - \int_0^L \gamma_2(x)|\psi_t(x,t)|^2 dx + \frac{||\mu_1||_\infty}{4}\int_0^L |z_1(1)|^2 dx\\ &+ ||\mu_1||_\infty \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{||\mu_2||_\infty}{4}\int_0^L |z_2(1)|^2 dx + ||\mu_2||_\infty \int_0^L |\psi_t|^2 dx\\ &- \frac{\xi}{2\tau}||\mu_1||_\infty \int_0^L |z_1(1)|^2\, dx + \frac{\xi}{2\tau}||\mu_1||_\infty \int_0^L |z_1(0)|^2\, dx\\ &- \frac{\xi}{2\tau}||\mu_2||_\infty \int_0^L |z_2(1)|^2\, dx + \frac{\xi}{2\tau}||\mu_2||_\infty \int_0^L |z_2(0)|^2\, dx\end{aligned}$$

Agrupando los términos $z_1(0) = z_1(x,t,0) = \varphi_t(x,t), z_2(0) = z_2(x,t,0) = \psi_t(x,t)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} \leq &-\left(||\gamma_1||_\infty - \frac{(2\tau+\xi)}{2\tau}||\mu_1||_\infty\right)\int_0^L |\varphi_t(x,t)|^2 dx\\ &-\left(||\gamma_2||_\infty - \frac{(2\tau+\xi)}{2\tau}||\mu_2||_\infty\right)\int_0^L |\psi_t(x,t)|^2 dx\\ &-\left(\frac{2\xi-\tau}{4\tau}\right)||\mu_1||_\infty \int_0^L |\varphi_t(x,t-\tau)|^2 dx\\ &-\left(\frac{2\xi-\tau}{4\tau}\right)||\mu_2||_\infty \int_0^L |\psi_t(x,t-\tau)|^2\end{aligned}$$

Por tanto, la energía del sistema es decreciente.
Del resultado de la proposición 1, para que la energía esté bien definida, se establece que la solución $U = (\varphi, v, \psi, w, z_1, z_2)$ debe satisfacer

$$U \in H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times L^2\left((0,1), L^2_{\mu_1}(0,L)\right)\times L^2\left((0,1), L^2_{\mu_2}(0,L)\right)$$

De este modo se define el espacio de fase asociado al sistema (25) dado por

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times L^2\left((0,1), L^2_{\mu_1}(0,L)\right)\times L^2\left((0,1), L^2_{\mu_2}(0,L)\right)$$

El espacio $\mathcal{H}$, provisto del siguiente producto interno

$$\begin{aligned}\langle U,V\rangle_{\mathcal{H}} = &\, k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\overline{(\varphi'_x+\psi')}dx + \rho_1\int_0^L v\overline{v'}dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\psi'_x}dx + \rho_2\int_0^L w\overline{w'}dx\\ &+ \xi\int_0^L \mu_1(x)\int_0^1 z_1(x,t,\rho)\overline{z'_1(x,t,\rho)}d\rho dx + \xi\int_0^L \mu_2(x)\int_0^1 z_2(x,t,\rho)\overline{z'_2(x,t,\rho)}d\rho dx\end{aligned} \tag{36}$$

con $U = (\varphi, v, \psi, w, z_1, z_2)^T, V = (\varphi', v', \psi', w', z'_1, z'_2)^T \in \mathcal{H}$; es un espacio de Hilbert, con la norma dada por

$$\begin{aligned}||U||^2_{\mathcal{H}} = &\, k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\, dx + \rho_1\int_0^L |v|^2 dx + b\int_0^L |\psi_x|^2 dx + \rho_2\int_0^L |w|^2 dx\\ &+ \xi\int_0^L \mu_1(x)\int_0^1 |z_1(x,t,\rho)|^2\, d\rho dx + \xi\int_0^L \mu_2(x)\int_0^1 |z_2(x,t,\rho)|^2\, d\rho dx\end{aligned} \tag{37}$$

El dominio del operador A es el conjunto sobre el cual el operador está bien definido sobre el espacio de fase, esto es,

$$D(A) = \{U \in \mathcal{H} | AU \in \mathcal{H}\}$$

teniendo en cuenta el operador A definido por (26) y el vector $U = (\varphi, v, \psi, w, z_1, z_2)^T$ se deduce

$$\begin{aligned} D(A) = \big\{ U \in \mathcal{H} | \varphi \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L);\ v \in H_0^1(0,L);\ \psi \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L); \\ w \in H_0^1(0,L), z_1, z_{1\rho} \in L^2\left((0,1), L^2_{\mu_1}(0,L)\right)\ ;\ z_2, z_{2\rho} \in L^2\left((0,1), L^2_{\mu_2}(0,L)\right)\big\} \end{aligned} \quad (38)$$

Es claro que, $\mathcal{D}(A)$ es denso en $\mathcal{H}$.

En lo que sigue se probará, usando el Teorema 2, que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Con este fin desarrollaremos los siguientes resultados con respecto del operador diferencial A.

Proposición 2 El operador $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es disipativo.

Demostración. En efecto, sea $U = (\varphi, v, \psi, w, z_1, z_2)^T \in D(A)$, entonces de (36) y de la definición AU, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} &= k \int_0^L (v_x \overline{\varphi}_x - \varphi_x \overline{v}_x)\,dx + k \int_0^L \left(v_x \overline{\psi} - \psi \overline{v}_x\right) dx + k \int_0^L (w \overline{\varphi}_x - \varphi_x \overline{w})\,dx \\ &+ k \int_0^L \left(w \overline{\psi} - \psi \overline{w}\right) dx + b \int_0^L \left(w_x \overline{\psi}_x - \psi_x \overline{w}_x\right) dx - \int_0^L \gamma_1(x)|v|^2 dx - \int_0^L \gamma_2(x)|w|^2 dx \\ &+ \int_0^L \mu_1(x) z_1(x,t,1)\overline{v} dx + \int_0^L \mu_2(x) z_2(x,t,1)\overline{w} dx \\ &- \frac{\xi}{\tau} \int_0^L \mu_1(x) \int_0^1 z_{1\rho}(x,t,\rho)\overline{z_1(x,t,\rho)} d\rho dx \\ &- \frac{\xi}{\tau} \int_0^L \mu_2(x) \int_0^1 z_{2\rho}(x,t,\rho)\overline{z_2(x,t,\rho)} d\rho dx \end{aligned} \quad (39)$$

De la propiedad de los números complejos, $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ en (39), tenemos:

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} &= - \int_0^L \gamma_1(x)|v|^2 dx - \int_0^L \gamma_2(x)|w|^2 dx + \int_0^L \mu_1(x) z_1(x,t,1)\overline{v} dx \\ &+ \int_0^L \mu_2(x) z_2(x,t,1)\overline{w} dx - \frac{\xi}{\tau} \int_0^L \mu_1(x) \int_0^1 z_{1\rho}(x,t,\rho)\overline{z_1(x,t,\rho)} d\rho dx \\ &- \frac{\xi}{\tau} \int_0^L \mu_2(x) \int_0^1 z_{2\rho}(x,t,\rho)\overline{z_2(x,t,\rho)} d\rho dx \\ &+ k \int_0^L 2i\,\mathrm{Im}(\overline{\varphi}_x v_x) dx + k \int_0^L 2i\,\mathrm{Im}(\overline{\varphi}_x w) dx \\ &+ k \int_0^L 2i\,\mathrm{Im}(\overline{\psi} w) dx + k \int_0^L 2i\,\mathrm{Im}(\overline{\psi} v_x) dx \\ &+ b \int_0^L 2i\,\mathrm{Im}(\overline{\psi}_x w_x) dx \end{aligned} \quad (40)$$

De segunda parte de (31) y (32) se tienen:

$$\begin{aligned}\int_0^L \mu_1(x) z_1(x,t,1)\overline{v}dx &= \int_0^L \mu_1(x) z_2(1)\overline{\varphi}_t dx \\ &\leq \frac{||\mu_1||_\infty}{4}\int_0^L |z_1(1)|^2 dx + ||\mu_1||_\infty \int_0^L |\varphi_t|^2 dx \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\int_0^L \mu_2(x) z_2(x,t,1)\overline{w}dx &= \int_0^L \mu_2(x) z_2(1)\overline{\psi}_t dx \\ &\leq \frac{||\mu_2||_\infty}{4}\int_0^L |z_2(1)|^2 dx + ||\mu_2||_\infty \int_0^L |\psi_t|^2 dx \end{aligned} \tag{42}$$

De primera parte de (31) y (32) se tienen:

$$\begin{aligned}-\frac{\xi}{\tau}\int_0^L \mu_1(x)\int_0^1 z_{1\rho}(x,t,\rho)\overline{z_1(x,t,\rho)}d\rho dx &= -\frac{\xi}{2\tau}\int_0^L \mu_1(x)\int_0^L 2Re[z_{1\rho}(x,t,\rho)\overline{z}_1(x,t,\rho)]d\rho dx \\ &= -\frac{\xi}{2\tau}\int_0^L \mu_1(x)\int_0^1 \frac{d}{d\rho}|z_1(x,t,\rho)|^2 d\rho dx \\ &= -\frac{\xi}{2\tau}\int_0^L \mu_1(x)\left[|z_1(1)|^2 - |z_1(0)|^2\right]dx \\ &= -\frac{\xi}{2\tau}\int_0^L \mu_1(x)|z_1(1)|^2 dx \\ &\quad + \frac{\xi}{2\tau}||\mu_1||_\infty \int_0^L |\varphi_t|^2 dx \end{aligned} \tag{43}$$

Análogamente se tiene que,

$$-\frac{\xi}{\tau}\int_0^L \mu_2(x)\int_0^1 z_{2\rho}(x,t,\rho)\overline{z_2(x,t,\rho)}d\rho dx = -\frac{\xi}{2\tau}\int_0^L \mu_2(x)|z_2(1)|^2 dx + \frac{\xi}{2\tau}||\mu_2||_\infty \int_0^L |\psi_t|^2 dx \tag{44}$$

Luego, de (41)-(44) en (40) y tomando la parte real, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} &\leq -\int_0^L \gamma_1(x)|v|^2 dx - \int_0^L \gamma_2(x)|w|^2 dx + \frac{||\mu_1||_\infty}{4}\int_0^L |z_1(1)|^2 dx + ||\mu_1||_\infty \int_0^L |\varphi_t|^2 dx \\ &+ \frac{||\mu_2||_\infty}{4}\int_0^L |z_2(1)|^2 dx + ||\mu_2||_\infty \int_0^L |\psi_t|^2 dx - \frac{\xi}{2\tau}\int_0^L \mu_1(x)|z_1(1)|^2 dx \\ &+ \frac{\xi}{2\tau}||\mu_1||_\infty \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \frac{\xi}{2\tau}\int_0^L \mu_2(x)|z_2(1)|^2 dx + \frac{\xi}{2\tau}||\mu_2||_\infty \int_0^L |\psi_t|^2 dx \\ &= -\int_0^L \left(\gamma_1(x) - \frac{(2\tau+\xi)}{2\tau}||\mu_1||_\infty\right)|\varphi_t(x,t)|^2 dx \\ &- \int_0^L \left(\gamma_2(x) - \frac{(2\tau+\xi)}{2\tau}||\mu_2||_\infty\right)|\psi_t(x,t)|^2 dx - \left(\frac{2\xi-\tau}{4\tau}\right)||\mu_1||_\infty \int_0^L |\varphi_t(x,t-\tau)|^2 dx \\ &- \left(\frac{2\xi-\tau}{4\tau}\right)||\mu_2||_\infty \int_0^L |\psi_t(x,t-\tau)|^2 \\ &\leq -\left(||\gamma_1||_\infty - \frac{(2\tau+\xi)}{2\tau}||\mu_1||_\infty\right)\int_0^L |\varphi_t(x,t)|^2 dx \\ &- \left(||\gamma_2||_\infty - \frac{(2\tau+\xi)}{2\tau}||\mu_2||_\infty\right)\int_0^L |\psi_t(x,t)|^2 dx - \left(\frac{2\xi-\tau}{4\tau}\right)||\mu_1||_\infty \int_0^L |\varphi_t(x,t-\tau)|^2 dx \\ &- \left(\frac{2\xi-\tau}{4\tau}\right)||\mu_2||_\infty \int_0^L |\psi_t(x,t-\tau)|^2 \end{aligned}$$

De donde se concluye que

$$\operatorname{Re}\langle AU,U\rangle_{\mathcal{H}}\leq 0,\ \text{si}\ \frac{\tau}{2}\leq\xi\leq 2\tau\left(\frac{||\gamma_i||_\infty-||\mu_i||_\infty}{||\mu_i||_i}\right)\ \text{y}\ \gamma_i,\mu_i\in L^\infty(0,L), i=1,2.$$

Por tanto, el operador A es disipativo.

Proposición 3 $0\in\rho(A)$

Demostración. Dado $(f,g,h,j,m,l)^T\in\mathcal{H}$, se demostrará que existe un único $U=(\varphi,v,\psi,w,z_1,z_2)^T\in\mathcal{D}(A)$ tal que

$$AU=F \tag{45}$$

esto es,

$$v=f(x)\in H_0^1(0,L) \tag{46}$$
$$k\varphi_{xx}-\gamma_1(x)v+k\psi_x+\mu_1(x)z_1(1)=\rho_1 g(x)\in L^2(0,L) \tag{47}$$
$$w=h(x)\in H_0^1(0,L) \tag{48}$$
$$-k\varphi_x-\gamma_2(x)w+b\psi_{xx}-k\psi+\mu_2(x)z_2(1)=\rho_2 j(x)\in L^2(0,L) \tag{49}$$
$$-z_{1\rho}(x,t,\rho)=\tau m(x,t,\rho)\in L^2\left((0,1),L^2_{\mu_1}(0,L)\right) \tag{50}$$
$$-z_{2\rho}(x,t,\rho)=\tau l(x,t,\rho)\in L^2\left((0,1),L^2_{\mu_2}(0,L)\right) \tag{51}$$

a) De (46) $v=f(x)\in H_0^1(]0,L[)$, entonces existe un único $v\in H_0^1(]0,L[)$

b) De (48) $w=h(x)\in H_0^1(0,L)$, entonces existe un único $w\in H_0^1(0,L)$

c) De (50), $z_{1\rho}(x,t,\rho)=-\tau m(x,t,\rho)\in L^2\left((0,1);L^2_{\mu_1}(0,L)\right)$

Ahora bien, integrando a $z_{1\rho}(x,t,\rho)=-\tau m(x,t,\rho)$, de 0 a ρ

$$\int_0^\rho z_{1s}(x,t,s)ds=-\tau\int_0^\rho m(x,t,s)ds$$
$$z_1(x,t,\rho)-z_1(x,t,0)=-\tau\int_0^\rho m(x,t,s)ds$$
$$z_1(x,t,\rho)=v(x,t)-\tau\int_0^\rho m(x,t,s)dds \tag{52}$$

Desde que, $m(x,t,s)\in L^2\left((0,1);L^2_{\mu_1}(0,L)\right)$ y de (55) $v(x,t)\in H_0^1(0,L)\hookrightarrow L^2(0,L)\hookrightarrow L^2\left((0,1);L^2_{\mu_1}(0,L)\right)$ y de (61) se tiene que, $z_1(x,t,\rho)\in L^2\left((0,1),L^2_{\mu_1}(0,L)\right)$.

Por lo tanto, existen únicos z_1, $z_{1\rho}\in L^2\left((0,1);L^2_{\mu_1}(0,L)\right)$

En forma análoga,

d) De (51), existen únicos z_2, $z_{2\rho}\in L^2\left((0,1),L^2_{\mu_2}(0,L)\right)$

e) De (47), se tiene

$$k\varphi_{xx}=\gamma_1(x)v-k\psi_x-\mu_1(x)z_1(1)+\rho_1 g(x)\in L^2(0,L)$$

De los resultados precedente, obtenemos; de (47),

$$k\varphi_{xx}=\widehat{f}\,,\ \text{donde}\,,\ \widehat{f}=\gamma_1(x)v-k\psi_x-\mu_1(x)z_1(1)+\rho_1 g\in L^2(0,L)$$

y con las condiciones de frontera de φ, tenemos el problema:

$$\begin{cases} k\varphi_{xx} &= \widehat{f}\in L^2(0,L)\\ \varphi(0,t) &= 0=\varphi(L,t)\end{cases}$$

Entonces, por la regularidad elíptica, existe único

$$\varphi\in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$$

f) De (49), se tiene

$$-k\varphi_x - \gamma_2(x)w + b\psi_{xx} - k\psi + \mu_2(x)z_2(1) = \rho_2 j(x) \in L^2(0,L)$$

$$w = h \in H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L) \;\Rightarrow\; \gamma_2(x)w \in L^2(0,L)\;,\; (\gamma_2 \in L^\infty(0,L))$$

$$v = f \in H_0^1(0,L) \;\Rightarrow\; v_x \in L^2(0,L) \;\Rightarrow\; \varphi_{tx} \in L^2(0,L) \;\Rightarrow\; k\varphi_x \in L^2(0,L)$$

Análogamente, como en (e)

$$\mu_2(x)z_2(1) = \mu_2(x)w \in H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)\;,\; (\mu_2 \in L^\infty(0,L))$$

De los resultados precedentes, obtenemos de (49)

$$b\psi_{xx} - k\psi = \widehat{g}\,,\ \text{donde}\,,\ \widehat{g} = k\varphi_x + \gamma_2(x)w - \mu_2(x)z_2(1) + \rho_2 j \in L^2(0,L)$$

y con las condiciones de frontera de ψ, tenemos el problema:

$$\left\{\begin{array}{rl} b\psi_{xx} - k\psi & = \widehat{g} \in L^2(0,L) \\ \psi(0,t) & = 0 = \psi(L,t) \end{array}\right.$$

entonces, por la regularidad elíptica, existe un único

$$\psi \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$$

Considerando (a)-(f), se tiene que;

Existe, un único $U = (\varphi, v, \psi, w, z_1, z_2) \in \mathcal{D}(A)$ tal que $AU = F$.

Entonces existe $A^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$.

Resta probar que, $-A^{-1}$ es acotado, es decir, existe $C > 0$ tal que,

$$|| - A^{-1}F||_{\mathcal{H}} \le C||F||_{\mathcal{H}}\,,\ \forall F \in \mathcal{H}$$

Como $-AU = F$ es equivalente a $U = -A^{-1}F$, debemos probar, considerando la norma de U, dado en (37); que $||U||_{\mathcal{H}} \le C||F||_{\mathcal{H}}\,,\ \forall \in \mathcal{H}$, donde C no depende de U ni de F

Para ello acotaremos cada sumando que aparece en la norma de U considerando el sistema,

$$-AU = F$$

Observemos, si $F = (f, g, hj, m, l) \in \mathcal{H}$ y la definición de la norma en $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} ||F||_{\mathcal{H}}^2 &= k\int_0^L |f_x + h|^2\,dx + \rho_1\int_0^L |g|^2 dx + b\int_0^L |h_x|^2 dx + \rho_2\int_0^L |j|^2 dx \\ &\quad + \xi\int_0^L \mu_1(x)\int_0^1 |m(x,t,\rho)|^2\,d\rho dx + \xi\int_0^L \mu_2(x)\int_0^1 |l(x,t,\rho)|^2\,d\rho dx \end{aligned} \tag{53}$$

Tomando el producto interno en $\mathcal{H}$ con U en (45) resulta,

$$\langle -AU, U\rangle_{\mathcal{H}} = \langle F, -U\rangle_{\mathcal{H}}$$

Tomando la parte real:

$$-\operatorname{Re}\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}\langle -AU, U\rangle_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}\langle F, -U\rangle_{\mathcal{H}} \le |\,\langle F, U\rangle_{\mathcal{H}}\,| \le ||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$$

entonces

$$-\operatorname{Re}\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} \le ||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} \tag{54}$$

Por otro lado A es disipativo, entonces resultado anterior se tiene,

$$\operatorname{Re}\langle AU,U\rangle_{\mathcal{H}} \leq -M_1||\varphi_t||_2^2 - M_2||\psi_t||_2^2 - M_3||z_1(1)||_2^2 - M_4||z_2(1)||_2^2 \tag{55}$$

donde $M_1 := ||\gamma_1||_\infty - \dfrac{(2\tau+\xi)}{2\tau}||\mu_1||_\infty$, $M_2 := ||\gamma_2||_\infty - \dfrac{(2\tau+\xi)}{2\tau}||\mu_2||_\infty$, $M_3 := (\left(\dfrac{2\xi-\tau}{4\tau}\right)||\mu_1||_\infty$ y $M_4 := \left(\dfrac{2\xi-\tau}{4\tau}\right)||\mu_2||_\infty$

Entonces, de (54) y (55) se tiene:
$M_1||\varphi_t||_2^2 + M_2||\psi_t||_2^2 + M_3||z_1(1)||_2^2 + M_4||z_2(1)||_2^2 \leq ||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$, de donde mayorando por izquierda,

$$\int_0^L |v(x,t)|^2 dx \leq M_1^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} \tag{56}$$

$$\int_0^L |w(x,t)|^2 dx \leq M_2^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} \tag{57}$$

$$\int_0^L |z_1(1)|^2 dx \leq M_3^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} \tag{58}$$

$$\int_0^L |z_2(1)|^2 dx \leq M_4^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} \tag{59}$$

De las ecuaciones (47) y (49):

$$k(\varphi_x+\psi)_x - \gamma_1(x)v + \mu_1(x)z_1(1) = \rho_1 g$$
$$-k(\varphi_x+\psi) - \gamma_2(x)w + b\psi_{xx} + \mu_2(x)z_2(1) = \rho_2 j$$

Multiplicando por φ y ψ a las ecuaciones precedentes respectivamente,

$$\big(k(\varphi_x+\psi)_x,\varphi\big)_2 + \big(-\gamma_1(x)v,\varphi\big)_2 + \big(\mu_1(x)z_1(1),\varphi\big)_2 = \big(\rho_1 g,\varphi\big)_2$$

$$\big(-k(\varphi_x+\psi),\psi\big)_2 + \big(-\gamma_2(x)w,\psi\big)_2 + \big(b\psi_{xx},\psi\big)_2 + \big(\mu_2(x)z_2(1),\psi\big)_2 = \big(\rho_2 j,\psi\big)_2$$

Sumando, aplicando integración por partes y condiciones de frontera se tiene:

$$\begin{aligned}
&-k\big(\varphi_x+\psi,\varphi_x\big)_2 - k\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_2 \\
&\qquad - \big(\gamma_1(x)v,\varphi\big)_2 - \big(\gamma_2(x)w,\psi\big)_2 \\
&\qquad\qquad + \big(\mu_1(x)z_1(1),\varphi\big)_2 - b\big(\psi_x,\psi_x\big)_2 \\
&\qquad\qquad\qquad + \big(\mu_2(x)z_2(1),\psi\big)_2 = \big(\rho_1 g,\varphi\big)_2 + \big(\rho_2 j,\psi\big)_2
\end{aligned}$$

luego, agrupando:

$$\begin{aligned}
k||\varphi_x+\psi||_2^2 + b||\psi_x||_2^2 = &-\big(\gamma_1(x)v,\varphi\big)_2 - \big(\gamma_2(x)w,\psi\big)_2 + \big(\mu_1(x)z_1(1),\varphi\big)_2 \\
&+ \big(\mu_2(x)z_2(1),\psi\big)_2 - \big(\rho_1 g,\varphi\big)_2 - \big(\rho_2 j,\psi\big)_2
\end{aligned} \tag{60}$$

Acotando cada término de (60):

$$\begin{aligned}
-(\gamma_1(x)v,\varphi)_2 &\leq ||\gamma_1||_\infty||v||_2||\varphi||_2 \leq ||\gamma_1||_\infty^2 c_\varepsilon||v||_2^2 + \varepsilon||\varphi||_2^2 \\
&\leq ||\gamma_1||_\infty^2 c_\varepsilon M_1^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \varepsilon||\varphi||_2^2\ ,\ (\text{de}\,(56))
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
-(\gamma_2(x)w,\psi)_2 &\leq ||\gamma_2||_\infty||w||_2||\psi||_2 \leq ||\gamma_2||_\infty^2 c_\varepsilon||w||_2^2 + \varepsilon||\psi||_2^2 \\
&\leq ||\gamma_2||_\infty^2 c_\varepsilon M_2^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \varepsilon||\psi||_2^2\ ,\ (\text{de}\,(57))
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}(\mu_1(x)z_1(1),\varphi)_2 &\leq ||\mu_1||_\infty ||z_1(1)||_2||\varphi||_2 \leq ||\mu_1||_\infty^2 c_\varepsilon ||z_1(1)||_2^2+\varepsilon||\varphi||_2^2\\ &\leq ||\mu_1||_\infty^2 c_\varepsilon M_3^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}+\varepsilon||\varphi||_2^2\ ,\ (\text{de}\,(58))\end{aligned} \tag{63}$$

$$(\mu_2(x)z_2(1),\psi)_2 \leq ||\mu_2||_\infty^2 c_\varepsilon M_4^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}+\varepsilon||\psi||_2^2\ ,\ (\text{de}\,(59))$$

$$-(\rho_1 g,\varphi)_2 \leq ||\rho_1 g||_2||\varphi||_2 \leq c_\varepsilon \rho_1^2||g||_2^2+\varepsilon||\varphi||_2^2 \leq c_\varepsilon\rho_1||F||_{\mathcal{H}}^2+\varepsilon||\varphi||_2^2\ ,\ (\text{ de}\,(53))$$

$$-(\rho_2 j,\psi)_2 \leq c_\varepsilon\rho_2||F||_{\mathcal{H}}^2+\varepsilon||\psi||_2^2\ ,\ (\text{ de}\,(53))$$

Sumando (61)-(62) en (60):

$$\begin{aligned}k||\varphi_x+\psi||_2^2+b||\psi_x||^2 &\leq ||\gamma_1||_\infty^2 c_\varepsilon M_1^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}+\varepsilon||\varphi||_2^2+||\gamma_2||_\infty^2 c_\varepsilon M_2^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}+\varepsilon||\psi||_2^2\\ &+||\mu_1||_\infty^2 c_\varepsilon M_3^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}+\varepsilon||\varphi||_2^2+||\mu_2||_\infty^2 c_\varepsilon M_4^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}+\varepsilon||\psi||_2^2\\ &+c_\varepsilon\rho_1||F||_{\mathcal{H}}^2+\varepsilon||\varphi||_2^2+c_\varepsilon\rho_2||F||_{\mathcal{H}}^2+\varepsilon||\psi||_2^2\\ &=c_\varepsilon\left(M_1^{-1}||\gamma_1||_\infty^2+M_2^{-1}||\gamma_2||_\infty^2+M_3^{-1}||\mu_1||_\infty^2+M_4^{-1}||\mu_2||_\infty^2\right)||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\\ &+2\varepsilon||\psi||_2^2+4\varepsilon||\varphi||_2^2+c_\varepsilon(\rho_1+\rho_2)||F||_{\mathcal{H}}^2\\ &\leq c_\varepsilon M_5^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}+c_\varepsilon M_6^{-1}||F||_{\mathcal{H}}^2+2\varepsilon c_2||\psi_x||^2+4\varepsilon c_1||\varphi_x+\psi||_2^2\\ &+4\varepsilon c_1c_2||\psi_x||_2^2\end{aligned}$$

donde $M_5:=M_1^{-1}||\gamma_1||_\infty^2+M_2^{-1}||\gamma_2||_\infty^2+M_3^{-1}||\mu_1||_\infty^2+M_4^{-1}||\mu_2||_\infty^2$ y $M_6:=\rho_1+\rho_2$

Entonces,

$$\begin{aligned}(k-4\varepsilon c_1)||\varphi_x+\psi||_2^2+(b-2\varepsilon c_2-4\varepsilon c_1c_2)||\psi_x||_2^2 &\leq c_\varepsilon M_5||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}+c_\varepsilon M_6||F||_{\mathcal{H}}^2\\ &\leq\left(\frac{c_\varepsilon M_5}{2}+c_\varepsilon M_6\right)||F||_{\mathcal{H}}^2+\frac{c_\varepsilon M_5}{2}||U||_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Mayorando por la izquierda a la expresión precedente

$$M_7\left(k||\varphi_x+\psi||_2^2+b||\psi_x||_2^2\right)\leq\left(\frac{c_\varepsilon M_5}{2}+c_\varepsilon M_6\right)||F||_{\mathcal{H}}^2+\frac{c_\varepsilon M_5}{2}||U||_{\mathcal{H}}^2$$

Donde

$$M_7:=\text{mín}\left\{\frac{k-4\varepsilon c_1}{2}\,,\ \frac{b-2\varepsilon c_2-4\varepsilon c_1c_2}{b}\right\}$$

Entonces

$$k||\varphi_x+\psi||_2^2+b||\psi_x||_2^2\leq M_7^{-1}c_\varepsilon\left(\frac{M_5}{2}+M_6\right)||F||_{\mathcal{H}}^2+M_7^{-1}\frac{c_\varepsilon M_5}{2}||U||_{\mathcal{H}}^2 \tag{64}$$

De (56) y (57) se tienen:

$$\rho_1||v||_2^2\leq\rho_1M_1^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\leq\rho_1M_1^{-1}c_\varepsilon||F||_{\mathcal{H}}^2+\varepsilon||U||_{\mathcal{H}}^2$$

$$\rho_1||w||_2^2\leq\rho_2M_2^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\leq\rho_2M_2^{-1}c_\varepsilon||F||_{\mathcal{H}}^2+\varepsilon||U||_{\mathcal{H}}^2$$

De (50), se tiene:

$$z_{1\rho}=-\tau m$$

multiplicando ambos lados por $2\overline{z}_1$

$$2z_{1\rho}\overline{z}_1=-2\tau m\overline{z}_1$$

integrando de 0 a ρ:

$$\int_0^\rho 2z_{1\eta}(x,t,\eta)\overline{z}_1(x,t,\eta)d\eta=-2\int_0^\rho m(x,t,\eta)\overline{z}_1(x,t,\eta)d\eta$$

Tomando la parte real ambos miembros:

$$\int_0^\rho 2\,\mathrm{Re}\big(z_{1\eta}(x,t,\eta)\overline{z}_1(x,t,\eta)\big)d\eta = -2\,\mathrm{Re}\int_0^\rho m(x,t,\eta)\overline{z}_1(x,t,\eta)d\eta$$

$$|z_1(x,t,\rho)|^2 - |z_1(x,t,0)|^2 = -2\,\mathrm{Re}\int_0^\rho m(x,t,\eta)\overline{z}_1(x,t,\eta)d\eta$$

Integrando respecto a x de 0 a L:

$$\int_0^L |z_1(x,t,\rho)|^2dx - \int_0^L |\varphi_t(x,t)|^2dx = -2Re\int_0^L\int_0^\rho m(x,t,\eta)\overline{z}_1(x,t,\eta)d\eta dx$$

$$\int_0^L |z_1(x,t,\rho)|^2dx - \int_0^L |\varphi_t(x,t)|^2dx \le c_7||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$$

$$\int_0^L |z_1(x,t,\rho)|^2dx \le \int_0^L |v(x,t)|^2dx + c_7||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$$

$$\mu_1(x)\int_0^L |z_1(x,t,\rho)|^2dx \le \mu_1(x)\int_0^L |v(x,t)|^2dx + \mu_1(x)c_7||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\mu_1(x)\int_0^L |z_1(x,t,\rho)|^2dxd\rho &\le \int_0^1\mu_1(x)\int_0^L |v(x,t)|^2dxd\rho + \int_0^1\mu_1(x)c_7||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}d\rho\\ &\le ||\mu_1||_\infty\int_0^L|v(x,t)|^2dx + ||\mu_1||_\infty c_7||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\\ &\le ||\mu_1||_\infty M_1^{-1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + ||\mu_1||_\infty c_7||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\\ &= ||\mu_1||_\infty(M_1^{-1}+c_7)||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

$$\tau\int_0^1\mu_1(x)\int_0^L |z_1(x,t,\rho)|^2dxd\rho \le \tau c_8^2c_\varepsilon||F||_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon||U||_{\mathcal{H}}^2 \tag{65}$$

Análogamente se obtiene:

$$\tau\int_0^1\mu_2(x)\int_0^L |z_2(x,t,\rho)|^2dxd\rho \le \tau c_9^2c_\varepsilon||F||_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon||U||_{\mathcal{H}}^2$$

sumando (64)-(65) y de (37):

$$\begin{aligned}||U||_{\mathcal{H}}^2 &\le M_7^{-1}c_\varepsilon\big(\frac{M_5}{2}+M_6\big)||F||_{\mathcal{H}}^2 + M_7^{-1}c_\varepsilon M_5||U||_{\mathcal{H}}^2 + \rho_1M_1c_\varepsilon||F||_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon||U||_{\mathcal{H}}^2\\ &\quad + \rho_2M_2c_\varepsilon||F||_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon||U||_{\mathcal{H}}^2 + \tau c_8^2c_\varepsilon||F||_H^2 + \varepsilon||U||_{\mathcal{H}}^2 + \tau c_9^2||F||_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon||U||_{\mathcal{H}}^2\\ ||U||_{\mathcal{H}}^2 &\le \widehat{c}||F||_{\mathcal{H}}^2 + \big(4\varepsilon + \frac{M_7^{-1}c_\varepsilon M_5}{2}\big)||U||_{\mathcal{H}}^2\\ (1-\widehat{\varepsilon})||U||_{\mathcal{H}}^2 &\le \widehat{c}||F||_{\mathcal{H}}^2\,,\ 1-\widehat{\varepsilon}>0\,,\,.\end{aligned}$$

Entonces

$$||U||_{\mathcal{H}}^2 \le \widehat{c}_1||F||_{\mathcal{H}}^2 \ \Rightarrow\ ||U||_{\mathcal{H}} \le \sqrt{\widehat{c}_1}||F||_{\mathcal{H}}$$

Por lo tanto, $-A^{-1}$ es acotado

De este modo resulta que, $0\in\rho(A)$, y como A es disipativo, entonces, A genera un C_0-semigrupo $S(t)=e^{At}$ de contracciones sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Teorema 3 El operador A definido en (26) es un generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 de contracciones sobre $\mathcal{H}$.

Demostración. En efecto, tenemos que $D(A)$ es denso en $\mathcal{H}$. De las proposiciones 2 y 3 el operador A es disipativo, $0\in A$. Luego teniendo en cuenta el Teorema 2 , se concluye que el operador A es un generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 de contracciones sobre el espacio $\mathcal{H}$. Por tanto, el sistema de Timoshenko con retardo, está bien puesto.

Regularidad de la solución

El problema de valor inicial en (25) se tienen:

i) Si $U_0 \in \mathcal{H}$, entonces $U \in C^0([0,+\infty);\mathcal{H}), U$ es una solución generalizada

ii) Si $U_0 \in \mathcal{D}(A)$, entonces $U \in C^0([0,+\infty);\mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,+\infty))$;

Para el caso $U_0 \in \mathcal{D}(A)$, entonces

$$\begin{aligned} U(t) \in \mathcal{D}(A) :\ & \varphi \in H_0^1 \cap H^2\,,\ \varphi_t \in H_0^1\,,\ \psi \in H_0^1 \cap H^2\,,\ \psi_t \in H_0^1\ \ z_1 \in L^2\left((0,1);L^2_{\mu_1}(0,L)\right)\,, \\ & z_2 \in L^2\left((0,1);L^2_{\mu_2}(0,L)\right) \\ U(t) \in \mathcal{H} :\ & \varphi_t \in H_0^1\,,\ \varphi_{tt} \in L^2\,,\ \psi_t \in H_0^1\,,\ \psi_{tt} \in L^2\ \ z_{1t} \in L^2\left((0,1);L^2_{\mu_1}(0,L)\right)\,, \\ & z_{2t} \in L^2\left((0,1);L^2_{\mu_2}(0,L)\right) \end{aligned}$$

De las dos informaciones precedente se tiene:

$$\varphi \in C^0([0,+\infty);H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \cap C^1([0,+\infty);H_0^1(0,L)) \cap C^2([0,+\infty);L^2(0,L))$$

$$\psi \in C^0([0,+\infty);H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \cap C^1([0,+\infty);H_0^1(0,L)) \cap C^2([0,+\infty);L^2(0,L))$$

$$z_1\,,\ z_{1t} \in L^2\left((0,1);L^2_{\mu_1}(0,L)\right)$$

$$z_2\,,\ z_{2t} \in L^2\left((0,1);L^2_{\mu_2}(0,L)\right)$$

4. Conclusión

En el presente artículo, hemos considerado el sistema de Timoshenko que modela el movimiento de vigas y puentes, que a la vez nos diferencia a muchos artículos que estudiaron este sistema es que, está afectado de un retardo tanto en el movimiento transversal como en el movimiento rotacional. Sabemos que un retardo en el tiempo de sistemas estudiado puede producir una desestabilización en su comportamiento asintótico ver [11].

Para el estudio realizado, hemos comprobado que el problema esta bien puesto, es decir, que el sistema tiene una única solución, para ello primeramente hemos buscado establecer un sistema equivalente al sistema planteado, adicionando dos ecuaciones suplementarias y de este modo se pudo determinar la energía asociada al sistema equivalente, luego aplicamos la teoría de semigrupos lineales, para probar que el sistema está bien puesto. Dejamos como estudio completar el comportamiento asintótico del presente artículo.

Referencias bibliográficas

[1] Abdallah C, Dorato P, Benitez-Read J, Byrne R.(1993). Delayed Positive Feedback Can Stabilize Oscillatory System. *San Francisco:In American Control Conference*. 3106-3107

[2] Alabau-Boussouira, F.(2007). Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control. *Nonlinear Differential Equations and Applications*. 14, 643-669.

[3] Ammar-Khodja, F. Benabdallah, A., Muñoz Rivera, J. E. & Racke, R.(2003). Energy decay for Timoshenko systems of memory type. *Journal of Differential Equations*. 194(1), 82-115.

[4] Brézis, Haim.(2011).*Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York.

[5] Beuter Anne, Bélair Jacques, and Labrie Christiane.(1993). Feedback and delays in neurological diseases: A modeling study using dynamical systems. *Bulletin of Mathematical Biology*. 1993, 55(3): 525-541.

[6] Feng Dexing, Shi Donghua, & Zhang Weitao.(2001). Boundary feedback stabilization of timoshenko beam with boundary dissipation. *Science in China Series A: Mathematics*. 41(5), 483-490.

[7] Fernandez Sare, H. and Muñoz Rivera, J.(2008). Stability of Timoshenko system with past history.*J. Math. Anal. Appl*. 339, 482-502.

[8] Kim.J.U and Renardy. Y.(1987). Boundary control of the Timoshenko beam.*SIAM, J. Control and Optimizatin*. 25, 1417-1429.

[9] Pazy, A.(1983).*Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, in: Applied Mathematical Sciences*. vol. 44, Springer-Verlag, New York.

[10] Rivera, J. E. M. (2007). Estabilizacao de Semigrupos e Aplicações. Textos Avanzados. LNCC. Petropolis.

[11] Racke R.(2012). Instability of coupled systems with delay. *Comm Pure Appl Anal*. 11(5), 1753-1773

[12] Raposo. C. A, Ferreira. J, Santos. M. L and Castro.N. N. O.(2005). Exponential Stability for the Timoshenko System with Two Weak Damping.*Appl. Math.Lett*. 18, 535-541.

[13] Richard J. P(2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10), 1667-1694.

[14] Shi. D. H and Feng.D. X.(2001). Exponential decay of Timoshenko Beam with locally distributed feedback. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. 18, 395-403.

[15] Tijani A. Apalara.(2014). Well-posedness and exponential stability for a linear damped Timoshenko system with second sound and internal distributed delay.*Electronic Journal of Differential Equations*. 254, 1-15.

[16] Tijani A. Apalara.(2016). Uniform decay in weakly dissipative Timoshenko system with internal distributed delay feedbacks.*Acta Mathematica Scientia*. 36(3), 815-830.

[17] Timoshenko. S. P. and Gere.J.M.(1972). *Mechanics of Materials*. . Van Nostrand Reinhold Company, New York.