PESQUIMAT 27(2): 77–90 (2024) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v27.i2.29104 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Existencia de foliaciones holomorfas sobre variedades de Hopf

Andrés Beltran [1]***, Arturo Fernández Pérez*** [2]***, Hernán Neciosup*** [3]

Resumen: En este artículo, investigamos el problema de la existencia de foliaciones holomorfas en variedades de Hopf de dimensión 3, con un enfoque particular en las variedades de tipo excepcional. Las variedades de Hopf, al ser variedades complejas compactas y no kählerianas, ofrecen un entorno fértil para el análisis de fenómenos no triviales en el estudio de foliaciones holomorfas. En particular, estas variedades presentan estructuras geométricas que permiten la aparición de comportamientos dinámicos complejos, lo que las convierte en un caso de especial interés.

Palabras clave: Variedades de Hopf, foliaciones, transformaciones biholomorfas

On the existence of holomorphic foliations on Hopf manifolds

Abstract: In this paper, we investigate the problem of the existence of holomorphic foliations on 3-dimensional Hopf manifolds, with a particular focus on exceptional type manifolds. Hopf manifolds, being compact, non-Kähler complex manifolds, provide a fertile ground for the analysis of non-trivial phenomena in the study of holomorphic foliations. In particular, these manifolds exhibit geometric structures that allow for the emergence of complex dynamical behaviors, making them a case of special interest.

Keywords: Hopf manifold, foliations, biholomorphic transformations.

Recibido: 17/10/2024 *Aceptado:* 08/12/2024 *Publicado online:* 30/12/2024

© Los autores. Este artículo es publicado por la Revista PESQUIMAT de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Este es un artículo de acceso abierto, distribuido bajo los términos de la licencia Creative Commons Atribucion-No Comercia-CompartirIgual 4.0 Internacional.(http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) que permite el uso no comercial, distribución y reproducción en cualquier medio, siempre que la obra original sea debidamente citada. Para uso comercial, por favor póngase en contacto con revistapesquimat.matematica@unmsm.edu.pe

[1]Dpto. Ciencias-Sección Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú. e-mail: abeltra@pucp.edu.pe
[2]Departamento de Matemática - ICEX, Universidade Federal de Minas Gerais. e-mail: fernandez@ufmg.br
[3]Dpto. Ciencias-Sección Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú. e-mail: hneciosup@pucp.edu.pe
El primer autor agradece el apoyo financiero por la Dirección de Gestión de la Investigación de la PUCP a través de la subvención GDI 2017-1-0061.

1. Introducción

Las variedades de Hopf fueron estudiadas por primera vez por H. Hopf en 1948 [3]. En el contexto de la geometría algebraica y la topología algebraica, una variedad de Hopf se construye a partir del espacio $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ mediante una acción libre propiamente discontinua de un grupo cíclico G. Esta acción se puede interpretar como una contracción f de $\mathbb{C}^n$ en el origen, tal que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y además los autovalores de la matriz jacobiana $J_f(\mathbf{0})$ tienen módulo menor que 1. De manera más precisa, la acción del grupo cíclico infinito generado por una contracción f es libre y propiamente discontinua en $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, y el cociente $\frac{(\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\})}{\langle f \rangle}$, donde $\langle f \rangle$ actúa por multiplicación, da lugar a una variedad compleja compacta de dimensión n, conocida como variedad de Hopf primaria que denotaremos por X_f.

K. Kodaira en [4], [5], definió una variedad de Hopf como aquella variedad cuyo recubrimiento universal es holomórficamente isomorfo a $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Por su parte M . Kato, en [7] demostró que cualquier variedad de Hopf es una subvariedad de una variedad de Hopf primaria de mayor dimensión.

Si consideramos dos contracciones f_1 y f_2 de $\mathbb{C}^n$ en el origen, las variedades de Hopf asociadas X_{f_1} y X_{f_2} son isomorfas si, y solo si, existe un automorfismo g de $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ tal que $f_2 = g \circ f_1 \circ g^{-1}$. Así, clasificar las variedades de Hopf, salvo isomorfismos, es equivalente a clasificar las contracciones de $\mathbb{C}^n$ en el origen, salvo conjugación por automorfismos de $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$. Este problema aún no ha sido resuelto completamente, aunque L. Reich [8] proporcionó avances significativos. En su trabajo se enfoca en la clasificación de aplicaciones biholomorfas con puntos fijos atractores. Reich aborda la conexión entre representaciones formales y analíticas, ofreciendo una clasificación exhaustiva basada en la forma normal de Jordan y otras simplificaciones posibles. Además, presenta aplicaciones concretas en dos y tres dimensiones, con una perspectiva detallada y práctica de sus resultados teóricos.

En este trabajo, nos centramos en el problema de la clasificación de foliaciones holomorfas en variedades de Hopf. Siguiendo los resultados de Kato, es suficiente restringir nuestro análisis a foliaciones holomorfas sobre variedades de Hopf primarias. La clasificación de foliaciones holomorfas no singulares en superficies de Hopf fue establecida por D. Mall [6], mientras que la clasificación de foliaciones holomorfas no singulares de dimensión y codimensión uno en variedades de Hopf diagonales de dimensión tres o superior ha sido estudiada por M. Corrêa, A. Fernández-Pérez, A. Ferreira y M. Verbitsky en [2].

Nos enfocamos en el problema de la existencia de foliaciones holomorfas en variedades de Hopf de tipo excepcional. El artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2, presentamos las formas normales de aplicaciones biholomorfas según L. Reich, tanto en dimensión dos como en tres, y discutimos los casos en los que estas formas normales se extienden naturalmente a dimensiones mayores ($n > 3$). En la Sección 3, abordamos el problema de la existencia de foliaciones holomorfas en variedades de Hopf, proporcionando un resumen de los casos estudiados hasta la fecha, con especial atención a los casos en dimensión tres, que aún no han sido completamente clasificados. Finalmente, en la Sección 4, ofrecemos nuevos avances sobre la existencia de foliaciones holomorfas en un tipo particular de variedades de Hopf excepcionales en dimensión tres.

2. Formas normales de aplicaciones biholomorfas con un punto fijo atractor

En esta sección, presentamos un resumen de los resultados obtenidos por L. Reich en [8] y [9]. En estos trabajos, Reich demuestra que las formas normales de aplicaciones biholomorfas con un punto fijo atractor en el origen de $\mathbb{C}^n$, salvo automorfismos, coinciden con las formas normales de Poincaré-Dulac. Estos resultados destacan la relevancia de la estructura de Jordan de la parte lineal en la normalización de dichas aplicaciones. Este vínculo entre las formas normales de Reich y las de Poincaré-Dulac destaca la importancia de la teoría de la normalización en el análisis de sistemas dinámicos complejos.

Finalizamos esta sección describiendo las formas normales para los casos $n = 2$ y $n = 3$, así como las definiciones de variedades de Hopf excepcionales e hiper-excepcionales.

Definición 1. *Un automorfismo holomorfo $f \in Aut(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, con $n \geq 2$, es llamado una contracción en el punto $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ si f satisface las siguientes condiciones:*

1. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
2. $\lim\limits_{\nu \to \infty} f^{\nu}(z) = \mathbf{0}$ *para todo* $z \in \mathbb{C}^n$,
3. *Para cualquier vecindad U de $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ existe $\nu_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que*

$$f^{\nu}(U) \subset U \quad \textit{para todo} \quad \nu \geq \nu_0.$$

Definición 2. *Una contracción $\tilde{f}$ de $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ es una forma normal de Poincaré-Dulac si su parte lineal de $\tilde{f}$ está en la forma canónica de Jordan. Más específicamente, supongamos que la matriz jacobiana de $\tilde{f}$ se divide en $k+1$ bloques, y que el $i-$ésimo bloque tiene s_i filas. Definimos $t_0 := 0$ y $t_i = s_1 + s_2 + \cdots + s_i$, $i \geq 1$. Entonces, existen polinomios*

$$P_{t_{i-1}+j}(z_{t_i+1}, z_{t_i+2}, \cdots, z_n), \quad 1 \leq j \leq s_i,$$

tales que la contracción $\tilde{f}$ se expresa como

$$\tilde{f}(z_1, z_2, \cdots, z_n) = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_n).$$

Donde los $\tilde{z}_i$ tiene la siguiente la forma:

$$\begin{array}{rcllll}
\tilde{z}_1 & = & \mu_1 z_1 & + & z_2 & +P_1(z_{t_1+1}, \cdots, z_n), \\
\tilde{z}_2 & = & z_1 + \mu_2 z_2 & + & z_3 & +P_2(z_{t_1}, \cdots, z_n), \\
& \vdots & & & & \\
\tilde{z}_{t_1} & = & \mu_1 z_{t_1} & & & +P_{t_1}(z_{t_1+1}, \cdots, z_n), \\
\tilde{z}_{t_1+1} & = & \mu_{t_1+1} z_{t_1+1} & + & z_{t_1+2} & +P_{t_1+1}(z_{t_2+1}, \cdots, z_n), \\
& \vdots & & & & \\
\tilde{z}_{t_2} & = & \mu_{t_2} z_{t_2} & + & & P_{t2(z_{t_2+1}, \cdots z_n)}, \\
& \vdots & & & & \\
\tilde{z}_{t_k} & = & \mu_{t_k} z_{t_k} & & & +P_{t_k}(z_{t_k+1}, \cdots, z_n), \\
\tilde{z}_{t_k+1} & = & \mu_{t_k+1} z_{t_k+1} & + & z_{t_k+2}, & \\
& \vdots & & & & \\
\tilde{z}_n & = & \mu_n z_n. & & &
\end{array}$$

Los polinomios $P_{t_{i-1}+j}(z_{z_{t_i}+1}, \cdots, z_n)$, para $1 \leq j \leq s_i$, son sumas de monómios de la forma $c z_{t_i+1}^{\alpha_{t_i}+1} z_{t_i+2}^{\alpha_{t_i}+2} \cdots z_n^{\alpha_n}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, con $\alpha_{t_i+1}, \alpha_{t_i+2}, \cdots, \alpha_n$ tales que

$$\mu_{t_i+1}^{\alpha_{t_i+1}} \mu_{t_i+2}^{\alpha_{t_i+2}} \cdots \mu_n^{\alpha_n} = \mu_{t_{i-1}+1}.$$

El siguiente resultado demuestra que cualquier contracción de $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ puede ser transformada, mediante un cambio de coordenadas dado por un automorfismo, a una forma más simple conocida como la forma normal de Poincaré-Dulac. Este proceso de normalización es clave en el análisis de sistemas dinámicos complejos.

Teorema 1 (L. Reiech [9]). *Sea f una contracción de $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$. Existe un automorfismo $g \in Aut(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ tal que*

$$f = g \circ \tilde{f} \circ g^{-1},$$

donde $\tilde{f}$ es una forma normal de Poincaré-Dulac.

La construcción explicita de las formas normales de Poincaré-Dulac se ha logrado principalmente en los casos $n = 2$ y $n = 3$. A continuación, detallamos estos casos específicos:

- $n = 2$: **Superficies de Hopf**

  1. Caso genérico:
  $$f(z_1, z_2) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2),$$
  donde no existe relación del tipo $\mu_1^{r_1} = \mu_2^{r_2}; \quad r_i \in \mathbb{Z}_+$.
  2. Caso clásico:
  $$f(z_1, z_2) = (\mu z_1, \mu z_2).$$
  3. Caso resonante:
  $$f(z_1, z_2) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2),$$
  con $\mu_1 = \mu_2^r; \quad r \in \mathbb{N}_{>1}$.
  4. Caso hiper-resonante:
  $$f(z_1, z_2) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2),$$
  con $\mu_1^{r_1} = \mu_2^{r_2}; \quad 1 < r_1 \leq r_2, \quad r_i \in \mathbb{Z}_+$.
  5. Caso excepcional:
  $$f(z_1, z_2) = (\mu_1 z_1 + z_2^r, \mu_2 z_2),$$
  con $\mu_1 = \mu_2^r; \quad r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

- $n = 3$: **Variedad de Hopf**

  1. $\mu_2 = \mu_1^\nu,\ \nu \geq 2,\ \mu_2 \neq \mu_3$ sin la relación $\mu_3 = \mu_1^\alpha \mu_2^\beta;\ \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta \geq 2$,
  $$\begin{aligned} f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2 + z_1^\nu, \mu_3 z_3), \quad \text{o bien} \\ f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \mu_3 z_3). \end{aligned}$$
  2. $\mu_2 = \mu_1^\nu,\ \nu \geq 2,\ \mu_3 = \mu_1^{\alpha + k\nu} \mu_2^{\beta - k},\ \alpha + \beta \geq 2,\ 0 \leq \alpha \leq \nu,\ 0 \leq k \leq \beta$,
  $$\begin{aligned} f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2 + z_1^\nu, \mu_3 z_3 + z_1^\alpha z_2^\beta), \quad \text{o bien} \\ f(z_1, z_2, z_3) &= \left(\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \mu_3 z_3 + z_1^{\alpha+s} z_2^{\beta-s} + \sum_{k=s+2}^{\beta} b_k z_1^{\alpha+k\nu} z_2^{\beta-k}\right), \text{ o bien} \\ f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \mu_3 z_3). \end{aligned}$$
  3. Sin la relación $\mu_2 = \mu_1^\nu,\ \nu \geq 2,\ \mu_2 \neq \mu_1,\ \mu_3 = \mu_1^{\alpha+k\lambda} \mu_2^{\beta - k\mu}$, $0 \leq \alpha \leq \lambda$, $0 \leq k \leq \lceil \frac{\beta}{\mu} \rceil$, donde $\lceil \frac{\beta}{\mu} \rceil$ es el mayo entero de $\frac{\beta}{\mu}$,
  $$f(z_1, z_2, z_3) = \left(\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \mu_3 z_3 + z_1^{\alpha+k_0\lambda} z_2^{\beta - k_0\mu} + \sum_{k \geq k_0} b_k z_1^{\alpha+k\lambda} z_2^{\beta-k\mu}\right),$$
  o bien
  $$f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \mu_3 z_3).$$

4. $\mu_2 = \mu_1^{\nu},\ \nu \geq 2,\ \mu_2 = \mu_3$ (forma diagonal),

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2 + z_1^{\nu}, \mu_3 z_3), \text{ o bien} \\ f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \mu_3 z_3). \end{aligned}$$

5. $\mu_2 = \mu_1,\ \mu_3 = \mu_1^{\nu};\ \nu \geq 2$ (forma diagonal),

$$f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \mu_3 z_3 + P(z_1, z_2)), \quad \text{donde } deg(P) = \nu,$$

o bien

$$f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \mu_3 z_3).$$

6. $\mu_1 = \mu_2,\ \mu_3 = \mu_1^{\nu},\ \nu \geq 2$ (bloque de longitud 2),

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, z_1 + \mu_2 z_2, \mu_3 z_3 + z_2^{\nu}), \text{ o bien} \\ f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, z_1 + \mu_2 z_2, \mu_3 z_3). \end{aligned}$$

7. $\mu_2 = \mu_3,\ \mu_2 = \mu_1^{\nu},\ \nu \geq 2$ (bloque de longitud 2),

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2 + z_2^{\nu}, z_2 + \mu_3 z_3), \quad \text{o bien} \\ f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, z_2 + \mu_3 z_3 + z_1^{\nu}), \quad \text{o bien} \\ f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, z_2 + \mu_3 z_3). \end{aligned}$$

8. En los casos restantes, la forma normal corresponde a la forma normal de Jordan de la parte lineal.

De acuerdo con la expresión de la contracción, clasificamos las variedades de Hopf en las siguientes familias.

2.1. Variedades de Hopf Diagonales en $\mathbb{C}^n$

Cuando el grupo $\langle f \rangle$ está generado por una contracción diagonal, $f(z_i, \ldots, z_n) = (\mu_1 z_1, \ldots, \mu_n z_n)$, diremos que la variedad X_f es una variedad de Hopf diagonal. Clasificamos las variedades de Hopf diagonales en tres tipos:

- Una variedad de Hopf diagonal X_f es llamada **Clásica**, cuando f es de la forma

$$f(z_1, \ldots, z_n) = (\mu z_1, \mu z_2, \ldots, \mu z_n),\ \mu \in \mathbb{C},\ 0 < |\mu| < 1.$$

- Una variedad de Hopf diagonal X_f es llamada **Genérica**, cuando f es de la forma

$$f(z_1, \ldots, z_n) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \ldots, \mu_n z_n),$$

con $0 < |\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \cdots \leq |\mu_n| < 1$ y no existe relación no trivial entre los $\mu_i's$ del tipo

$$\prod_{i \in A} \mu_i^{r_i} = \prod_{j \in B} \mu_j^{r_j},\ r_i, r_j \in \mathbb{N},\ A \cap B = \emptyset,\ A \cup B = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

- Una variedad de Hopf diagonal X_f es llamada **Intermediaria**, cuando f es de la forma

$$f(z_1, z_2, \cdots, z_n) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \cdots, \mu_n z_n), \text{ donde}$$

  $\mu_i \in \mathbb{C}^*$, $i = 1, 2, \cdots, n$ tal que

  - $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r, \ 0 < |\mu_1| \leq |\mu_{r+1}| \leq \cdots |\mu_n| < 1$, donde $2 \leq r \leq n-1$,
  - No existe relación entre los $\mu_i' s$ de la forma

$$\prod_{i \in A} \mu_i^{r_i} = \prod_{j \in B} \mu_j^{r_j}, \ r_i, r_j \in \mathbb{N}, \ A \cap B = \emptyset, \ A \cup B = \{1, r+1, \cdots, n\}.$$

2.2. Variedades de Hopf excepcionales en $\mathbb{C}^3$

Sea $f \in Aut(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ una contracción en origen de $\mathbb{C}^3$. Diremos que la variedad de Hopf X_f es de tipo excepcional si su forma normal de Poincaré-Dulac tiene una de las siguientes formas:

1. $f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2 + z_1^\nu, \mu_3 z_3)$, con $\mu_2 = \mu_1^\nu, \ \nu \geq 2, \ \mu_2 \neq \mu_3$, sin que se cumpla la relación $\mu_3 = \mu_1^\alpha \mu_2^\beta, \ \alpha, \beta \geq 0, \ \alpha + \beta \geq 2$.

2. $f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2 + z_1^\nu, \mu_3 z_3)$, con $\mu_2 = \mu_1^\nu, \ \nu \geq 2, \ \mu_2 = \mu_3$.

3. $f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, z_1 + \mu_2 z_2, \mu_3 z_3 + z_2^\nu)$, o bien $f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, z_1 + \mu_2 z_2, \mu_3 z_3)$, con $\mu_1 = \mu_2, \ \mu_3 = \mu_1^\nu, \ \nu \geq 2$.

4. $f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2 + z_2^\nu, z_2 + \mu_3 z_3)$, o bien
   $f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, z_2 + \mu_3 z_3 + z_1^\nu)$, o bien
   $f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, z_2 + \mu_3 z_3)$, con $\mu_2 = \mu_3, \ \mu_2 = \mu_1^\nu, \ \nu \geq 2$.

2.3. Variedades de Hopf hiper-excepcionales en $\mathbb{C}^3$

Sea $f \in Aut(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$ una contracción en origen de $\mathbb{C}^3$. Diremos que la variedad de Hopf X_f es de tipo hiper-excepcional si f una de las siguientes formas:

1.
$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, z_3) &= (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2 + z_1^\nu, \mu_3 z_3 + z_1^\alpha z_2^\beta), \ \text{ o bien} \\ f(z_1, z_2, z_3) &= \left(\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \mu_3 z_3 + z_1^{\alpha+s} z_2^{\beta-s} + \sum_{k=s+2}^{\beta} b_k z_1^{\alpha+k\nu} z_2^{\beta-k}\right), \end{aligned}$$

   donde, $\mu_2 = \mu_1^\nu, \ \nu \geq 2, \ \mu_3 = \mu_1^{\alpha+k\nu} \mu_2^{\beta-k}, \ \alpha + \beta \geq 2, \ 0 \leq \alpha \leq \nu, \ 0 \leq k \leq \beta$.

2.
$$f(z_1, z_2, z_3) = \left(\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \mu_3 z_3 + z_1^{\alpha+k_0\lambda} z_2^{\beta-k_0\mu} + \sum_{k \geq k_0} b_k z_1^{\alpha+k\lambda} z_2^{\beta-k\mu}\right),$$

   sin que se cumpla la relación $\mu_2 = \mu_1^\nu, \ \nu \geq 2, \ \mu_2 \neq \mu_1, \ \mu_3 = \mu_1^{\alpha+k\lambda} \mu_2^{\beta-k\mu}$, $0 \leq \alpha \leq \lambda$, $0 \leq k \leq \lceil \frac{\beta}{\mu} \rceil$.

3.
$$f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2, \mu_3 z_3 + P(z_1, z_2)),$$

   donde $\deg(P) = \nu, \ \mu_2 = \mu_1, \ \mu_3 = \mu_1^\nu; \ \nu \geq 2$.

Ahora que hemos descrito las formas normales de las aplicaciones biholomorfas, nos enfocamos en un problema central dentro de la teoría de foliaciones: la existencia de foliaciones holomorfas sobre variedades de Hopf. Este es un tema de considerable interés, ya que las variedades de Hopf representan ejemplos clave de superficies complejas no kählerianas, cuyas características geométricas hacen que el estudio de foliaciones holomorfas en ellas sea especialmente desafiante y revelador.

3. Foliaciones holomorfas sobre variedades de Hopf

En esta sección, revisaremos los principales resultados obtenidos hasta la fecha sobre la existencia de foliaciones holomorfas en variedades de Hopf. Abordaremos tanto los casos clásicos como los desarrollos más recientes, destacando aquellos donde se han identificado foliaciones explícitas.

Es importante recordar que las variedades de Hopf, al ser compactas, no kählerianas y poseer una estructura compleja, presentan un entorno especialmente adecuado para estudiar fenómenos no triviales en foliaciones holomorfas. Estas variedades, originalmente descritas como cocientes de $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ por una acción discreta, constituyen un laboratorio natural para examinar cómo las estructuras dinámicas y geométricas de una variedad afectan la existencia y comportamiento de las foliaciones.

3.1. Foliaciones holomorfas

Sea X una variedad compleja de dimensión n. Una distribución holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensión k en X es determinada por un sub-haz coherente $T_\mathcal{F}$, de rango genérico k del haz tangente T_X, tal que $T_X/T_\mathcal{F} = \mathcal{N}_\mathcal{F}$ es libre de torsión. Esto se expresa mediante la siguiente secuencia exacta de haces

$$0 \to T_\mathcal{F} \to T_X \to \mathcal{N}_\mathcal{F} \to 0. \tag{1}$$

El conjunto singular de la distribución $\mathcal{F}$ es el conjunto

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \{x \in X : (\mathcal{N}_\mathcal{F})_x \text{ no es un } \mathcal{O}_X - \text{módulo libre de rango } n-k\}$$

Si $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$, diremos que la distribución $\mathcal{F}$ es regular.
Una distribución holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensión k es una **foliación holomorfa singular de dimensión** k en X, si $\mathcal{F}$ es involutiva, es decir, si $[T_\mathcal{F}, T_\mathcal{F}] \subset T_\mathcal{F}$, donde $[\ ,\ ]$ denota el corchete de Lie.
El dual de $T_\mathcal{F}$ es el haz cotangente de $\mathcal{F}$ denotado por $T^*_\mathcal{F}$, cuyo determinante $\det(T^*_\mathcal{F}) = (\wedge^k T^*_\mathcal{F})^{**}$ es el fibrado canónico de la foliación denotado por $K_\mathcal{F}$.

En $X\setminus\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, los haces de la secuencia (1) son localmente libres. Como el conjunto $Sing(\mathcal{F})$ tiene codimensión al menos 2, obtenemos la fórmula de adjunción

$$K_X = K_\mathcal{F} \otimes \det(\mathcal{N}^*_\mathcal{F}).$$

Dualizando la secuencia (1), obtenemos la secuencia exacta

$$0 \to \mathcal{N}^*_\mathcal{F} \to T^*_X = \Omega^1_X \to T^*_\mathcal{F} \to 0. \tag{2}$$

$\left(\Omega^i_X = \wedge^i T^*_X\right)$.
Como consecuencia, obtenemos el siguiente morfismo inyectivo de haces

$$\wedge^{n-k}\mathcal{N}^*_\mathcal{F} \to \wedge^{n-k}\Omega^1_X,$$

que induce una secuencia global $\omega \in H^0(X, \Omega^{n-k}_X \otimes \det(\mathcal{N}_\mathcal{F}))$, donde $\det(\mathcal{N}_\mathcal{F}) = (\wedge^{n-k}\mathcal{N}^*_\mathcal{F})^*$. Dado que la condición $T_X/T_\mathcal{F} = \mathcal{N}_\mathcal{F}$ sea libre de torsión es equivalente a decir que $\Omega^1_X/\mathcal{N}^*_\mathcal{F}$ sea libre de torsión, la involutividad implica $d\mathcal{N}^*_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{N}^*_{\mathcal{F}} \wedge \Omega^1_X$ a nivel de secciones locales, donde d denota la derivada exterior.

Por definición ω es descomponible e integrable, es decir, para todo $p \in X \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, existen 1-formas holomorfas $\omega_1, \cdots, \omega_{n-k}$, definidas en una vecindad de p tal que

$$\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-k},\ \omega \wedge d\omega_j = 0;\ j = 1, \cdots, n-k.$$

Recíprocamente, dado una sección global $\omega \in H^0(X, \wedge^{n-k}\Omega^1_X \otimes L)$, localmente descomponible fuera del conjunto $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ e integrable, el nucleo del morfismo

$$\phi : T_X \to \wedge^{n-k-1}\Omega^1_X \otimes L;\ \phi(v) = i_v(\omega),$$

es un sub-haz coherente $T_{\mathcal{F}}$ involutivo de T_X, donde L es un fibrado lineal.

Desde el punto de vista de los fibrados, definimos el fibrado normal de $\mathcal{F}$ como el dual de $\mathcal{N}^*_{\mathcal{F}}$. Así, sobre $X \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, una foliación $\mathcal{F}$ induce la siguiente secuencia exacta de fibrados vectoriales:

$$0 \to T_{\mathcal{F}} \to T_X \to \mathcal{N}_{\mathcal{F}} \to 0. \tag{3}$$

3.1.1. Foliaciones holomorfas sobre variedades de Hopf

Considerando lo anterior, si $X = X_f$ es una variedad de Hopf y L es un fibrado en rectas holomorfo sobre X_f. D. Mall [6] demuestra que L es un fibrado plano y el grupo de Picard $H^1(X_f, \mathcal{O}^*)$ es isomorfo a $\mathbb{C}^*$. Por tanto, a cada fibrado L se le asocia un número complejo no nulo b con las siguientes propiedades:
Consideremos la representación

$$\begin{array}{rccc} \rho_L : & \pi_1(X_f) = \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C}^* \\ & \gamma & \mapsto & \rho_L(\gamma). \end{array}$$

donde $b = \rho_L(1)$, entonces L es isomorfo al cociente del fibrado lineal trivial $W \times \mathbb{C}$, por una acción del grupo fundamental $\pi_1(X_f) \cong \mathbb{Z}$ a través de la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f \times b : & W \times \mathbb{C} & \to & W \times \mathbb{C} \\ & (z, v) & \mapsto & (f(z), bv). \end{array}$$

Sean $\Omega^p_{X_f}$ el haz de gérmenes de $p-$formas holomorfas en X_f y $\pi : W \to X_f$ la proyección natural. Consideremos un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X_f tal que cada U_i es un subconjunto de Stein, abierto y contractil. Además su preimagen $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$ es una unión disjunta de subconjuntos abiertos de Stein $\{U'_{ij}\}$ de W. Como π es sobreyectiva, el conjunto $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{U}_i\}$ es un cubrimiento abierto de W.
Por definición, tenemos $\tilde{U}_i = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} f^r(U_{i_0})$.

Sea $\varphi \in \Gamma(U_i, \Omega^p_{X_f} \otimes L_b)$ entonces $\tilde{\varphi} = \pi^*(\varphi) \in \Gamma(\tilde{U}_i, \pi^*(\Omega^p_{X_f} \otimes L_b)) \cong \Gamma(\tilde{U}_i, \Omega^p_W)$. Asi, obtenemos la secuencia exacta de complejos de Cěch sobre X_f:

$$0 \to \mathcal{C}\cdot(\mathcal{A}, \Omega^p_{X_f} \otimes L_b) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{C}\cdot(\tilde{\mathcal{A}}, \Omega^p_W) \xrightarrow{bId - f^*} \mathcal{C}\cdot(\tilde{\mathcal{A}}, \Omega^p_W) \to 0.$$

A partir de esta secuencia obtenemos la secuencia larga de cohomología:

$$0 \to H^0(X_f, \Omega^p_{X_f} \otimes L_b) \to H^0(W, \Omega^p_W) \xrightarrow{q_0} H^0(W, \Omega^p_W) \to H^1(X_f, \Omega^p_{X_f} \otimes L_b)$$

$$\to H^1(W,\Omega^p_W) \xrightarrow{q_1} H^1(W,\Omega^p_W) \to H^2(X_f,\Omega^p_{X_f}\otimes L_b) \to \cdots .$$

Como $H^r(W,\Omega^p_W) \cong H^r(W,\mathcal{O}^{\binom{n}{p}})$ y $H^r(W,\mathcal{O}) \neq 0$ para $r = 0, n-1$, la secuencia anterior se descompone, para $n > 2$, en las siguientes secuencias.

$$0 \to H^0(X_f,\Omega^p_{X_f}\otimes L_b) \to H^0(W,\mathcal{O}^{\binom{n}{p}}) \xrightarrow{q_0} H^0(W,\mathcal{O}^{\binom{n}{p}}) \to H^1(X_f,\Omega^p_{X_f}\otimes L_b) \to 0$$

$$0 \to H^{n-1}(X_f,\Omega^p_{X_f}\otimes L_b) \to H^{n-1}(W,\mathcal{O}^{\binom{n}{p}}) \xrightarrow{q_{n-1}} H^{n-1}(W,\mathcal{O}^{\binom{n}{p}}) \to H^n(X_f,\Omega^p_{X_f}\otimes L_b) \to 0.$$

De estas secuencias se deduce el siguiente teorema

Teorema 2 (D. Mall[6])**.** *Si X_f es una variedad de Hopf de dimensión $n \geq 3$ y L_b un fibrado lineal holomorfo sobre X_f, entonces:*

- $\dim H^0(X_f,\Omega^p_{X_f}\otimes L_b) = \dim(Ker(q_0))$,
- $\dim H^1(X_f,\Omega^p_{X_f}\otimes L_b) = \dim(Coker(q_0))$,
- $\dim H^{n-1}(X_f,\Omega^p_{X_f}\otimes L_b) = \dim(Ker(q_{n-1}))$,
- $\dim H^n(X_f,\Omega^p_{X_f}\otimes L_b) = \dim(Coker(q_{n-1}))$,
- $\dim H^r(X_f,\Omega^p_{X_f}\otimes L_b) = 0$ *si* $r \neq 0, n-1, n$.

Consideremos ahora $\mathcal{F}$, una distribución holomorfa de codimensión uno en una variedad de Hopf X_f de dimensión $n \geq 3$, inducida por un morfismo de haces

$$0 \to L_b \to \Omega^1_{X_f},$$

donde $\mathcal{N}^*_{\mathcal{F}} = L_b$.
Tensorizando esta ecuaciónr por $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = L_{b^{-1}}$, obtenemos:

$$0 \to \mathcal{O}_{X_f} \to \Omega^1_{X_f}\otimes L_{b^{-1}}.$$

Un morfismo de fibrado $\mathcal{O}_{X_f}$ en $\Omega^1_{X_f}\otimes L_{b^{-1}}$ corresponde a una sección global $s \in H^0(X_f,\Omega^1_{X_f}\otimes L_{b^{-1}})$. Por lo tanto, si existe una distribución holomorfa $\mathcal{F}$ de codimensión uno sobre X_f con fibrado normal $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = L_{b^{-1}}$, entonces $\dim H^0(X_f,\Omega^1_{X_f}\otimes L_{b^{-1}}) > 0$.

El objetivo es obtener condiciones sobre $a \in \mathbb{C}^*$ tales que:

$$\dim H^0(X_f,\Omega^1_{X_f}\otimes L_a) > 0,$$

A continuación, presentamos los principales resultados que hasta el momento se han obtenido sobre la existencia y clasificación de foliaciones holomorfas sobre variedades de Hopf.

Teorema 3 (D. Mall [6])**.** *Sea X_f una superficie de Hopf y $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa sobre X_f inducida por*

$$0 \to L \xrightarrow{i} TX.$$

Entonces, el fibrado lineal L es isomorfo a uno de los siguientes fibrados lineales L_b dependiendo del tipo de X_f:

	X_f	L_b
1)	$f(z_1, z_2) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2)$ genérica	$b = 1, \mu_1, \mu_2$
2)	$f(z_1, z_2) = (\mu z_1, \mu z_2)$ clásica	$b = 1, \mu^{1-l},\ l \geq 0$
3)	$f(z_1, z_2) = (\mu_1 z_1, \mu_1 z_2)$ $\mu_1 = \mu_2^r,\ r \in \mathbb{Z}_{>1}$ resonante	$b = 1, \mu_1, \mu_2;$ $b = \mu_2^{-l}$, donde $l = nr,\ n \geq 1$ o $l = nr - 1,\ n \geq 1$
4)	$f(z_1, z_2) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2)$ $\mu_1^{r_1} = \mu_2^{r_2},\ r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_{>1}$ $1 < r_1 \leq r_2$ hiperresonante	$b = 1, \mu_1, \mu_2;$ $b = \mu_1^{-l} \mu_2^{-l_2}$, donde o bien $l_1 = 0$ y $l_2 = nr_2,\ n \geq 1$ o $l_2 = nr_3 - 1, \nu \geq 1$ o $l_1 = r_1 - 1$ y $l_2 = nr_2,\ n \geq 0$ o $l_2 = nr_2 - 1,\ n \geq 1$
5)	$f(z_1, z_2) = (\mu_! z_1 + z_2^r, \mu_2 z_2)$ $\mu_1 = \mu_2^r,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ excepcional	$b = 1, \mu_1$

Teorema 4 (M. Corrêa, A. Fernandéz y A. Ferreyra [1])**.** *Sea X_f una variedad de Hopf, $dim(X_f) \geq 3$ y $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa no singular de dimensión uno sobre X_f dado por un morfismo $T_{\mathcal{F}} = L_b \to T_{X_f}$. Entonces*

1. *Si X_f es clásica, $b = \mu^{-m}$, con $m \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ y $\mathcal{F}$ es inducida por el campo vectorial*
$$X = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial z_n},$$
donde $g_i \in \mathbb{C}[z]$ homogéneo de grado $m + 1$.

2. *Si X_f es genérica, $b \in \{1, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ y $\mathcal{F}$ es inducida por un campo vectorial constante.*

3. *Si X_f es intermediaría, $b \in \{1, mu_1, \mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \cdots, \mu_n\}$ y*

$T^*_{\mathcal{F}}$	$\mathcal{X}$
L_1	$\sum_{j=1}^{r} g_j(z_1, \cdots, z_r) \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k=r+1}^{n} c^k z_k \frac{\partial}{\partial z_k}$
L_{μ_1}	$\sum_{i=1}^{r} c^i \frac{\partial}{\partial z_i}, c \neq 0$
$L_{\mu_j}; j > r$	$\frac{\partial}{\partial z_j}$

Teorema 5 (M. Corrêa, A. Fernandéz y A. Ferreyra [1])**.** *Toda foliación de dimensión uno (posiblemente singular) sobre X_f variedad de Hopf, $dim(X_f) \geq 3$ de tipo genérico es inducida por un campo vectorial monomial.*

Teorema 6 (M. Corrêa, A. Fernandéz y A. Ferreyra [1])**.** *Sea X_f variedad de Hopf, $dim(X_f) \geq 3$ y $\mathcal{F}$ una distribución no singular de* **codimensión uno** *sobre X_f dado por un morfismo*
$$\mathcal{N}^*_{\mathcal{F}} = L_b \to \Omega^1_X.$$
Entonces

i. *Si X_f es clásica, entonces $b^{-1} = \mu^m$ con $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Además $\mathcal{F}$ es inducido por la $1-$forma polinomial*
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} g_n dz_n,$$
donde $g_i \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ homogéneos de grado $m - 1$.

ii. *Si X_f es genérica, entonces $b^{-1} = \mu_j$, para algún $j = 1, \ldots, n$, y $\mathcal{F}$ es inducido por la $1-$forma $\omega = dz_j$.*

iii. *Si X_f es intermediaria, entonces $b^{-1} \in \{\mu_1, \mu_{r+1}, \cdots, \mu_n\}$. La foliación $\mathcal{F}$ es inducida por una $1-$forma constante.*

Teorema 7 (M. Corrêa, A. Fernandéz y A. Ferreyra [1])**.** *Cualquier distribución holomorfa de codimensión uno (posiblemente singular) sobre una variedad de Hopf genérica X_f de dimensión $n \geq 3$ es integrable y está inducida por una 1-forma monomial.*

4. Foliaciones holomorfas sobre variedades de Hopf excepcionales

Estamos interesados en estudiar la existencia de foliaciones holomorfas sobre variedades de Hopf de tipo excepcional e hiper-excepxional. Sabemos que para una variedad de Hopf X_f, generada por una contracción f, tenemos las siguientes relaciones asociadas al haz tangente y su dual, respectivamente:

$$\begin{aligned} T_{X_f} &= (W \times \mathbb{C}^3)/\langle f \times A \rangle;\ A = J(f), \\ T^*_{X_f} &= W \times \mathbb{C}^3/\langle f \times (A^{-1})^t \rangle. \end{aligned}$$

De esto se sigue que el fibrado canónico $K_{X_f} = \wedge^3 T^*_{X_f} = \det\big((A^{-1})^t\big) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_3}$. Además, dado que $K_{X_f} = W \times \mathbb{C}/\langle f \times \mu_1^{-1}\mu_2^{-1}\mu_3^{-1} \rangle$ se tiene $K_{X_f} = L_{\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}\mu_3^{-1}}$.

Nuestro objetivo es determinar para qué valores de $a \in \mathbb{C}^*$ se cumple

$$\dim\Big(H^0(X_f, \Omega^1_{X_f} \otimes L_a)\Big) > 0,$$

lo cual, por el Teorema 3, es quivalente a determinar cuándo $\dim\left(Ker(P_0)\right) > 0$, donde

$$P_0 = bId - f^* : H^0(W, \Omega^1_W) \to H^0(W, \Omega^1_W),$$

siendo $b = \mu_1\mu_2\mu_3 a$.

Para demostrar esto, basta con encontrar una sección holomorfa $\omega \in H^0(W, \Omega^1_W)$ no nula tal que $P_0(\omega) = 0$.

Sea $\omega \in H^0(W, \Omega^1_W)$, entonces $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} g_i dz_i;\ g_i \in \mathcal{O}_3(W)$. Usando el teorema de extensión de Hartog, se tiene que $g_i \in \mathcal{O}_3(\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, por lo que $g_i(z) = \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^3} C^i_\alpha z^\alpha$. Utilizando la notación estándar de multi-índice: si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$, definimos:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,\ \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot z_n^{\alpha_n}$$

Consideremos el caso excepcional X_f, donde f está dado por

$$f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2 + z_1^\nu, \mu_3 z_3).$$

sin las relaciones $\mu_3 = \mu_1^\alpha \mu_2^\beta;\ \alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta \geq 2$. Denotando $\nu_1 = \nu$ y $\nu_2 = \nu_3 = 0$, podemos escribir:

$$f^*\omega = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^3} \left(C^i_\alpha \mu_i + C^2_\alpha \nu_i z_1^{\nu_i - 1} \right) \mu_1^{\alpha_1} \mu_3^{\alpha_3} (\mu_2 z_2 + z_1^\nu)^{\alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_3^{\alpha_3} \right) dz_i.$$

Por otro lado, tenemos

$$a \cdot \omega = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^3} a C_{\alpha}^{i} z^{\alpha} \right) dz_i.$$

Por lo tanto, la evaluación $P_0(\omega) = 0$ implica

$$P_0(\omega) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^3} \left[a C_{\alpha}^{i} z^{\alpha} - \left(C_{\alpha}^{i} \mu_i + C_{\alpha}^{2} \nu_i z_1^{\nu_i - 1} \right) \mu_1^{\alpha_1} \mu_3^{\alpha_3} (\mu_2 z_2 + z_1^{\nu})^{\alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_3^{\alpha_3} \right] \right) dz_i.$$

Después de realizar los cálculos, se obtiene $P_0(\omega) = 0$ si, y solo si,

$$C_{\alpha}^{i} \left(a - \mu_i \mu^{\alpha} \right) = 0, \tag{4}$$

$$C_{\alpha}^{i} \left(\sum_{m=1}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{m} \mu_i \mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2 - m} \mu_3^{\alpha_3} \right) = 0, \tag{5}$$

$$C_{\alpha}^{2} \left(\sum_{m=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{m} \nu_i \mu_1^{\alpha_1} \mu_3^{\alpha_3} \mu_2^{\alpha_2 - m} \right) = 0. \tag{6}$$

para todo $i = 1, 2, 3$ y. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$.

Un cálculo estricto muestra que $P_0(\omega) = 0$ si, y solo si, se tienen las siguientes posibilidades, o bien

$$\omega = (\nu b_2 z_2 + a_2 z_1^{\nu}) dz_1 - b_2 z_1 dz_2, \quad a_2, b_2 \in \mathbb{C},$$

con $b = \mu_1 \mu_2$.

o bien

$$\omega = \left(C_{(2\nu-1,0,0)}^{1} x^{2\nu-1} + \sum_{q_1 \geq 2\nu} C_{(q_1,0,0)}^{1} x^{q_1} \right) dx + \left(\sum_{q_1 \geq \nu} C_{(q_1,0,0)}^{2} x^{q_1} \right) dy,$$

con $b = \mu_1^{q_1 + 2\nu}$; $\quad q_1 \geq 1$,

o bien

$$\omega = \left(C_{(2\nu-1,0,0)}^{1} x^{2\nu-1} + \sum_{q_1 \geq 2\nu} C_{(q_1,0,0)}^{1} x^{q_1} + \right) dx + \left(\sum_{q_1 \geq \nu} C_{(q_1,0,0)}^{2} x^{q_1} \right) dy,$$

con $b = \mu_1^{q_1 + 2\nu} \quad q_1 \neq 1$.

En consecuencia tenemos los siguientes resultados:

Proposición 8. *Sea X_f una variedad de Hopf primaria del tipo*

$$f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2 + z_1^{\nu}, \mu_3 z_3),$$

sin las relaciones $\mu_3 = \mu_1^{\alpha} \mu_2^{\beta}$; $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \geq 2$.
Sea L_b el fibrado lineal holomorfo sobre X_f, con $b \in \mathbb{C}^*$, entonces

$$h^0(X, T_{X_f} \otimes (L_{b^{-1}})) > 0.$$

Teorema 9. *Sea X_f variedad de Hopf de tipo excepcional de $dim(X_f) = 3$, y $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión uno sobre X_f dado por un morfismo*

$$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{*} = L_b \to \Omega_X^1.$$

Entonces, si

$$f(z_1, z_2, z_3) = (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2 + z_1^\nu, \mu_3 z_3),$$

sin las relaciones $\mu_3 = \mu_1^\alpha \mu_2^\beta$; $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \geq 2$,
$\mathcal{F}$ *está dado por: o bien*

$$\omega = (\nu b_2 z_2 + a_2 z_1^\nu) dz_1 - b_2 z_1 dz_2, \quad a_2, b_2 \in \mathbb{C}; \quad \textit{con} \quad b = \mu_1 \mu_2,$$

o bien

$$\omega = \left(C^1_{(2\nu-1,0,0)} x^{2\nu-1} + \sum_{q_1 \geq 2\nu} C^1_{(q_1,0,0)} x^{q_1} \right) dx + \left(\sum_{q_1 \geq \nu} C^2_{(q_1,0,0)} x^{q_1} \right) dy,$$

con $b = \mu_1^{q_1+2\nu}$; $\quad q_1 \geq 1$,
o bien

$$\omega = \left(C^1_{(2\nu-1,0,0)} x^{2\nu-1} + \sum_{q_1 \geq 2\nu} C^1_{(q_1,0,0)} x^{q_1} + \right) dx + \left(\sum_{q_1 \geq \nu} C^2_{(q_1,0,0)} x^{q_1} \right) dy$$

con $b = \mu_1^{q_1+2\nu} \quad q_1 \neq 1$.

5. Conclusión

En este trabajo, hemos abordado el problema de la existencia de foliaciones holomorfas en variedades de Hopf de dimensión 3, con un énfasis particular en aquellas de tipo excepcional. Hemos revisado los avances previos en la clasificación de foliaciones holomorfas no singulares sobre superficies de Hopf y sobre variedades diagonales de dimensión superior, para luego centrarnos en los casos aún no resueltos para variedades excepcionales.

Hemos mostrado que existe foliaciones holomorfas en un caso particular de variedades de Hopf de tipo excepcional en dimensión tres. Sin embargo, estos resultados no agotan el problema, ya que quedan aún varios casos abiertos que requieren un estudio más detallado. En particular, futuros trabajos deberán abordar la clasificación completa de las foliaciones en estos tipos de variedades, así como explorar la relación entre las propiedades geométricas y dinámicas de las foliaciones y las estructuras complejas subyacentes en las variedades de Hopf.

Referencias bibliográficas

[1] Corrêa, M. and Fernández-Pérez, A. & Ferreira, Antonio M. (2016). Classification of holomorphic foliations on Hopf manifolds. *Mathematische Annalen 365(1),579–593.*

[2] Corrêa, M. and Ferreira, A. M. & Verbitsky, M. (2021). Classification of holomorphic Pfaff systems on Hopf manifolds. *European Journal of Mathematics 7(2),729–740.*

[3] Hopf, H. (1948). *Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten*. Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948.

[4] Kodaira, K. (1968). On the structure of compact complex analytic surfaces, III, *American Journal of Mathematics 90(1), 55–83*.

[5] Kodaira, K. (1968). On the structure of compact complex analytic surfaces, IV, *American Journal of Mathematics 90(4), 1048–1066*.

[6] Mall, D. (1998). On holomorphic and transversely holomorphic foliations on Hopf surfaces. *J. Reine Angew. Math., 501, 41–69.*

[7] Masahide, K. (1979). Some remarks on subvarieties of Hopf manifolds. *Tokyo Journal of Mathematics 2(1), 47–61.*

[8] Reich, L. (1969). Das Typenproblem bei formal-biholomorphen Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt. *Mathematische Annalen, 179(3), 227–250.*

[9] Reich, L. (1969). Normalformen biholomorpher Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt. *Mathematische Annalen, 180(3),233–255.*