PESQUIMAT 27(2): 21–33 (2024) ISSN:1560-912X/ ISSN-E:1609-8439
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v27.i2.29489 Facultad de Ciencias Matemáticas – UNMSM

Solución numérica de un modelo de ondas localmente amortiguadas

Luz Victoria Malásquez Chamba [1]

Resumen: El objetivo de este trabajo es resolver mediante el método de Elementos Finitos lineales una ecuación de onda con amortiguación localmente distribuida con condiciones iniciales y de frontera de tipo Dirichlet. La discretización del modelo por este método conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con valores iniciales, dependientes del tiempo. Se concluye numérica y gráficamente que la estabilidad de la solución aproximada del modelo depende del coeficiente de amortiguación y se estabiliza en el tiempo.

Palabras clave: ecuación de onda; elementos finitos lineales; solución aproximada; estabilidad.

Numerical solution of a locally damped wave model

Abstract: This work aims to solve a wave equation with locally distributed damping with initial and boundary conditions through the linear finite element method. This method's discretization of the model leads to a system of first-order ordinary differential equations with time-dependent initial values. It is concluded numerically and graphically that the stability of the approximate solution of the model depends on the damping coefficient and stabilizes with time.

Keywords: wave equation, linear finite elements, approximate solution, stability.

Recibido: 25/09/2024 *Aceptado:* 25/09/2024 *Publicado online:* 30/12/2024

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: lmalasquez@unmsm.edu.pe

1. El modelo continuo

Consideremos la ecuación de onda con amortiguación localmente distribuida

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + d(x)\, u_t = 0 & \text{en} \quad (0,1) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{en} \quad (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en} \quad (0,1) \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{en} \quad (0,1) \end{cases} \tag{1}$$

En este modelo $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical del punto x de una barra elástica unidimensional en el instante $t > 0$. El coeficiente $d = d(x)$ se denomina *coeficiente de disipación.* Cuando $d \equiv 0$, tenemos la clásica ecuación de la onda. Cuando d es una constante no nula, tenemos la ecuación de ondas globalmente disipativa. En este trabajo, estudiaremos el caso en que d es una función perteneciente a la clase $W^{1,\infty}(0,1)$ que satisface las condiciones

$$d(x) \geq 0 \text{ en } [0,1], \tag{2}$$

y

$$d_0 = \int_0^1 d(x)dx > 0. \tag{3}$$

De esta forma, la función d podría anularse en una parte del dominio $(0,1)$, es decir, su soporte podría ser un subconjunto propio de $(0,1)$. Esto significa que el control disipativo u_t puede actuar únicamente sobre un subconjunto propio de $(0,1)$. Por tal razón, este tipo de problemas se denomina localmente distribuido.

El modelo (1) se reduce al siguiente problema de valor inicial sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$,

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \mathcal{A}y, \forall t > 0 \\ y(0) = (u_0, v_0)^T \end{cases}, \tag{4}$$

donde

$$\mathcal{A}y = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - d(x)v \end{pmatrix}; \quad y = (u,v)^T; \quad y(0) = (u_0,v_0)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

y

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ (u,v)^T \in \mathcal{H} = H_0^1 \times L^2 \ / \ v \in H_0^1;\ u \in H^2 \cap H_0^1 \right\}.$$

En Malásquez [11], se demostró que $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 de contracciones sobre $\mathcal{H}$ denotado por $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Además, se probó que dicho semigrupo es exponencialmente estable. Y para $y_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ se probó que existe una única solución del sistema (4).

1.1. Forma débil de (1).

Para deducir la formulación variacional o débil multiplicamos la ecuación (1) por la función de prueba $v \in H_0^1(0,\ 1)$. Luego integrando en el intervalo [0, 1] tenemos:

$$\int_0^1 [u_{tt}v - u_{xx}v + d(x)\, u_t v]\, dx = 0.$$

Integrando por partes el segundo sumando tenemos:

$$\int_0^1 u_{tt}v \ dx - u_x v|_0^1 + \int_0^1 u_x v_x \ dx + \int_0^1 d(x)\, u_t v \ dx = 0$$

Como $v \in H_0^1(0,1)$ entonces v se anula en los extremos del intervalo [0, 1], luego:

$$\int_0^1 u_{tt}v dx + \int_0^1 u_x v_x dx + \int_0^1 d(x)\, u_t v dx = 0, \text{para todo } v \in H_0^1 \tag{5}$$

La ecuación (5) es la formulación variacional de (1).

2. Discretización del modelo (1) por el Método de Elementos Finitos

En este trabajo, presentaremos la solución numérica de la ecuación de la onda localmente amortiguada (1), mediante el método de elementos finitos, método que nos permitirá encontrar una solución aproximada del problema discreto asociado a nuestro modelo. Para este fín, supondremos que los datos iniciales u_0, v_0 son funciones continuas. Este trabajo está basado en el Capítulo 6 de [11].

2.1. Elementos Finitos lineales.

Denotemos por Ω a la partición o mallado del intervalo $[0,1]$,

$$\Omega = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1\},$$

donde los puntos x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son conocidos como nodos o puntos nodales. La partición correspondiente a $h = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ consiste de los puntos

$$x_i = ih, \ i = 0, 1, \ldots, n, n+1$$

Los elementos finitos (EF) lineales asociados a esta partición son

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \ \varphi_{n+1},$$

donde en forma explícita tenemos el primero y último

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h} & , \quad x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_n}{h} & , \quad x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

Y los EF intermedios, para $i = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ son

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h} = \dfrac{x - (i-1)h}{h} = (1-i) + \dfrac{x}{h} & , \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \dfrac{-x + x_{i+1}}{h} = \dfrac{-x + (i+1)h}{h} = i + 1 - \dfrac{x}{h} & , \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & , \quad \text{en otros casos} \end{cases}$$

2.2. Modelo Semi discreto de la ecuación de la onda amortiguada. (1)

La técnica de discretización por el método de los Elementos Finitos se conoce como la Formulación de Galerkin semidiscreta; discreta en la variable espaciale $x \in [0,1]$ y continuo en tiempo $t \in [0, +\infty\rangle$. Esta formulación consiste en reducir la forma variacional a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden, con valores iniciales.

Para esto se considera una solución de la forma:

$$u_h(x,t) = \sum_{i=0}^{n+1} U_i(t)\, \varphi_i(x) \tag{6}$$

donde

$$U_i : [0, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$$

Para cada $i = 0, \ldots, n+1$, $U_i(t)$ es una función de la variable t, por determinar. Llamaremos $U(t) = (U_0(t), U_1(t), \ldots, U_n(t), U_{n+1}(t))$; considerando condiciones de frontera y la definición de los EF lineales, se deduce que

$$U_0(t) = U_{n+1}(t) = 0 \text{ para todo } t \in (0, \infty).$$

Luego, basta considerar

$$U(t) = (U_1(t), \ldots, U_n(t)) \tag{7}$$

y en consecuencia en (6)

$$u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{n} U_i(t)\, \varphi_i(x). \tag{8}$$

Debido a las condiciones iniciales, la función aproximada en $t = 0$, es

$$u_h(x,0) = \sum_{i=1}^{n} U_i(0)\, \varphi_i(x) = u_0(x).$$

Evaluando en los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h, \ldots,$ $x_{n+1} = (n+1)h = 1$, obtenemos

$$U_1(0) = u_0(x_1);\ U_2(0) = u_0(x_2); \ldots;\ U_n(0) = u_0(x_n),$$

y en (7) tenemos la condición inicial

$$U(0) = (U_1(0), U_2(0), \ldots, U_n(0)) = (u_0(x_1), u_0(x_2), \ldots, u_0(x_n));$$

Análogamente, en $t = 0$, se tiene $D_t u_h(x,0) = \sum_{i=1}^{n} U_i'(0)\, \varphi_i(x) = v_0(x)$ y de aquí la derivada de $U(t)$ en cero viene a ser

$$U'(0) = \left(U_1'(0), \ldots, U_n'(0)\right) = (v_0(x_1), \ldots, v_0(x_n)).$$

2.3. Forma débil del caso discreto

Asumiendo formalmente que u_h satisface (1) tenemos:

$$\begin{cases} D_{tt}u_h - D_{xx}u_h + d(x)\, D_t u_h = 0 & \text{en } \bigcup_{i=0}^{n} (x_i, x_{i+1}) \times (0, \infty) \\ u_h(0,t) = u_h(1,t) = 0 & \text{en } (0, \infty) \\ u_h(x,0) = u_0(x) & \text{en } (0,1) \\ D_t u_h(x,0) = v_0(x) & \text{en } (0,1), \end{cases} \tag{9}$$

En adelante y con el fin de no recargar la notación, escribiremos como si estuviésemos trabajando sobre el intervalo (0,1), pero debemos entender que las derivadas D_t, D_{tt} y D_{xx} solamente tienen sentido en los subintervalos (x_i, x_{i+1}); $i = 0, ..., n$.

Multiplicando la ecuación (9) por la función de prueba $\varphi_k \in Gen\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,\ \varphi_{n+1}\}$, reemplazando e integrando en $[0,1]$ se tiene:

$$\int_0^1 \left[(D_{tt}u_h)\, \varphi_k(x) - (D_{xx}u_h)\, \varphi_k(x) + d(x)\,(D_t u_h)\, \varphi_k(x)\right] dx = 0$$

empleando las condiciones de frontera e integrando por partes, resulta la forulación variacional de nuestro problema

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n}\left[\left(\int_0^1 \varphi_k(x)\,\varphi_i(x)\,dx\right)U_i''(t)+\left(\int_0^1 \varphi_k'(x)\,\varphi_i'(x)\,dx\right)U_i(t)\right. \\ \qquad\qquad \left.+\left(\int_0^1 d(x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx\right)U_i'(t)\right]=0 \\ U(0)=\left(u_0(x_1),u_0(x_2),\ldots,u_0(x_n)\right)^T=U_0 \\ U'(0)=\left(v_0(x_1),v_0(x_2),\ldots,v_0(x_n)\right)^T=V_0 \end{array}\right. \tag{10}$$

En (10) las filas del sistema varian según $k=1,\ldots,n$.

Considerando la siguiente aproximación

$$\int_0^1 d(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_i(x)\,dx \approx d(x_i)\int_0^1 \varphi_k(x)\,\varphi_i(x)\,dx = d(x_i)\,b_{k,i},$$

para $k,i=1,\ldots,n$.

Se tiene finalmente las componentes de tres matrices :

$$a_{k,i}=\int_0^1 \varphi_k'(s)\,\varphi_i'(s)\,ds,$$

$$b_{k,i}=\int_0^1 \varphi_k(s)\,\varphi_i(s)\,ds,$$

$$d(x_i)\,b_{k,i}=d(x_i)\int_0^1 \varphi_k(x)\,\varphi_i(x)\,dx,$$

donde $A=[a_{k,i}]$ es la matriz de rigidez, $B=[b_{k,i}]$ es la matriz de masa y $Bd=[d(x_i)\,b_{k,i}]$ la matriz de masa modificada para $k,i=1\ldots,n$. De esta manera (10) toma la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\left\{\begin{array}{l} BU''(t)+AU(t)+B_dU'(t)=0, \qquad t>0 \\ U(0)=U_0 \\ U'(0)=V_0 \end{array}\right. \tag{11}$$

Si denotamos $M_a=B^{-1}A$, $M_d=B^{-1}B_d$, el sistema (11) toma la forma

$$\left\{\begin{array}{l} U''(t)+M_aU(t)+M_dU'(t)=0, \qquad t>0 \\ U(0)=U_0 \\ U'(0)=V_0 \end{array}\right. \tag{12}$$

Por reducción de orden (12) se convierte en un PVI de primer orden

$$\left\{\begin{array}{l} W'(t)-MW(t)=0, \qquad 0<t<\infty \\ W(0)=W_0 \end{array}\right. \tag{13}$$

donde

$$M=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -M_a & -M_d \end{pmatrix}\ ;\ W(t)=\begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} \quad y \quad W(0)=\begin{pmatrix} U(0) \\ V(0) \end{pmatrix}.$$

2.4. Algoritmo para aproximar la solución del modelo (1)

Entrada: n, el número de puntos de la partición del intervalo $[0,1]$; los elementos a_{ij} con $1 \leq i,j \leq n$ de la matriz de rigidez A; los elementos b_{ij} con $1 \leq i,j \leq n$ de la matriz de masa B; las condiciones iniciales U_0, V_0.
Salida: Aproximación u_h.
Paso 1 tome $h = \frac{1}{n+1}$.
Paso 2 tome $x_0 = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, (n+1)$ tomar $x_i = ih$.
Paso 3 para $j = 2, 3, \ldots, (n+1)$ tome $xx\,(j-1) = x\,(j)$.
Paso 4 tome $d = d\,(xx)$.

Paso 5 para $j = 1, 2, \ldots, (n+1)$ y para $i = 1, 2, \ldots, (n+1)$ tomar $Bd_{ij} = d_j * B_{ij}$.

Paso 6 calcular $Ma = inv\,(B) * A$.
Paso 7 calcular $Md = inv\,(B) * Bd$.
Paso 8 tomar $U_0 = U_0\,(xx)$ y $V_0 = V_0\,(xx)$.
Paso 9 tomar la matriz unos I; la matriz cero O; $M = [O, I; -Ma, -Md]$.
Paso 10 tomar $W_0 = [U_0'; V_0']$.
Paso 11 tomar Wh solución de la EDO, $W' - MW = 0$, para la condición inicial W_0.
Salida: $Uh = Wh^{'}$. Para $j = 1, 2, \ldots, (n+1)$: $uh = Uh\,(j,:)$.

En el programa que se ha desarrollado para la solución del sistema de EDO (13) se tomará $t \in [0,b]$

$$\begin{cases} W'(t) = MW(t), & t \in [0,b] \\ W(0) = W_0 \end{cases}$$

Primero se genera el vector tiempo $T = [0:k:b]_{1\times(m+1)}$, $b = \overset{\circ}{k}$, $T\,(i) = (i-1)\,k$, $i = 1, \ldots, (m+1)$. El sistema se resolverá mediante el programa ode45 de MATLAB. Este programa resuelve la EDO para cada $T\,(i), i = 1, \ldots, (m+1)$, y lo ubica por fila en la matriz W_h la cual es una matriz de orden $(m+1) \times 2n$, que nos entrega los valores de U y de $V = U'$. Para tener los valores de U y V por columnas se crea

$$U_h = W_h',$$

pero lo que queremos son solo los valores de U, entonces tomaremos las primeras n filas de U_h que las ubicaremos en u_h.

2.5. Convergencia de la solución numérica

La partición uniforme que se ha elegido para el intervalo $[0,1]$ es

$$x_0 = 0, x_1 = h,\ x_2 = 2h,\ ..., x_{n+1} = (n+1)\,h = 1$$

y los elementos finitos lineales asociados a esta partición:

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{n+1},$$

permiten afirmar, según Ciarlet [3], que la aproximación por elementos finitos u_h converge a la solución analítica u con una velocidad de convergencia dada por:

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{1,\Omega} + \left\| \frac{d}{dt}\{u_h(t) - u(t)\} \right\|_{0,\Omega} = O\left\{ \|u_{0,h}(t) - u_0(t)\|_{1,\Omega} + \left\| \dot{u}_{0,h}(t) - \dot{u}_0(t) \right\|_{0,\Omega} + h^k \right\} \tag{14}$$

donde $u \in C^2\left(0, T; H^{k+1}\right)$, $u_0\left(r\right) = u(r, 0)$, $\dot{u}_0\left(r\right) = u_t(r, 0)$ para todo $r \in \Omega$ y k es el grado del polinomio completo que aparece en las funciones de base elegidas para la discretización (ver Seron et al. [12]).

Esta expresión muestra que el error en desplazamiento y velocidades es una función de la aproximación matemática $\left(h^k\right)$ y de la aproximación de las condiciones iniciales.

3. Resultado numérico

Ejemplo 3.1 *Para el coeficiente* $d(x) = 50\sin\left(\pi x\right)$, $d \in W^{1,\infty}\left(]0,1[\right)$ *satisface las condiciones* (2) *y* (3).

Para las condiciones iniciales $U_0\left(x\right) = 50\sin\left(\pi x\right)$ *y* $V_0\left(x\right) = 50\cos\left(\pi x\right)$, *con* $n = 60$ *puntos en la partición y* $h = \frac{1}{61}$ *como tamaño de paso; la barra elástica se estabiliza al transcurrir el tiempo (ver figura 1 y 2). En la figura 1 se muestra cuatro gráficos de las ondas amortiguadas para t=0, t=2, t=4, t=8. Se observa que la amplitud de las ondas va decreciendo progresivamente hasta estabilizarse.*

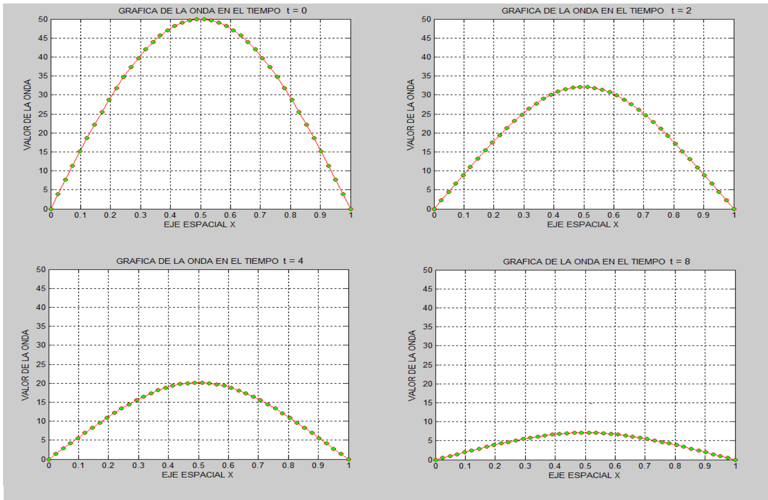

Figura 1: Solución aproximada de la onda con el coeficiente $d(x) = 50\sin\left(\pi x\right)$ para los tiempos $t = 0, 2, 4, 8$.

La figura 2 es la representación de las ondas amortiguadas en un espacio tridimencional. En el eje del tiempo se muestra la variación de t = *0, 0.5, 1, 1.5, 2, ..., 20. En el eje de la variable espacial se muestra los valores de* x = *0, 0.0164, 0.0328, 0.0492, 0.0656, ... , 1 que corresponde a la partición del intervalo [0, 1]. En el eje z se observa los valores de la solución aproximada* $u_h(x,t)$. *Por ejemplo para* $t = 3$ *se tiene* $u_h(x, 3)$ =*0, 1.7593, 3.5175, 5.2717, 7.0174, ..., 1.7505, 0. A diferencia de las cuatro vistas anteriores presentadas para cada valor fijo de* t, *la vista tridimensional de la figura 2 nos dá una idea global del comportamiento de las ondas amortiguadas a lo largo de todos los tiempos discretos.*

En la figura 3 en cada instante t gráficamente se tiene el máximo valor de la solución aproximada.

Ejemplo 3.2 E*n este ejemplo se verá el siguiente modelo*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0 & , \ en \ (0,1) \times (0,\infty) \\ u\left(0,t\right) = u\left(1,t\right) = 0 & , \ en \ (0,\infty) \\ u\left(x,0\right) = U_0\left(x\right) = 0 & , \ en \ (0,1) \\ u_t\left(x,0\right) = V_0\left(x\right) = \mathrm{sen}(\pi x) & , \ en \ (0,1) \end{cases} \tag{15}$$

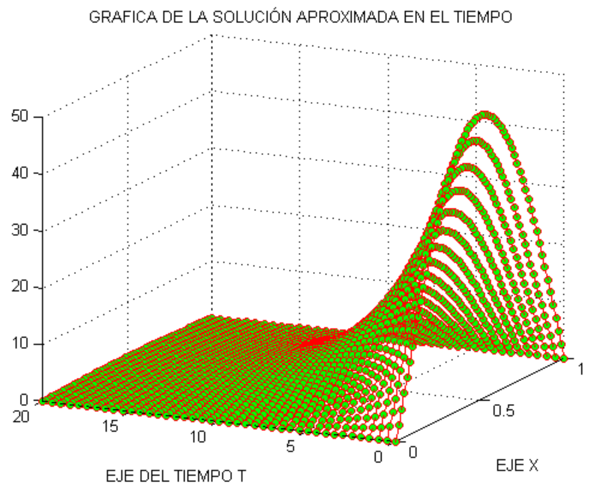

Figura 2: Vista de las ondas a lo largo de todos los tiempos discretos con el coeficiente $d(x) = 50\,\mathrm{sen}\,(\pi x)$.

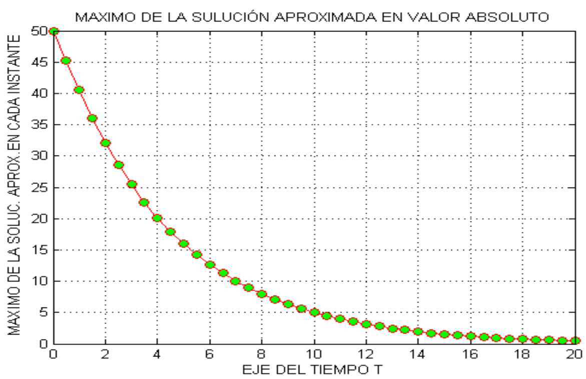

Figura 3: Máximo valor de la solución aproximada a lo largo de todos los tiempos discretos con $d(x) = 50 \sin(\pi x)$.

Como $d(x) = 1$ se satisface las condiciones (2) y (3) entonces existe una única solución de (15) y es exponencialmente estable; a medida que el tiempo crece la solución tiende a cero. Pero por otro lado se tiene la solución explícita de este modelo (15) dada por

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt[2]{4\pi^2 - 1}} \sin(\pi x)\, e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\left(\frac{\sqrt[2]{4\pi^2 - 1}}{2}\right) t\right),\ t \geq 0...(11) \tag{16}$$

El objetivo es mostrar la convergencia de la solución aproximada por elementos finitos hacia la solución análitica (16). De esta manera se corrobora la convergencia de la solución numérica indicada en (14). Con esta finalidad se toma $n = 40$, por ende el tamaño de paso $h = \frac{1}{41}$, de aquí se tiene la siguiente partición del intervalo $[0,1]$

$$\left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{41},\ x_2 = \frac{2}{41}, \ldots, x_{40} = \frac{40}{41},\ x_{41} = 1\right\}.$$

Y se tomará para t los siguientes valores.

$$0;\ 0{,}2;\ \ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1;\ 1{,}2; ...;\ 7{,}8;\ 8.$$

Para la misma partición en el intervalo $[0, 1]$ *y los mismos tiempos se tiene la gráfica de la solución aproximada del modelo* (15) *por el método de Elementos Finitos (ver figura 4), la cual se estabiliza y se acerca a cero al transcurrir el tiempo.*

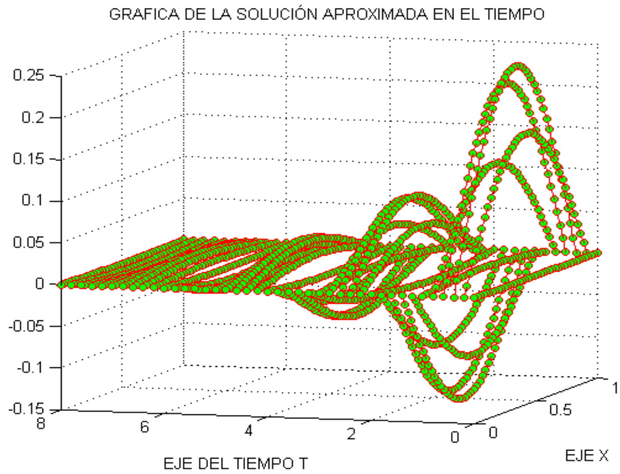

Figura 4: Vista de las ondas a lo largo de los tiempos discretos, con $d(x) = 1$.

En la figura 5 en cada instante de tiempo tomamos el valor máximo de las ondas positivas y el valor mínimo de las ondas negativas del modelo (15)*, observando que con el transcurrir del tiempo estos valores positivos y negativos se ubican en torno a cero (ver figura 5).*

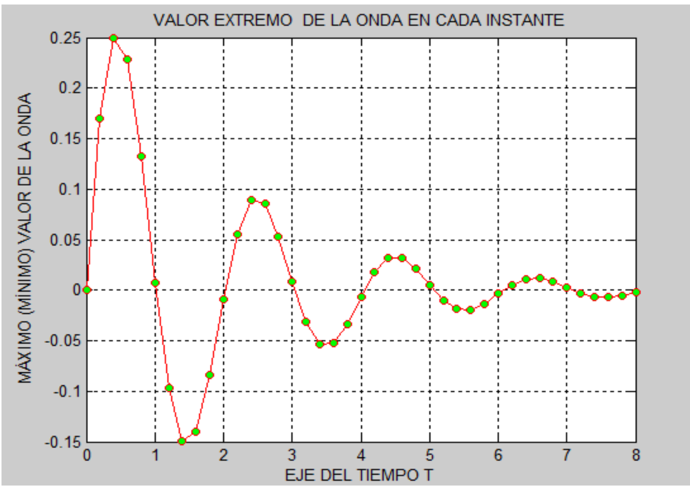

Figura 5: Valor extremo de la onda en cada uno de los tiempos discretos con $d(x) = 1$.

3.1. Comparación gráfica de la solución exacta y la solución aproximada del modelo (15)

Mostraremos la onda para cuatro particiones distintas y un tiempo fijo $t = 6$. En cada una de las siguientes figuras se tiene la gráfica de la solución exacta y la solución aproximada del modelo (15); haciendo variar la partición en el intervalo $[0, 1]$.

Para $n = 15$ tenemos una partición de 17 puntos con un tamaño de paso $h = \dfrac{1}{16}$ (ver figura 6), se observa una mayor diferencia entre la solución exacta y la solución aproximada alrededor de $x = 0{,}5$ y la diferencia es menor a 1×10^{-3}.

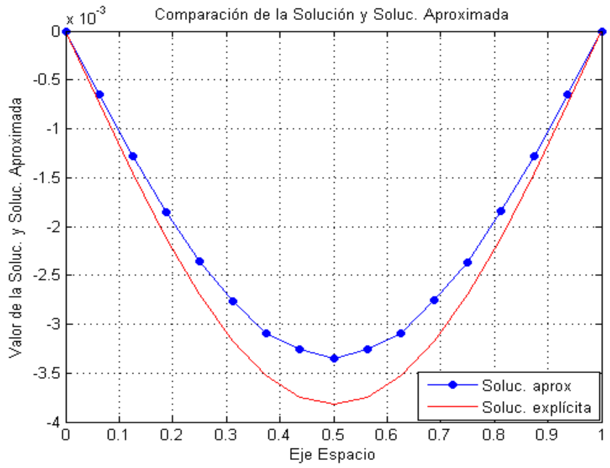

Figura 6: Comparación de la solución explícita y la solución aproximada del modelo (15) para $n = 15$ y $t = 6$.

Para $n = 20$, es decir, una partición de 22 puntos se tiene $h = \dfrac{1}{21}$ (ver figura 7) la mayor diferencia de la solución exacta y solución aproximada se puede observar alrededor de $x = 0{,}5$, y esta diferencia es menor a $0{,}5 \times 10^{-3}$. Para $n = 40$, es decir, una partición de 42 puntos se

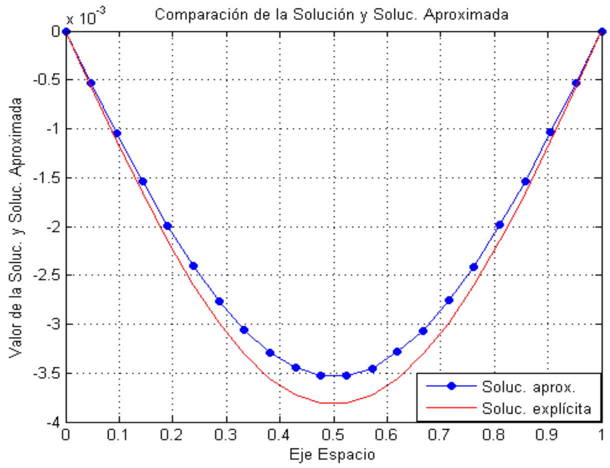

Figura 7: Comparación de la solución explícita y la solución aproximada del modelo (15) para $n = 20$ y $t = 6$.

obtiene $h = \frac{1}{41}$ (ver figura 8) y alrededor de $x = 0{,}5$ la diferencia entre la solución aproximada y la solución exacta es menor que el caso anterior.

Para $n = 60$, es decir, una partición de 62 puntos con $h = \dfrac{1}{61}$ (ver figura 9), las gráficas de la solución aproximada y la solución exacta casi se confunden; la diferencia entre ellas es casi nula; lo cual también podemos observar en el cuadro 1.

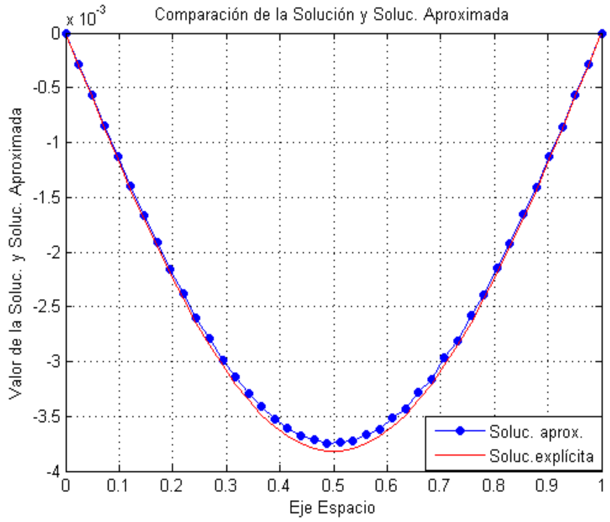

Figura 8: Comparación de solución explícita y solución aproximada para $n = 40$ y $t = 6$.

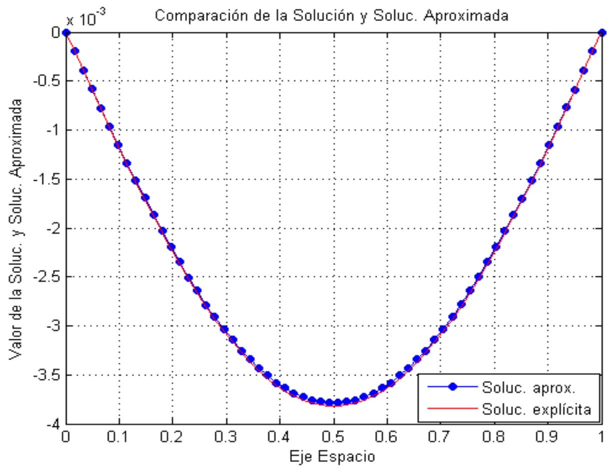

Figura 9: Comparación de solución y solución aproximada para $n = 60$ y $t = 6$.

En la comparación gráfica de la solución aproximada y la solución exacta del modelo (15) se observa que cuando mayor es la cantidad de puntos en la partición del intervalo $[0, 1]$, es decir, el tamaño de paso h es más pequeño, la diferencia entre la solución aproximada y la solución exacta es casi nula; no importando el instante o momento en que son comparadas dichas gráficas.

Cuadro 1: Error obtenido al comparar la solución exacta y la solución aproximada del Modelo (15), para los primeros 30 valores

Partición (x)	u	uh	Error
0.0164	-0.000197	-0.000195	-0.000002
0.0328	-0.000393	-0.000389	-0.000004
0.0492	-0.000588	-0.000583	-0.000005
0.0656	-0.000781	-0.000774	-0.000008
0.0820	-0.000973	-0.000965	-0.000008
0.0984	-0.001162	-0.001151	-0.000011
0.1148	-0.001347	-0.001337	-0.000011
0.1311	-0.001530	-0.001515	-0.000014
0.1475	-0.001708	-0.001693	-0.000014
0.1639	-0.001881	-0.001865	-0.000017
0.1803	-0.002050	-0.002032	-0.000019
0.1967	-0.002213	-0.002195	-0.000018
0.2131	-0.002371	-0.002347	-0.000023
0.2295	-0.002522	-0.002503	-0.000019
0.2459	-0.002666	-0.002638	-0.000028
0.2623	-0.002803	-0.002784	-0.000019
0.2787	-0.002933	-0.002902	-0.000031
0.2951	-0.003055	-0.003035	-0.000021
0.3115	-0.003169	-0.003135	-0.000034
0.3279	-0.003275	-0.003252	-0.000023
0.3443	-0.003372	-0.003337	-0.000035
0.3607	-0.003460	-0.003434	-0.000025
0.3770	-0.003538	-0.003503	-0.000035
0.3934	-0.003608	-0.003580	-0.000028
0.4098	-0.003668	-0.003633	-0.000035
0.4262	-0.003718	-0.003687	-0.000030
0.4426	-0.003758	-0.003724	-0.000034
0.4590	-0.003788	-0.003756	-0.000032
0.4754	-0.003808	-0.003775	-0.000034
0.4918	-0.003819	-0.003785	-0.000033

4. Conclusión

En este trabajo, que forma parte de nuestra tesis de maestría (ver [11]), hemos desarrollado la solución numérica del modelo (1), considerando la variable espacial unidimensional en el intervalo $[0, 1]$. Por esta razón, se consideró una partición de dicho intervalo y los elementos finitos asociados a esta partición. Hemos comprobado numérica y gráficamente que la solución aproximada obtenida para el modelo (1) se estabiliza en el tiempo si el coeficiente $d \in W^{1,\infty}(]0,1[)$ cumple las condiciones (2) y (3).

Referencias bibliográficas

[1] Burden R., Faires J., Análisis Numérico. Sexta edición, Internacional Thompson Editores, S.A., Madrid, 1998.

[2] Burman, E., Feizmohammadi, A., Münch, A., Oksanen, L. Spacetime finite element methods for control problems subject to the wave equation. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations,29, 41, 2023.

[3] Ciarlet P. G., The Element Method for Elliptic Problems . North-Holland Publishing Company, New York, 1978.

[4] Dukkipati, R. V. Applied numerical methods using MATLAB. Stylus Publishing, LLC, 2023.

[5] Gomes A., Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1999.

[6] Kreyszig E., Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley and Sons, 1978.

[7] Kubicek M., Hlavacek V., Numerical Solution of Nonlinear Boundary Value Problems with Applications. Dover Publications 1983.

[8] Leader, J. J. Numerical Analysis and Scientific Computation. CRC Press, 2022.

[9] Liu Z., Zheng S., Semigroups associated with dissipative systems. CRC Press LLC, 1999.

[10] Liu, W. K., Li, S., Park, H. S. Eighty years of the finite element method: Birth, evolution, and future. Archives of Computational Methods in Engineering, 29(6), 4431-4453, 2022.

[11] Malásquez, L.V. Sistemas Viscoelásticos Lineales: Estabilidad, Analiticidad y Aproximación Numérica (Tesis de maestría). Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú, 2024.

[12] Seron, F. J., Sanz, F. J., Kindelan, M., & Perez, C. El método de los elementos finitos para el modelado de la ecuación de ondas con un procesador vectorial. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 6(4), 573-593, 1990.