PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. VIII N° 1, pp. 01 - 18, LIMA - PERÚ. Julio 2005

OPERADOR DE DUALIDAD Y ECUACIÓN NO-LINEAL ABSTRACTA DE KIRCHHOFF-CARRIER

Raúl Izaguirre Maguiña[1]

RESUMEN.- *Sea $T > 0$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto acotado con frontera regular $\Gamma = \partial\Omega$. En el presente trabajo demostramos que el problema de valor inicial*

$$(*)\quad \begin{cases} \rho(x)u_{tt} - M\left(|u(t)|_p\right)\Delta u = f & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0 \ ; \ u'(x,0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

donde $|\cdot|_p$ denota la norma en el espacio $L^p(\Omega)$ y M es una función no-negativa de clase C^1, tiene una única solución local, bajo adecuadas condiciones sobre ρ, M, f, u_0, u_1.

PALABRAS CLAVE.- *Ecuaciones Diferenciales parciales no lineales. Ecuación abstracta de Kirchhoff - Carrier.*

DUALITY OPERATOR AND ABSTRACT NONLINEAR EQUATION OF KIRCHHOFF-CARRIER

ABSTRACT.- *Let $T > 0$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded subset with regular boundary $\Gamma = \partial\Omega$. We prove that the initial value problem:*

$$(*)\quad \begin{cases} \rho(x)u_{tt} - M\left(|u(t)|_p\right)\Delta u = f & \text{on } \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & \text{on } \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0 \ ; \ u'(x,0) = u_1 & \text{on } \Omega \end{cases}$$

where $|\cdot|_p$ denotes the $L^p(\Omega)$ norm and M is a non-negative function under adequate conditions on ρ, M, f, u_0, u_1.

KEYWORDS.- *Nonlinear partial differential equations. Abstract equation of Kirchhoff - Carrier.*

[1] *Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas. e-mail: rizaguirrem@unmsm.edu.pe*

1. Introducción

Sean $(V, a(u, v))$, $(H, b(u, v))$, espacios de Hilbert, $V \subset H$ la inmersión de V en H es densa y compacta. Sea también A el operador definido por la terna $\{V, H, a(u, v)\}$. Entonces A es un operador no-acotado, auto-adjunto y positivo de H, con espectro discreto. Asimismo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el operador A^{α} está bien definido. En este contexto $V = D(A^{1/2})$.
El siguiente modelo abstracto

$$\begin{cases} u'' + M\left(\left|A^{\alpha}u\right|^2\right) A^{\beta}u = f \\ u(0) = u_0 \ ; \ \ u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{1.1}$$

considera como casos particulares los siguientes problemas

Sea Ω un abierto $\mathbb{R}^n$ con frontera regular Γ; Q el cilindro $\Omega \times]0, T[$, $0 < T < \infty$ con frontera lateral $\Sigma = \Gamma \times]0, T]$. La ecuación diferencial parcial no-lineal

$$\begin{cases} u_{tt} + \left(1 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx\right)(-\Delta u) = f(t) & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0 \ ; \ \ u_t(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

es un modelo generalizado de la ecuación de Kirchoff [7], planteada para estudiar las vibraciones de pequeña amplitud, de una cuerda fija en sus extremos y cuando la dependencia de la tensión no puede dejarse de lado en el modelo.

Asimismo la ecuación

$$\begin{cases} u_{tt} + \left(1 + \int_{\Omega} |u|^2 \, dx\right)(-\Delta u) = f(t) & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0 \ ; \ \ u_t(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

Es una generalización de un problema estudiado por Carrier en [2].
En [14] Pohozaev trata el sistema

$$\begin{cases} u'' + (-1)^m \left(1 + \int_{\Omega} \left|\nabla^m u\right|^2 \, dx\right) \Delta^m u = f & \text{en } Q \\ \gamma_0 u = \gamma_1 \, u = \dots\dots\dots\dots = \gamma_{m-1} u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0 \ ; \ \ u'(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

Obsérvese que si $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $A = -\Delta$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$, estamos en la ecuación de Kirchoff (1.2); si $\alpha = 0$, $\beta = 1$, es el modelo de Carrier (1.3); si $V = H_0^m(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $A = -\Delta$; $\alpha = m/2$, $\beta = m$, es el modelo de Pohozaev. En los casos señalados $M(s) = 1 + s^2$.
Con relación a esta formulación se plantea entre otros problemas el estudio de la ecuación (1.3) en el caso que la función no-lineal M sea no-negativa (caso degenerado). La existencia y unicidad de soluciones locales para el caso degenerado de la ecuación de Kirchhoff $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1$, son obtenidas por ejemplo en Ebihara - Medeiros - Milla [5], asumiendo que $M \in C^1$ y que $|M'(s)s| \le a\, M(s)$, donde la constante a es positiva. En [4] Crippa trata un caso bastante general suponiendo que la función $M \in C^1([0,\infty))$, $M(0) = 0$ y $\forall\, \delta > 0$, $\inf_{s \ge \delta} M(s) > 0$ demostrando que existe una única solución local débil al problema de Cauchy asociado a (1.3).

En relación al modelo de Kirchoff - Carrier (1.3), se tiene las referencias [3] y [6], y donde la función no-lineal M es de clase C^1 y estrictamente positiva. En [3], se obtiene soluciones globales con datos analíticos "suficientemente pequeños". En [6] se obtiene solución local, pero en una clase mayor de datos iniciales. Para el caso degenerado se tiene la referencia [5] donde M es de clase C^1 y verifica cierta condición de crecimiento polimonial.
Una generalización del modelo (1.4) consiste en el sistema

$$K\, u''(t) + M\left(|Bu(t)|^2\right) Au(t) = f(t) \tag{1.5}$$

donde K, B son operadores que conmutan con el operador A y cumplen ciertos requisitos técnicos, referencia [7].

Otra manera de tratar unificadamente los sistemas (1.2), (1.3) y (1.4), es considerar el modelo

$$u''(t) + M\left(|A^{\alpha} u(t)|^2, |A^{\beta} u(t)|^2\right) A^{\gamma} u(t) = f(t) \tag{1.6}$$

donde la función no-lineal $M(s, r)$ es no - negativa y de clase C^1 en las dos variables. Se demuestra la existencia de solución para el caso $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$; $\gamma = 1$ y en Izaguirre [6], se demuestra la existencia de solución para un caso más general.

El modelo abstracto (1), sin embargo, no incluye el tratamiento de la ecuación

$$\begin{cases} \rho(x)\, u_{tt} + \left(1 + \int_{\Omega} |u|^p\, dx\right)(-\Delta u) = f(t) & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = u_0 \;\; ; \;\; u_t(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.7}$$

$1 < p < \infty$; $p \neq 2$. En el presente trabajo tratamos el problema de determinar solución local y unicidad de (5), modelo abstracto que incluye el problema (1.7).

2. Preliminares.- Sea $(V, a(u, v))$ un espacio de Hilbert real; la forma bilineal $b: V \times V \to \mathbb{R}$ es simétrica, compacta, continua, estrictamente monótona y sea $H_0 = (V, b(u, v))$, entonces H_0 es un espacio pre-Hilbert y podemos considerar su completación H que es un espacio de Hilbert, con producto interno denotado por $b(u, v)$. Luego $V \subset H \subset V^*$ con inmersiones densas y continuas. La inmersión de V en H es compacta.

Consideramos entonces el operador $S: D(S) \to H$, tal que

$$D(S) = \{ u \in V \; ; \; Su \in H \} \tag{2.1}$$

$$b(Su, v) = a(u, v) \tag{2.2}$$

Entonces S es un operador lineal, simétrico, no-acotado y estrictamente monótono desde que

$$a(u, Su) = b(Su, Su) \tag{2.3}$$

El operador inverso $S^{-1}: H \to D(S)$, es lineal, continuo, simétrico y compacto.
Formalmente se tiene que $S^{-1} = A^{-1}B$.

Por la teoría de los operadores compactos simétricos, tenemos que existe una base ortogonal y numerable $(w_k)_{k\geq 1}$ de V y una sucesión creciente de números positivos $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ tales que:

$$\lambda_j b(w_j, v) = a(w_j, v) \qquad \forall v \in V \; ; \quad j = 1, 2, \ldots\ldots \tag{2.4}$$

$$b(w_j, w_i) = \delta_{ij} \; ; \; a(w_j, w_j) = \lambda_j \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots\ldots \tag{2.5}$$

$$Sw_j = \lambda_j \, w_j \; ; \; j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots \tag{2.6}$$

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} b(u, w_j)\, w_j \; ; \forall u \in V \tag{2.7}$$

De la teoría espectral para $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos definir la potencia S^{α}, con dominio

$$D(S^{\alpha}) = \left\{ u \; ; \; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu}^{2\alpha} \left| b(u, w_{\nu}) \right|^2 < \infty \right\}$$

$$S^{\alpha} u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu}^{\alpha}\, b(u, w_{\nu})\, w_{\nu} \quad \forall \; u \; D(s^{\alpha})$$

Definimos entonces:

$$b_{\alpha}(u, v) = b(S^{\alpha} u, S^{\alpha} v) \quad u, v \in D(S^{\alpha}) \tag{2.8}$$

$$\left| u \right|_{\alpha}^{2} = b_{\alpha}(u, u) \qquad u \in D(S^{\alpha}) \tag{2.9}$$

se tiene que $(D(S^{\alpha}), b_{\alpha}(u, v))$ es un espacio de Hilbert y si $\alpha < \beta$, la inmersión de $D(S^{\beta}) \subset D(S^{\alpha})$ es compacta.

3. Problema Lineal. (Solución global). Sea $T > 0$ y

$$\psi \in C^1([0, T]), \psi(t) \geq m_0 > 0 \quad \forall\, s \in [0, T]; \tag{3.1}$$

$$\psi \in L^{\infty}(0, T) \quad ; \quad |\psi|_{L^{\infty}(0,T)} \leq M_1. \tag{3.2}$$

Nos planteamos resolver el problema siguiente:

$$Bu'' + \psi(t)\, Au = f \tag{3.3}$$

$$u(0) = u_0\ ;\ u'(0) = u_1 \tag{3.4}$$

Formalmente aplicando A^{-1} en la ecuación (3.3)

$$S^{-1}u''(t) + \psi(t)\, u(t) = S^{-1}\ B^{-1}\ f(t) = S^{-1}h(t) \tag{3.5}$$

ahora aplicando en (3.5) $S^{\alpha+1}$ y considerando el producto interno en $L^2(0, T; D(S^{\alpha}))$ obtenemos

$$\int_0^T \left[b_{\alpha}(u''(t), v) + \psi(t)\, b_{\alpha}(Su(t), v) \right] dt = \int_0^T b_{\alpha}(h(t), v)\, dt\ v \in L^2(0, T; D(S^{\alpha})) \tag{3.6}$$

es en este sentido que entenderemos nuestra solución al problema (3.3) y (3.4).

Teorema 1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y ψ que verifica las condiciones (3.1) y (3.2).

$$u_0 \in D(S^{\alpha+1}) \tag{3.7}$$

$$u_1 \in D(S^{(2\alpha+1)/2}) \tag{3.8}$$

$$B^{-1}\ f = h \in L^2(0, T; D(S^{(2\alpha+1)/2})) \tag{3.9}$$

Entonces existe una única solución u del problema (3.3) y (3.4) tal que:

$$u \in L^{\infty}(0, T; D(S^{\alpha+1})) \tag{3.10}$$

$$u' \in L^{\infty}(0, T; D(S^{(2\alpha+1)/2})) \tag{3.11}$$

$$u'' \in L^2(0, T; D(S^{\alpha})) \tag{3.12}$$

$$Bu'' + \psi(t)\, Au = h \quad \text{en} \quad L^2(0, T; D(S^{\alpha})) \tag{3.13}$$

La solución satisface el siguiente estimado de energía:

$$E(t) = \left|S^{\alpha}u'(t)\right|^2 + \left|S^{2\alpha+1/2}\, u(t)\right|^2 \leq D_0\ \exp(D_1\, t) \tag{3.14}$$

donde

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \left|S^{(2\alpha+1)/2} u_1\right|^2 + \psi(0)\left|S^{\alpha+1} u_0\right|^2 + \left|h\right|^2_{L^2(0,T;D(S^{(2\alpha+1)/2}))} \\
C_1 &= \min\{1, m_0\} \ ; \ C_2 = Max\{1, M_0\} \\
D_0 &= \frac{C_0}{C_1} \ ; \ D_1 = \frac{C_2}{C_1}.
\end{aligned}
$$

Demostración. Sea $V_m = [w_1, w_2, \ldots\ldots, w_m] \subset V$. Luego V_m es un subespacio de V de dimensión finita m, e invariante bajo la acción del operador S^α, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Sea entonces

$$
u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{jm}(t) w_i \in V_m \tag{3.15}
$$

donde las funciones g_{im}, son determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales:

$$
\begin{cases}
b(u_m''(t), w_j) + \psi(t)\, a(u_m(t), w_j) = b(h(t), w_j) & \forall\, j = 1, 2, \ldots, m \\
u_m(0) = u_{0m} \ ; \ u_m'(0) = u_{1m}
\end{cases} \tag{3.16}
$$

Por la selección de la base especial, el sistema es equivalente con el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$
\begin{cases}
g_{jm}''(t) + \psi(t) \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, g_{km}(t) = b(h(t), w_j) = h_j(t) \\
g_{jm}(0) = b(u_0, w_j) = a_j \\
g_{jm}'(0) = b(u_1, w_j) = b_j \\
j = 1, 2, \ldots\ldots, m.
\end{cases} \tag{3.17}
$$

El sistema de ecuaciones diferenciales lineales (3.17), admite una única solución en un intervalo $[0, t_m)$, de donde obtenemos la existencia de las soluciones aproximadas u_m para $m \geq 1$. Seguidamente debemos obtener estimados a priori para la sucesión $\{u_m\}$ de modo que podamos prolongarlas a un intervalo uniforme de existencia.

Estimado a Priori 1. Por linealidad la ecuación en (3.16) se verifica para todo $v \in V_m$. Entonces haciendo $v = 2S^{2\alpha+2} u_m'(t)$, obtenemos:

$$
2b(u_m''(t), S^{2\alpha+2} u_m'(t)) + 2\psi(t)\, a(u_m(t), S^{2\alpha+2} u_m'(t)) = 2b(h(t), S^{2\alpha+2} u_m'(t)) \tag{3.18}
$$

desde que

$$
2b(u_m''(t), S^{2\alpha+2} u_m'(t)) = 2a\,(S^{-1} u_m''(t), S^{2\alpha+2} u_m'(t)) = \frac{d}{dt}\left|S^{(2\alpha+1)/2} u_m'(t)\right|^2 \tag{3.19}
$$

$$
\begin{aligned}
2\psi(t) a(u_m(t), S^{2\alpha+2} u_m'(t)) &= 2\psi(t)\, a(S^{\alpha+1} u_m(t), S^{\alpha+1} u_m'(t)) = \\
&= \frac{d}{dt}\psi(s)\left|S^{\alpha+1} u_m(t)\right|^2 - \psi'(t)\left|S^{\alpha+1} u_m(t)\right|^2
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

$$2b(h(t),\, S^{2\alpha+2}u'_m(t)) = 2a\,(S^{(2\alpha+1)/2}h(t),\, S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(t)) \le \left|S^{(2\alpha+1)/2}(t)\right|^2 \left|S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(t)\right|^2 \quad (3.21)$$

reemplazando en (3.19)

$$\frac{d}{dt}\left\{\left|S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(t)\right|^2 + \psi(t)\left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|^2\right\} \le \left|S^{(2\alpha+1)/2}h(t)\right|^2 + \left|S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(t)\right|^2 + M_1\left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|^2 \quad (3.22)$$

Ahora integrando en esta desigualdad:

$$\begin{aligned}&\left|S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(t)\right|^2 + m_0\left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|^2 \le \left|S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(t)\right|^2 + \psi(t)\left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|^2 \le \\ &\le \left|S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(0)\right|^2 + \psi(0)\left|S^{\alpha+1}u_m(0)\right|^2 + \int_0^t \left|S^{(2\alpha+1)/2}h(s)\right|^2 ds + \int_0^t \left|S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(s)\right|^2 ds + \quad (3.23) \\ &+ M_1 \int_0^t \left|S^{\alpha+1}u_m(s)\right|^2 ds \le C_0 + C_2\int_0^t \tau(s)\,ds\end{aligned}$$

Aplicando el lema de Gronwall obtenemos:

$$\left|S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|^2 \le \frac{C_0}{C_1}\exp\{C_2\, t/C_1\} = D_0\exp\{D_1 t\} \quad (3.24)$$

luego

$$(u_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1})) \quad (3.25)$$

$$(u'_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;D(S^{(2\alpha+1)/2})) \quad (3.26)$$

Estimado a Prori 2. Reemplazando w_j por $S^\alpha w_j$ en la ecuación aproximada y multiplicándola por w_j, obtenemos

$$\sum_{j=1}^m b(u''_m(t),\, S^\alpha w_j)\, w_j + \psi(t)\sum_{j=1}^m a(u_m(t),\, S^\alpha w_j)\, w_j = \sum_{j=1}^m b(h(t),\, S^\alpha w_j) w_j \quad (3.27)$$

Luego

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m b(u''_m(t),\, S^\alpha w_j) &= \sum_{j=1}^m b(S^\alpha u''_m(t),\, w_j)\, w_j = S^\alpha u''_m(t) = \quad (3.28)\\ &= -\psi(t)\sum_{j=1}^m a(u_m(t),\, S^\alpha w_j) w_j + \sum_{j=1}^m b(h(t),\, S^\alpha w_j) w_j = \\ &= -\psi(t)\sum_{j=1}^m b(Su_m(t),\, S^\alpha w_j) w_j + \sum_{j=1}^m b(h(t),\, S^\alpha w_j) w_j = \\ &= -\psi(t)\sum_{j=1}^m b(S^{\alpha+1}u_m(t)\, w_j), w_j + \sum_{j=1}^m b(S^\alpha h(t),\, w_j) w_j = \\ &= -\psi(t)\, P_m S^{\alpha+1}u_m(t) + P_m h(t) = -\psi(t)\, S^{\alpha+1}u_m(t) + P_m h(t)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(u_m'') \text{ es acotada en } L^2(0,T;D(S^\alpha)) \tag{3.29}$$

Convergencia de las Soluciones Aproximadas

Para tratar la convergencia de las soluciones aproximadas utilizamos el siguiente

Lema 1. Sean X, Y, Z espacios de Banach tales que $X \subset Y \subseteq Z$, con inmersiones continuas y la inmersión $X \subset Y$ es compacta. Sea

$$W = \left\{u \in L^p(0,T;X)\,;\, u' \in L^q(0,T;Z)\right\}$$

donde u' denota la derivada generalizada de $u:[0,T] \to X$ sobre $(0,T)$.

$$\text{Si } p=\infty,\, q>1 \text{ entonces } W \subseteq C\left([0,T];Z\right) \text{ es compacta.} \tag{3.30}$$

$$\text{Si } 1 \le p < \infty,\, q=1 \text{ entonces } W \subseteq L^p(0,T;Y) \text{ es compacta.} \tag{3.31}$$

Demostración. (Ver J. Simon [18]).

Por los estimados 1 y 2, tenemos que:

$$(u_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1})) \tag{3.32}$$

$$(u_m') \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;D(S^{(2\alpha+1)/2})) \tag{3.33}$$

$$(u_m'') \text{ es acotada en } L^2(0,T;D(S^\alpha)) \tag{3.34}$$

Entonces, existe una subsucesión de (u_m) que continuamos denotando de la misma forma tal que:

$$u_m \to u \text{ débil - * en } L^\infty(0,T;D(S^{\alpha+1})) \tag{3.35}$$

$$u_m'' \to u'' \text{ débil en } L^2(0,T;D(S^\alpha)) \tag{3.36}$$

Entonces:

$$\int_0^T \left[b_\alpha(u''(t),v) + \psi(t)\, b_\alpha(Su(t),v)\right]\theta(t)\,dt = \int_0^T b_\alpha(h(t),v)\,\theta(t)\,dt; \tag{3.37}$$

$\forall\, \theta \in D(0,T)$, $\forall\, v \in V_m$, $m \ge 1$

Por argumentos de densidad

$$\int_0^T \left[b_\alpha(u''(t),v)) + \psi(t)\, b_\alpha(Su(t),v(t))\right]dt = \int_0^T b_\alpha(h(t),v(t))\,dt; \tag{3.38}$$

$\forall\, v \in L^2(0,T;D(S^\alpha))$

lo que demuestra la primera parte del Teorema 1.

Para demostrar que la solución u verifica el estimado de energía (3.14), tendremos en cuenta que por el Lema 1, se tiene las siguientes convergencias:

$$u_m \to u \text{ fuerte } C^0\left([0,T]; D(S^{(2\alpha+1)/2})\right) \tag{3.39}$$

$$u'_m \to u' \text{ fuerte } C^0\left([0,T]; D(S^{(4\alpha+1)/4})\right) \tag{3.40}$$

A continuación demostramos que:

$$u_m(t) \to u(t) \text{ débil en } D(S^{\alpha+1}) \qquad \forall\, t \in [0,T] \tag{3.41}$$

$$u'_m(t) \to u'(t) \text{ débil en } D(S^{(2\alpha+1)/2}) \quad \forall\, t \in [0,T] \tag{3.42}$$

En efecto, sea $v \in V_k$; $k \geq m$. Tenemos

$$\begin{aligned}(S^{\alpha+1}u_m(t), S^{\alpha+1}v) = (S^{(2\alpha+1)/2}u_m(t), S^{(4\alpha+3)/4}v) \to (S^{(2\alpha+1)/2}u(t), S^{(4\alpha+3)/4}v) &= \\ = (S^{\alpha+1}u(t), S^{\alpha+1}v)&\end{aligned} \tag{3.43}$$

desde que por (3.41)

$$\left|(S^{(2\alpha+1)/2}u_m(t) - S^{(2\alpha+1)/2}u(t), S^{(4\alpha+3)/4}v\right| \leq \left|S^{(2\alpha+1)/2}u_m(t) - S^{(2\alpha+1)/2}u(t)\right|\left|S^{(4\alpha+3)/4}v\right| \xrightarrow{m\to\infty} 0 \tag{3.44}$$

nuevamente por argumentos de densidad, la convergencia en (3.44) se verfica para todo $v \in D(S^{\alpha+1})$.

Esto demuestra (3.41).

Análogamente:

$$\begin{aligned}(S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(t), A^{(2\alpha+1)/2}v) = (S^{(4\alpha+1)/4}u'_m(t), S^{(4\alpha+3)/4}v) \to (S^{(4\alpha+1)/4}u'(t), S^{(4\alpha+3)/4}v) &= \\ = (S^{(2\alpha+1)/2}u'(t), S^{(2\alpha+1)/2}v)&\end{aligned} \tag{3.45}$$

Luego por el Estimado 1 y (3.41), (3.42), obtenemos

$$\left|S^{(2\alpha+1)/2}u'(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1}u(t)\right|^2 \leq \varliminf_{m\to\infty}\left\{\left|S^{(2\alpha+1)/2}u'_m(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1}u_m(t)\right|^2\right\} \leq D_0 e^{D_1 t} \tag{3.46}$$

Unicidad. Sean u, z dos soluciones de (3.3) y $y = u - z$. Entonces

$$y \in L^\infty(0,T; D(S^{\alpha+1})) \tag{3.47}$$

$$y' \in L^\infty(0,T; D(S^{(2\alpha+1)/2})) \tag{3.48}$$

$$y'' \in L^2(0,T; D(S^\alpha)) \tag{3.49}$$

$$y(0) = 0 ; \quad y'(0) = 0 \tag{3.50}$$

y satisface la ecuación

$$By'' + \psi(t)\, Ay = 0 \quad \text{ en } \; L^2(0,T; D(S^\alpha)) \tag{3.51}$$

Componiendo con $w = 2y'(t) \in D(S^\alpha)$ en esta ecuación, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\left|S^{\alpha} y'(t)\right|^{2} + \psi(t)\left|S^{(2\alpha+1)/2} y(t)\right|^{2}\right\} = \psi'(t)\left|S^{(2\alpha+1)/2} y(t)\right|^{2} \leq M_1 \left|S^{(2\alpha+1)/2} y(t)\right|^{2} \quad (3.52)$$

integrando de 0 a t y teniendo en cuenta que $y(0) = y'(0) = 0$

$$\eta(t) = \left|S^{\alpha} y'(t)\right|^{2} + m_0 \left|S^{(2\alpha+1)/2} y(t)\right|^{2} \leq C \int_0^t \eta(s)\, ds \quad (3.53)$$

y por el lema de Gronwall $S^{\alpha} y'(t) = S^{(2\alpha+1)/2} y(t) = 0 \quad \forall\, t \in [0, T]$; luego $u = z$.

4. Problema No-Lineal (Solución local). En esta parte demostraremos la existencia de solución local del problema no-lineal:

$$Bu'' + M\left(\left|u(t)\right|_W\right) Au = f \quad (4.1)$$

$$u(0) = u_0 \ ; \ u'(0) = u_1 \quad (4.2)$$

donde:

W es un espacio de Banach, real, reflexivo, tal que su correspondiente espacio dual W^* es estrictamente convexo. (4.3)

$$D(S^{(2\alpha+1)/2}) \subset W. \quad (4.4)$$

Entonces de (4.4) y de la teoría de los operadores máximo monótonos, obtenemos las siguientes propiedades del operador de dualidad sobre W.

La aplicación de dualidad $J: W \to W^*$ es simple valuada, demicontinua, máximo monótona, acotada, coercitiva y

$$|Ju|_{W^*} = |u|_W$$

La norma $u \to |u|_W$ es G-diferenciable sobre $W - \{0\}$ y si $\psi(u) = |u|_W$, entonces

$$\psi'(u) = \frac{Ju}{|u|_W} \quad \forall\, u \neq 0$$

Hipótesis sobre la Función M

H-1 $\quad M \in C^1\left([0, T]; \mathbb{R}^+\right)$, donde T es un número real positivo.

H-2 $\quad M(0) = 0$; $\exists\ \varepsilon > 0$, tal que $M(s) > 0 \quad \forall\, s \in \langle 0, \varepsilon \rangle$.

H-3 $\quad M'(s) \geq 0 \quad \forall\, s \in [0, T]$.

Definición de Constantes. A continuación definimos diversas constantes que aparecen en esta parte del trabajo.

Para datos iniciales $0 \neq u_0$, u_1, f convenientes, consideramos:

C-1 $\quad 0 < m_0 = M\left(\dfrac{|u_0|_W}{2}\right)$

C-2 $\quad C_0 = \left|S^{(2\alpha+1)/2}u_1\right|^2 + M\left(|u_0|_W\right)\left|S^{\alpha+1}u_0\right|^2 + |f|^2_{L^2(0,\,T;\,D(A^{(2\alpha+1)/2}))}$

C-3 $\quad C_1 = \min\{1,\, m_0\}$

C-4 $\quad D_0 = \dfrac{C_0}{C_1}$

C-5 $\quad 0 < K^2 = 2D_0 \leq 1$

C-6 $\quad |v|_W \leq d_2\left|S^{(2\alpha+1)/2}v\right| \qquad \forall\, v \in D(S^{(2\alpha+1)/2})$

C-7 $\quad M_0 = Sup\left\{M'(s)/s \in [0,\, d_2 K]\right\}$

C-8 $\quad C_2 = Max\{1,\, M_0\}$

C-9 $\quad D_1 = \dfrac{C_2}{C_1}$

C-10 $\quad |v|_W \leq d_2\left|S^{(2\alpha+1)/2}\,v\right| \qquad \forall\, v \in D(S^{(2\alpha+1)/2})$

C-11 $\quad 0 < T^* = \dfrac{|u_0|_W}{2d_2K}$

C-12 $\quad T_0 = \min\left\{T,\, T^*,\, \dfrac{1}{D_1}\right\}$

Consideremos el siguiente conjunto:

$$G = \left\{\begin{array}{ll} v \in L^\infty(0, T_0; D(S^{\alpha+1}))/v' \in L^\infty(0, T_0; D(S^{2\alpha+1/2})), & v'' \in L^2(0, T_0; D(S^\alpha)) \\ v(0) = u_0 \neq 0 \quad ; & \left|S^{(2\alpha+1)/2}\,v'(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1}\,v(t)\right|^2 \leq K^2 \quad \forall\, t \in [0, T_0] \end{array}\right\}$$

Lema 2. Si $v \in G$ y $\psi(t) = M\left(|v(t)|_W\right)$, entonces

$$0 < m_0 \leq \psi(t) \qquad \forall\, t \in [0, T^*] \tag{4.5}$$

$$|\psi'(t)| \leq M_0 d_2 = M_1 \quad \forall\, t \in [0, T^*] \tag{4.6}$$

Demostración. Sea $v \in G$, entonces

$$\left|\,|v(t)|_W - |v(0)|_W\right| \leq |v(t) - v(0)|_W = \left|\int_0^t v'(s)\,ds\right|_W \leq \int_0^t |v'(s)|_W\, ds \leq d_2\, K\, t$$

De esta desigualdad obtenemos

$$|u_0|_W - d_2\, K\, t = |v(0)|_W - d_2\; K\; t \le |v(t)|_W$$

Luego

$$0 < \frac{|u_0|_W}{2} = |u_0|_W - \frac{|u_0|_W}{2} \le |u_0|_W - d_2\, KT^* \le |u_0|_W - d_2\, Kt \le |v(t)|_W \qquad \forall\, t \in [0, T^*]$$

Por la hipótesis H-2

$$\psi(t) = M\left(|v(t)|_W\right) \ge M\left(\frac{|u_0|_W}{2}\right) = m_0 > 0$$

lo que demuestra (4.5).

Debemos ahora obtener estimados para $\psi'(t)$. Tenemos por la regla de la cadena, que

$$\psi'(t) = M'\left(|v(t)|_W\right)\left\langle \frac{Jv(t)}{|v(t)|_W},\, v'(t)\right\rangle_{W^* \times W}$$

Entonces

$$|\psi'(t)| \le \left|M'\left(|v(t)|_W\right)\right| \frac{|Jv(t)|_{W^*}}{|v(t)|_W} |v'(t)|_W \le M_0\, |v'(t)|_W \le M_0 d_2 \left|A^{(2\alpha+1)/2} v'(t)\right| \le M_0 d_2 = M_1$$

lo que demuestra el Lema 2.

Teorema 2. Sean

$$v \in G \tag{4.7}$$

$$0 \ne u_0 \in D(S^{\alpha+1}) \tag{4.8}$$

$$u_1 \in D(S^{(2\alpha+1)/2}) \tag{4.9}$$

$$f \in L^2(0, T_0; D(S^{(2\alpha+1)/2})) \tag{4.10}$$

Entonces, existe una única solución $u \in G$ del problema:

$$Bu'' + M\left(|v(t)|_W\right) Au = f \qquad \text{en} \quad L^2(0, T_0; D(S^{\alpha})) \tag{4.11}$$

$$u(0) = u_0\;;\; u'(0) = u_1 \tag{4.12}$$

Demostración: Procediendo como en la demostración del Teorema 1, haciendo $T = T_0$, $\psi(t) = M\left(|v(t)|_W\right)$ y utilizando el Lema 1, se obtiene que para todo $v \in G$, existe una única función u, tal que:

$$u \in L^{\infty}(0, T_0; D(S^{\alpha+1})) \tag{4.13}$$

$$u' \in L^{\infty}(0, T_0; D(S^{(2\alpha+1)/2})) \tag{4.14}$$

$$u'' \in L^{2}(0, T_0; D(S^{\alpha})) \tag{4.15}$$

$$Bu'' + \psi(t)\, Au = f \quad \text{en} \quad L^{2}(0, T; D(S^{\alpha})) \tag{4.16}$$

y además satisface el siguiente estimado de energía:

$$\left|S^{(2\alpha+1)/2}\, u'(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1}\, u(t)\right|^2 \leq D_0 \exp(D_1 t) \leq K^2 \tag{4.17}$$

Luego $u \in G$.

Teorema 3. Sean u_0, u_1, f datos iniciales que satisfacen las condiciones del Teorema 2. Entonces existe una única solución $u \in G$ del problema (4.11) y (4.12).

Demostración. La idea es resolver una sucesión de problemas de la forma

$$Bz_p'' + M\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W\right) Az_p = f \quad \text{en} \quad L^2(0, T_0; D(S^{\alpha})) \tag{4.18}$$

$$z_p(0) = u_0\ ;\ z_p'(0) = u_1 \tag{4.19}$$

$$p \geq 2$$

donde:

z_2 es la única solución del problema

$$Bz_2'' + M\left(\left|u_0\right|_W\right) Az_2 = f \quad \text{en} \quad L^2(0, T_0; D(S^{\alpha})) \tag{4.20}$$

$$z_2(0) = u_0\ ;\ z_2'(0) = u_1 \tag{4.21}$$

Desde el Teorema 2, podemos definir una función $S: G \to G$ tal que $Sz_{p-1} = z_p$, $p \geq 3$ donde z_p es la única solución del problema (4.18).

La dificultad principal es demostrar la convergencia

$$M\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W\right) Az_p \xrightarrow{m\to\infty} M\left(\left|z(t)\right|_W\right) Az \ \text{ débil en } \ L^2(0, T_0; D(S^{\alpha})) \tag{4.22}$$

En primer lugar probaremos que

$$M\left(\left|z_{p-1}\right|_W\right) \xrightarrow{m\to\infty} M\left(\left|z\right|_W\right) \quad \text{en} \quad C^0\left(\left[0, T_0\right]\right) \tag{4.23}$$

En efecto;

desde que la sucesión $(z_p)_{p\geq 2} \subset G$, obtenemos que existe una función $z \in L^{\infty}(0, T_0; D(S^{\alpha+1}))$ tal que:

$$z_p \to z \quad \text{débil * en} \quad L^{\infty}(0, T_0; D(S^{\alpha+1})) \tag{4.24}$$

$$z_p'' \to z'' \quad \text{débil en} \quad L^2(0, T_0; D(S^{\alpha})) \tag{4.25}$$

De (4.25) y como B es compacto

$$Bz''_p \to Bz'' \text{ débil en } L^2(0, T_0; D(S^\alpha)) \tag{4.26}$$

además por el Lema 2

$$z_{p-1} \xrightarrow{p\to\infty} z \quad \text{en} \quad C\big([0,T_0]; D(A^{\eta+(2\alpha+1)/2})\big) \subset C\big([0,T_0]; W\big); \eta \in [0,1/2) \tag{4.27}$$

Ahora por la hipótesis H-1, sobre la función M

$$M(s_1) - M(s_2) = M'(\theta)(s_1 - s_2)$$
$$\forall\, s_1, s_2, \quad \theta \in [s_1, s_2]$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\left|M\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W\right) - M\left(\left|z(t)\right|_W\right)\right| \leq \\ &\leq \left|M'(\theta(t))\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W - \left|z(t)\right|_W\right)\right| \leq C\left|z_{p-1}(t) - z(t)\right|_W \xrightarrow{p\to\infty} 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

donde $\theta(t) = \beta\left|z_{p-1}(t)\right|_W + (1-\beta)\left|z(t)\right|_W \leq d_2\ K$ por

Por otro lado:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left|\left(M\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W\right) Az_p(t) - M\left(\left|z(t)\right|_W\right) Az(t), v(t)\right)_\alpha\right| dt \\ &= \int_0^T \left|\left(M\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W\right) A^{\alpha+1} z_p(t) - M\left(\left|z(t)\right|_W\right) A^{\alpha+1} z(t), A^\alpha v(t)\right)\right| dt \\ &\leq \int_0^T \left|\left(M\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W\right) A^{\alpha+1} z_p(t) - M\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W\right) A^{\alpha+1} z(t), A^\alpha v(t)\right)\right| dt + \\ &+ \int_0^T \left|\left(M\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W\right) A^{\alpha+1} z(t) - M\left(\left|z(t)\right|_W\right) A^{\alpha+1} z(t), A^\alpha v(t)\right)\right| dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left|M\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W\right)\right| \left|\left(A^{\alpha+1} z_p(t) - A^{\alpha+1} z(t), A^\alpha v(t)\right)\right| dt + \\ &+ \int_0^T \left|M\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W\right) - M\left(\left|z(t)\right|_W\right)\right| \left|A^{\alpha+1} z(t)\right| \left|A^\alpha v(t)\right| dt \leq \\ &\leq C \int_0^T \left|\left(A^{\alpha+1} z_p(t) - A^{\alpha+1} z(t), A^\alpha v(t)\right)\right| dt + \\ &+ C \int_0^T \left|M\left(\left|z_{p-1}(t)\right|_W\right) - M\left(\left|z(t)\right|_W\right)\right| dt \xrightarrow{p\to\infty} 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

lo que demuestra (4.23). Luego

$$Bz'' + M\left(|z(t)|_W\right) Az = f \quad \text{en} \quad L^2(0, T; D(S^\alpha)) \tag{4.30}$$

Procediendo como en la demostración del Teorema 1, se prueba que:

$$z_p(t) \to z(t) \text{ débil en } D(S^{\alpha+1}) \quad \forall\, t \in [0, T_0] \tag{4.31}$$

$$z'_p(t) \to z'(t) \text{ débil en } D(S^{(2\alpha+1)/2}) \quad \forall\, t \in [0, T_0] \tag{4.32}$$

Entonces

$$\left|S^{(2\alpha+1)/2} z'(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1} z(t)\right|^2 \le \varliminf_{p\to\infty} \left\{\left|S^{(2\alpha+1)/2} z'_p(t)\right|^2 + \left|S^{\alpha+1} z_p(t)\right|^2\right\} \le K^2 \tag{4.33}$$

Por lo tanto $z \in G$.

Unicidad.

Sean u, z dos soluciones del problema (4.11) y (4.12) y $y = u - z$. Entonces se verifica que:

$$y \in L^\infty(0, T_0; D(S^{\alpha+1})) \tag{4.34}$$

$$y' \in L^\infty(0, T_0; D(S^{2\alpha+1/2})) \tag{4.35}$$

$$y'' \in L^\infty(0, T_0; D(S^\alpha)) \tag{4.36}$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \tag{4.37}$$

y satisface la ecuación

$$By'' + M\left(|u(t)|_W\right) Ay = \left(M\left(|z(t)|_W\right) - M\left(|u(t)|_W\right)\right) Az \quad \text{en} \quad L^2(0, T_0; D(S^\alpha)) \tag{4.38}$$

Componiendo con $w(t) = 2y'(t)$ en esta ecuación y teniendo en cuenta que

$$\left|M\left(|z(t)|_W\right) - M\left(|u(t)|_W\right)\right| \le C\,|z(t) - u(t)|_W = C|y(t)|_W \tag{4.39}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}&\left\{\left|S^\alpha y'(t)\right|^2 + \psi(t)\left|S^{(2\alpha+1)/2} y(t)\right|^2\right\} \le \qquad (4.40)\\
&\le C|y(t)|_0 \left|S^{\alpha+1} z(t)\right|\left|S^\alpha y'(t)\right| + \psi'(t)\left|S^{(2\alpha+1)/2} y(t)\right|^2 \le \\
&\le C\left|S^{(2\alpha+1)/2} y(t)\right|\left|S^\alpha y'(t)\right| + C\left|S^{(2\alpha+1)/2} y(t)\right|^2 \le \\
&\le C\left|S^\alpha y'(t)\right| + C\left|S^{(2\alpha+1)/2} y(t)\right|^2
\end{aligned}$$

donde C representa diversas constantes que no dependen de t. Integrando de 0 a t y teniendo en cuenta que $y(0) = y'(0) = 0$ obtenemos

$$\eta(t) = \left|S^{\alpha} y'(t)\right|^2 + m_0 \left|S^{(2\alpha+1)/2}\, y(t)\right|^2 \leq C \int_0^t \eta(s)\, ds \tag{4.41}$$

y por el lema de Gronwall $S^{\alpha} y'(t) = S^{(2\alpha+1)/2}\, y(t) = 0 \quad \forall\, t \in [0, T_0]$; luego $u = z$.

5. Aplicaciones

1. Consideremos las siguientes hipótesis.

(H 1) $(V, (u, v)_V)$, es un espacio de Hilbert real, separable.
(H 2) Las formas bilineales $a, b : V \times V \to \mathbb{R}$ son acotadas y simétricas. Asimismo $a(u, v)$ es fuertemente monótona, y $b(u, v)$ es compacta y estrictamente positiva.

Se tiene el siguiente teorema.

Teorema. Supongamos se cumplen las hipótesis H 1, H 2. Entonces existe un sistema ortogonal completo $\{w_j\}_{j\geq 1}$ de autovalores en V con respecto al producto escalar $(u, v) = a(u, v)$, y una familia de autovectores $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ de multiplicidad finita para cada λ_k, tales que:

$$a(w_j, v) = \lambda_j\, b(w_j, v) \quad \forall\, v \in V \tag{5.1}$$

$$b(w_j, w_i) = \delta_{ji} \quad \forall\, i, j \tag{5.2}$$

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} b(u, w_j)\, w_j \quad \forall\, u \in V \tag{5.3}$$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \lambda_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty \tag{5.4}$$

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto regular. Consideremos:

$V = H_0^1(\Omega), W = L^p(\Omega), H = L^2(\Omega)$

$1 < p \leq \dfrac{2n}{n-2}$, si $n \geq 3$, y $1 < p < \infty$, si $n = 1, 2$

$M(s) = a + bs^q,\ q \geq 1,\ a \geq 0,\ b > 0$

$\rho \in L^{\infty}(\Omega);\ 0 < \rho(x) \leq \rho_1$, *c.t.p.* de Ω.

En este caso, un cálculo directo demuestra que el operador de dualidad $J : W \to W'$ esta definido por

$$J(u) = |u|_p^{2-p} \, |u|^{p-2}\, u;\ 1 < p < \infty$$

Entonces existe una única solución local del problema

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(a + b\left(\displaystyle\int_\Omega |u(x,t)|^p\right)^{q/p}\right)(-\Delta u) = f & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \\ u(0) = u_0 \;\; ; \;\; u'(0) = u_1 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{5.5}$$

2. Sea $M(s) = N(s^2)$ y $J: W \to W^*$ el operador de dualidad sobre W. Consideremos el problema:

$$\begin{cases} Bu'' + N\left(|u|_W^2\right) Au = f \\ u(0) = u_0 \;\; ; \;\; u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{5.6}$$

en este caso si $\varphi(u) = |u|_W^2$, entonces $\varphi'(u) = 2J(u), \forall\, u \in W$, lo que facilita los cálculos desde que no requiere que $u \neq 0$.

En el caso particular que W sea un espacio de Hilbert $\varphi'(u) = 2Ju$, donde J es el operador de Riesz, $\langle Ju, v\rangle_{W^* \times W} = (u, v)_W \;;\; \forall u, v \in W$.

Como casos particulares de la aplicación 2, para $W = V = D(A^{1/2})$, tenemos el problema abstracto de Kirchhoff:

$$\begin{cases} Bu'' + N\left(|u|_V^2\right) Au = f \\ u(0) = u_0 \;;\; u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{5.7}$$

formulado por Lions, J.L. en [9]. Si $W = H$, se tiene el problema de Carrier abstracto:

$$\begin{cases} Bu'' + N\left(|u|_H^2\right) Au = f \\ u(0) = u_0 \;;\; u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{5.8}$$

Una adecuada generalización de las aplicaciones (5.6), (5.7) es considerar $W = D(A^\alpha)$ para obtener:

$$\begin{cases} Bu'' + N\left(|u|_\alpha^2\right) Au = f \\ u(0) = u_0 \;;\; u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{5.9}$$

conocido como el modelo abstracto de Kirchhoff - Carrier.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] AROSIO A -SPAGNOLO S.- *Global solutions of the Cauchy problem for a non-linear Hyperbolic Equation.* Universita di Pisa. Departamento de Matemática. Roma (1982).

[2] CARRIER G. F. *On the non-linear vibration problem of the elastic string.* Quart. Appl. Math. - 3- (1945).

[3] COUSIN A., FROTA C., LARKIN N., MEDEIROS L. A. *On the abstrac model of Kirchhoff-Carrier Equation.* Comm. In App. Analysis. - 3 - (1997).

[4] CRIPPA H. *On Local Solutions of Some mildly Degenerate Hyperbolic Equations.* Non-linear Analysis, Vol. 21 (8) (1993).

[5] EBIHARA Y. MEDEIROS L.A. -MILLA. M- *Local Solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equations.* Nonlinear Analysis. Vol. 10 (1986).

[6] IZAGUIRRE R., VÉLIZ V. *Solución local para una clase de ecuaciones no-lineales degeneradas tipo Kirchhoff - Carrier.* I Seminario Internacional de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. Universidad Ricardo Palma - Lima - Perú - (1999).

[7] IZAGUIRRE R., VÉLIZ V. *Solución Local para una clase de ecuaciones no-lineales de tipo Kirchhoff.* Actas del 45° Seminario Brasileiro de Analise (1997).

[8] KIRCHHOFF G. *Vorlesungenuber mechanik.* Teubner, Leipzig (1883).

[9] LIONS J.L. *Quelques Methodes de Resolution des Probleme aux limites nonlinear.* Dunod. Paris. (1969).

[10] MEDEIROS L.A., MILLA M. *Solutions for the Equation of Nonlinear Vibrations Sobolev Spaces of Fractionary Order.* Math. Apl. Comp. (1987).

[11] MEDEIROS L.A., MILLA M. *Remarks on a nonlinear model vibrations of string with damping.* 30 Seminario Brasilero de Analise L N C C R J. (1989).

[12] ONO K. *Global existence, Decay and Blowup of Solutions for Some Mildly Degenerate Nonlinear Kirchhoff String.* J. Diff. Eq. 137 (1997).

[13] PERLA G. *On classical solutions of a quasilinear hyperbolic equations.* Nonlinear Analysis. Vol. 3 (1979).

[14] POHOZAEV S. *The Kirchhoff quasilinear hyperbolic equation.* Differenctial Equations Vol. 21. (1985).

[15] POHOZAEV S. *On a class of quasilinear hyperbolic equation.* Math. Sbornik, Vol. 96 (1975).

[16] RIVERA P. *On local strong solutions of a nonlinear partial differential equation.* Appl. Analysis Vol. 10. (1980).

[17] SIMON J. *Compact Sets in the Space* $L^p(0,T;B)$. Universite Pierre et Marie Curie. Laboratoire d'Analyse Numerique (1985).

[18] YAMADA Y. *Some Nonlinear Degenerate Wave Equations.* Non Linear Analysis, 10 (11) (1987).

[19] ZEIDLER E. *Non Linear Functional Analysis.* Part II-B. (1990).