PESQUIMAT
Revista del Instituto de
Investigación de la Facultad
de Ciencias Matemáticas de la UNMSM
Vol. I, N° 1, pp 55-72 Lima - Perú Julio -1998

Estratificación de conjuntos semi-algebraicos de R^n (*)

Tomás Núñez Lay

Facultad de Ciencias Matemáticas - U.N.M.S.M.

Resumen : En el presente trabajo estudiamos detalladamente el proceso de estratificación de un conjunto semi-algebraico.

1. Notaciones Sea $a \in R$, por definición =

$$\text{sign}\ (a) = \begin{cases} 1 & \text{si}\ \ a > 0 \\ 0 & \text{si}\ \ a = 0 \\ -1 & \text{si}\ \ a < 0 \end{cases}$$

Sean $f_1 , \ldots , f_s$ una sucesión finita de polinomios de $R[x]$, y

sean $x_1 < \ldots < x_N$ las raíces en R de los polinomios f_i no nulos ;

hagamos $x_0 = -\infty$ y $x_{N+1} = +\infty$

Si $I_k = < x_k , x_{k+1} >$, sign $f_i(x)$ es constante para $x \in I_k$ y

denotamos con sign $f_i(I_k)$ a dicha constante.

Denotamos también :

$$\text{SIGN}\ (f_1 , \ldots , f_s) = \begin{bmatrix} \text{sign}\ f_1(I_0) & \text{sign}\ f_1(x_1) & \text{sign}\ f_1(I_1) \ldots \text{sign}\ f_1(x_N) & \text{sign}\ f_1(I_N) \\ \text{sign}\ f_2(I_0) & \text{sign}\ f_2(x_1) & \text{sign}\ f_2(I_1) \ldots \text{sign}\ f_2(x_N) & \text{sign}\ f_2(I_N) \\ \ldots\ldots & & & \\ \text{sign}\ f_s(I_0) & \text{sign}\ f_s(x_1) & \text{sign}\ f_s(I_1) \ldots \text{sign}\ f_s(x_N) & \text{sign}\ f_s(I_N) \end{bmatrix}$$

Si $m = \sup \{ \text{grado}\ f_i \ / \ i = 1 , \ldots s \}$, tenemos $N \leq s . m$ (el número de raíces es menor ó igual al número de polinomios por el mayor de los grados de los f_i).

Denotemos :

$W_{s,m}$ = reunión disjunta de los conjuntos de matrices de orden

---

(*) El presente trabajo se desarrolló como parte del proyecto de investigación 1996 titulado "Aproximación local de conjuntos analíticos", habiendo recibido apoyo económico de la ex - OGI - U.N.M.S.M.

$s \times (2\ell + 1)$ para $\ell = 0, 1, \ldots, s\,m$; cuyos elementos pertenecen a $\{-1, 0, +1\}$.

$$W_{s,m} = \bigcup_{l=0}^{sm} \{-1,0,1\}^{s \times (2\ell+1)}$$

2. Lema Sea $\varepsilon : \{1, \ldots, s\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ una aplicación.

Entonces existe $W(\varepsilon) \subseteq W_{s,m}$ tal que para toda sucesión $f_1, \ldots, f_s$ en $R[x]$ con grado $f_i \leq m$, el sistema

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} f_1(x) &= \varepsilon(1) \\ \operatorname{sign} f_2(x) &= \varepsilon(2) \\ &\vdots \\ \operatorname{sign} f_s(x) &= \varepsilon(s) \end{aligned}$$

tiene una solución $x \in R$ si y sólo si $\mathrm{SIGN}(f_1, \ldots, f_s) \in W(\varepsilon)$

Prueba :

$W(\varepsilon)$ está formado por las matrices donde una de las columnas coincide con la sucesión $\varepsilon(1), \varepsilon(2), \ldots, \varepsilon(s)$

□

El siguiente resultado tiene dos presentaciones equivalentes, usaremos la presentación dada en el lema 3 , daremos la prueba de su equivalente el lema 4 .

3. Lema Existe una aplicación $\varphi : W_{2s,m} \rightarrow W_{s,m}$ tal que para toda sucesión $f_1, \ldots, f_s$ de polinomios de $R[x]$ con grado $\leq m$, con f_s no constante y ninguno de los polinomios $f_1, \ldots, f_{s-1}$ idénticamente nulo , se tiene :

$\mathrm{SIGN}(f_1, \ldots, f_s) = \varphi(\mathrm{SIGN}(f_1, \ldots, f_{s-1}, f_s', g_1, \ldots, g_s))$

donde f_s' es la derivada de f_s y $g_1, \ldots, g_s$ son los residuos de las divisiones euclideanas de f_s por $f_1, \ldots, f_{s-1}, f_s'$ respectivamente.

4. Lema Supongamos que f_s es exactamente de grado $m > 0$ y que ninguno de los polinomios $f_1, \ldots, f_{s-1}$ es idénticamente nulo.

Si $g_1, \ldots, g_s$ son los residuos obtenidos cuando f_s se divide por $f_1, \ldots, f_{s-1}, f_s'$ entonces la ecuación $\mathrm{SIGN}(f_1, \ldots, f_{s-1}, f_s', g_1, \ldots, g_s) = \omega$

determina $\mathrm{SIGN}(f_1, \ldots, f_s)$.

Prueba :

Sean $x_1 < \ldots < x_N$ los puntos de R donde algún $f_1, \ldots, f_{s-1}, f'_s, g_1, \ldots, g_s$ es cero sin ser idénticamente nulo.

Conociendo ω podemos seleccionar los ceros $x_{i1} < \ldots < x_{ik}$ de $f_1, \ldots, f_{s-1}, f_s$.

Como $f_s(x)$ es igual a $g_1(x)$ ó. . . ó $g_s(x)$ cuando $f_1(x) = 0$ ó . . . ó $f'_s(x) = 0$, podemos determinar sign $f_s(x_{i,j})$ (bastará observar el signo de $g_e(x_{ij})$ en la matriz ω).

El signo del coeficiente líder de f_s es sign $f'_s(I_N)$.

En los intervalos abiertos limitados por $-\infty, x_{i1}, \ldots, x_{ik}, +\infty$ el polinomio f_s es monótono (pues f_s no cambia de signo en estos intervalos) , así pues f_s tiene un cero en uno de estos intervalos si y sólo si f_s tiene signos opuestos en los extremos (el signo en los extremos $\pm\infty$ es dado por el signo del coeficiente líder). Esto quiere decir que podemos saber cuales son los intervalos que contienen un cero de f_s. Estos ceros junto con los ceros $x_{i1}, \ldots, x_{ik}$ que no sean ceros de f'_s nos dan todos los ceros de $f_1, \ldots, f_s$ y tenemos toda la información requerida para conocer SIGN $(f_1, \ldots, f_s)$.

□

5. Cálculo de la función φ

Siguiendo las notaciones del lema 3 , $\varphi : W_{2s,m} \to W_{s,m}$ donde s = número de polinomios en cuestión, $m = \max_{i=1,\ldots,s} \{\text{grado } f_i(x, y)\}$ con $x \in R^n$ fijo ,

$f_1(x, y), \ldots, f_s(x, y) \in R[x, y]$, $x \in R^n$, $y \in R$.

Dada $v = \text{SIGN}(f_1, \ldots, f_{s-1}, f'_s, g_1, \ldots, g_s)$, queremos calcular $\varphi(v)$, es decir , $\omega = \varphi(v) = \text{SIGN}(f_1, \ldots, f_s)$.

Es necesario calcular las raíces de f_s.

Haremos el cálculo para el caso s = 2 , m arbitrari

$v = \text{SIGN}(f_1, f'_2, g_1, g_2)$ y queremos $\omega = \text{SIGN}(f_1, f_2)$.

Para $x \in R^n$ fijo , sean $y_1, < \ldots < y_N$ los puntos de R donde f_1, f'_2, g_1, g_2 (alguno de ellos) es nulo.

Conociendo v podemos seleccionar las raíces de f_1, f'_2 : $y_{i1} < \ldots < y_{ik}$

como $\quad f_2(x,y) = f_1(x,y).(\quad) + g_1(x,y)$

y $\quad f_2(x,y) = f_2(x,y).(\quad) + g_2(x,y)$

entonces $\quad f_2(x, y_{ij}) = 0 + g_1(x, y_{ij})$

ó $\quad f_2(x, y_{ij}) = 0 + g_2(x, y_{ij})$

luego $\quad \text{sign } f_2(x, y_{ij}) = \text{sign } g_1(x, y_{ij})$ ó $\text{sign } g_2(x, y_{ij})$

(para determinar si es uno u otro basta saber si $y_{i,j}$ es raíz de $f_1(x,\cdot)$ ó de $f'_2(x,\cdot)$, y para esto basta observar la columna de v que corresponde a la raíz $y_{i,j}$, debe aparecer 0 en la fila 1 - en este caso será raíz de $f_1(x,\cdot)$ - ó aparece 0 en la fila 2 en este caso será raíz de $f_2(x,\cdot)$).

Existen las tres posibilidades $\text{sign } f_2(x, y_{ij}) = 0, 1$ ó -1 .

<u>**Caso 1**</u> $\quad \text{sign } f_2(x, y_{ij}) = 0$

Entonces y_{ij} es raíz de $f_2(x,\cdot)$

¿ Qué debe suceder para llegar al caso 1 ?

Como $\text{sign } f_2 = \text{sign } g_1$ ó $\text{sign } g_2$ entonces $\text{sign } g_1(x, y_{ij}) = 0$

ó $\text{sign } g_2(x, y_{ij}) = 0$

¿ Quién es y_{ij} ? es una raíz de f_1 ó f'_2 , entonces :

$\text{sign } f_1(x, y_{ij}) = 0$ ó $\text{sign } f'_2(x, y_{ij}) = 0$ Por tanto v podría ser una matriz del tipo

$$v = \begin{bmatrix} \ldots \text{sign } f_1(x, y_{ij}) \ldots \\ \ldots \text{sign } f'_2(x, y_{ij}) \ldots \\ \ldots \text{sign } g_1(x, y_{ij}) \ldots \\ \ldots \text{sign } g_2(x, y_{ij}) \ldots \end{bmatrix}$$

y quedaría en la forma :

$$\begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots \text{sign } f'_2\,(x, y_{ij}) \ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots \text{sign } g_2\,(x, y_{ij}) \ldots \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \omega = \varphi\,(v) = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

columna y_{ij}

ó de lo contrario en la forma :

$$\begin{bmatrix} \ldots \text{sign } f_1\,(x, y_{ij}) \ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots \text{sign } g_1\,(x, y_{ij}) \ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \omega = \varphi\,(v) = \begin{bmatrix} \ldots \text{sign } f_1\,(x, y_{ij}) \ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

columna y_{ij}

<u>**Caso 2**</u> $\quad \text{sign } f_2\,(x, y_{ij}) = 1$

<u>**Subcaso a**</u> $\quad \text{sign } f_2\,(x, y_{i,\,j+1}) = 1$

Entonces f_2 no cambia de signo en $I_{ij} = < y_{ij}\,,\, y_{i,\,j+1} >$ y por tanto **no posee** raíz en I_{ij} , más aún , $\text{sign } f_2\,(I_{ij}) = 1$

¿ Qué debe suceder para llegar al caso 2 a ?

y_{ij} es raíz de f_1 ó f_2 entonces $\text{sign } f_1\,(x, y_{ij})$ ó $\text{sign } f_2\,(x, y_{ij}) = 0$

y $\quad \text{sign } g_1\,(x, y_{ij}) = 1$ ó $\text{sign } g_2\,(x, y_{ij}) = 1$

$y_{i,j+1}$ es raíz de f_1 ó f_2 entonces $\operatorname{sign} f_1 (x, y_{i,j+1}) = 0$ ó $\operatorname{sign} f_2 (x, y_{i,j+1}) = 0$

y $\operatorname{sign} g_1 (x, y_{i\,j+1}) = 1$ ó $\operatorname{sign} g_2 (x, y_{i\,j+1}) = 1$

Así pues :

$$v = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \operatorname{sign} f_1 (x, y_{i\,j}) \cdots\cdots \operatorname{sign} f_1 (x, y_{i,j+1}) \cdots\cdots \\ \\ \cdots\cdots \operatorname{sign} f_2' (x, y_{i\,j}) \cdots\cdots \operatorname{sign} f_2' (x, y_{i,j+1}) \cdots\cdots \\ \\ \cdots\cdots \operatorname{sign} g_1 (x, y_{i\,j}) \cdots\cdots \operatorname{sign} g_1 (x, y_{i,j+1}) \cdots\cdots \\ \\ \cdots\cdots \operatorname{sign} g_2 (x, y_{i\,j}) \cdots\cdots \operatorname{sign} g_2 (x, y_{i,j+1}) \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

puede ser de las formas siguientes :

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots \\ \\ \cdots\cdots & \operatorname{sign} f_2' & \cdots & \operatorname{sign} f_2' & \cdots\cdots \\ \\ \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots \\ \\ \cdots & \operatorname{sign} g_2 & \cdots & \operatorname{sign} g_2 & \cdots \end{bmatrix} \\ \text{columna } y_{i\,j} \qquad \text{columna } y_{i,j+1} \end{array} \Rightarrow \omega = \varphi(v) = \begin{bmatrix} \cdots 0 & \operatorname{sign} f_1 (I_{i\,j}) & 0 \cdots \\ \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & \operatorname{sign} f_1 & \cdots \\ \cdots & \operatorname{sign} f_2' & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots & \operatorname{sign} f_2' & \cdots \\ \cdots & \operatorname{sign} g_2 & \cdots & 1 & \cdots \end{bmatrix} \Rightarrow \omega = \varphi(v) = \begin{bmatrix} \cdots 0 & \operatorname{sign} f_1 (I_{i\,j}) & \operatorname{sign} f_1 \cdots \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ldots\ \text{sign } f_1 \ \ldots\ \text{sign } f_1 \ \ldots \\ \\ \ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots \\ \ldots\ \text{sign } g_1 \ \ldots\ \text{sign } g_1 \ \ldots \\ \ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots \end{bmatrix} \Rightarrow \omega = \varphi(v) = \begin{bmatrix} \ldots\ \text{sign } f_1 & \text{sign } f_1 (I_{ij}) & \text{sign } f_1 \ \ldots \\ \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ldots\ \text{sign } f_1 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots \\ \ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ \text{sign } f'_2 \ \ldots \\ \ldots\ \text{sign } g_1 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots \\ \ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ \text{sign } g_2 \ \ldots \end{bmatrix} \Rightarrow \omega = \varphi(v) = \begin{bmatrix} \ldots\ \text{sign } f_1 & \text{sign } f_1 (I_{ij}) & 0 \ \ldots \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>**Subcaso b**</u> $\quad \text{sign } f_2 (x, y_{i,j+1}) = -1$

Entonces f_2 cambia de signo en I_{ij} y por tanto posee una raíz en I_{ij}, sea $\tilde{y}_{ij}$ dicha raíz , tenemos :

$$\underbrace{\underbrace{y_{ij} \qquad\qquad \tilde{y}_{ij}}_{\tilde{I}_{ij}} \ \underbrace{\qquad\qquad y_{i,j+1}}_{\hat{I}_{ij}}}_{I_{ij}}$$

Tenemos :

$$\text{sign } f_2 (y_{ij}) = 1 \qquad \text{sign } f_2 (\tilde{I}_{ij}) = 1$$

$$\text{sign } f_2 (\tilde{y}_{ij}) = 0 \qquad \text{sign } f_2 (\hat{I}_{ij}) = -1$$

¿ Qué debe suceder para llegar al caso 2 b ?

y_{ij} es raíz de f_1 ó f'_2 entonces $\text{sign } f_1 (x, y_{ij}) = 0$ ó $\text{sign } f_2 (x, y_{ij}) = 0$

y $\quad \text{sign } g_1 (x, y_{ij}) = 1$ ó $\text{sign } g_2 (x, y_{ij}) = 1$

$y_{i,j+1}$ es raíz de f_1 ó f'_2 entonces $\operatorname{sign} f_1(x, y_{i,j+1}) = 0$ ó $\operatorname{sign} f_2(x, y_{i,j+1}) = 0$

y $\operatorname{sign} g_1(x, y_{i,j+1}) = -1$ ó $\operatorname{sign} g_2(x, y_{i,j+1}) = -1$

Por tanto , v puede tener una de las formas siguientes :

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cc}
\ldots 0 \ldots\ldots & \ldots 0 \ldots \\
\ldots \operatorname{sign} f'_2 \ldots & \ldots \operatorname{sign} f'_2 \ldots \\
\ldots 1 \ldots\ldots & \ldots 1 \ldots \\
\ldots \operatorname{sign} g_2 \ldots & \ldots \operatorname{sign} g_2 \ldots
\end{array}\right] \\
\begin{array}{cc} \text{columna } y_{ij} & \text{columna } y_{i,j+1} \end{array}
\end{array}
\Rightarrow \omega =
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccc}
\ldots 0 & \operatorname{sign} f_1(\tilde{I}_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(\tilde{y}_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(\hat{I}_{ij}) & 0 \ldots \\
1 & 1 & 0 & -1 & -1
\end{array}\right] \\
\begin{array}{ccccc} \text{col } y_{ij} & \text{col } \tilde{I}_{ij} & \text{col } \tilde{y}_{ij} & \text{col } \hat{I}_{ij} & \text{col } y_{i,j+1} \end{array}
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc}
\ldots 0 \ldots & \operatorname{sign} f_1 \ldots \\
\ldots \operatorname{sign} f'_2 \ldots & 0 \ldots \\
\ldots 1 \ldots & \operatorname{sign} g_1 \ldots \\
\ldots \operatorname{sign} g_2 \ldots & -1 \ldots
\end{array}\right]
\Rightarrow \omega =
\left[\begin{array}{ccccc}
0 & \operatorname{sign} f_1(\tilde{I}_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(\tilde{y}_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(\hat{I}_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(y_{i,j+1}) \\
1 & 1 & 0 & -1 & -1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc}
\ldots \operatorname{sign} f_1 \ldots & 0 \ldots \\
\ldots 0 \ldots & \operatorname{sign} f'_2 \ldots \\
\ldots \operatorname{sign} g_1 \ldots & -1 \ldots \\
\ldots 1 \ldots & \operatorname{sign} g_2 \ldots
\end{array}\right]
\Rightarrow \omega =
\left[\begin{array}{ccccc}
\operatorname{sign} f_1(y_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(\tilde{I}_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(\tilde{y}_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(I_{ij}) & 0 \ldots \\
1 & 1 & 0 & -1 & -1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc}
\ldots \operatorname{sign} f_1 \ldots & \operatorname{sign} f_1 \ldots \\
\ldots 0 \ldots & 0 \ldots \\
\ldots \operatorname{sign} g_1 \ldots & \operatorname{sign} g_1 \ldots \\
\ldots 1 \ldots & -1 \ldots
\end{array}\right]
\Rightarrow \omega =
\left[\begin{array}{ccccc}
\ldots \operatorname{sign} f_1(y_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(\tilde{I}_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(\tilde{y}_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(\hat{I}_{ij}) & \operatorname{sign} f_1(y_{i,j+1}) \\
1 & 1 & 0 & -1 & -1
\end{array}\right]$$

<u>**Subcaso c**</u> $\quad$ $\text{sign } f_2(x, y_{i,j+1}) = 0$

Entonces $f_2(x, \cdot)$ no cambia de signo en I_{ij} y por tanto no tiene raíces en I_{ij}, más aún, $\text{sign } f_2(I_{ij}) = 1$

¿ Qué debe suceder para llegar al caso 2 c ?

y_{ij} es raíz de f_1 ó f'_2 entonces $\text{sign } f_1(x, y_{ij}) = 0$ ó $\text{sign } f'_2(x, y_{ij}) = 0$

y $\text{sign } g_1(x, y_{ij}) = 1$ ó $\text{sign } g_2(x, y_{ij}) = 1$

$y_{i,j+1}$ es raíz de f_1 ó f'_2 entonces $\text{sign } f_1(x, y_{i,j+1}) = 0$ ó $\text{sign } f'_2(x, y_{i,j+1}) = 0$

y $\text{sign } g_1(x, y_{i,j+1}) = 0$ ó $\text{sign } g_2(x, y_{i,j+1}) = 0$

Así, v debe ser de la forma :

$$\begin{bmatrix} \ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots \\ \ldots \text{sign } f'_2 \ldots \text{sign } f'_2 \ldots \\ \ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots \\ \ldots \text{sign } g_2 \ldots \text{sign } g_2 \ldots \end{bmatrix} \Rightarrow \omega = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots 0 & \text{sign } f_1(I_{ij}) & 0 \ldots\ldots \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>**Caso 3**</u> $\quad$ $\text{sign } f_2(x, y_{ij}) = 0$

Entonces y_{ij} es raíz de f_2

Debe ser $\quad \text{sign } f_1(x, y_{ij}) = 0 \quad$ ó $\quad \text{sign } f'_2(x, y_{ij}) = 0$

y $\quad \text{sign } g_1(x, y_{ij}) = 0 \quad$ ó $\quad \text{sign } g_2(x, y_{ij}) = 0$

entonces v debe ser :

$$\begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \\ \ldots \text{sign } f'_2(y_{ij}) \ldots \\ \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \\ \ldots \text{sign } g_2(y_{ij}) \ldots \end{bmatrix} \Rightarrow \omega = \varphi(v) = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ldots \text{sign } f_1(y_{ij}) \ldots \\ \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \\ \ldots \text{sign } g_1(y_{ij}) \ldots \\ \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \Rightarrow \omega = \varphi(v) = \begin{bmatrix} \ldots \text{sign } f_1(y_{ij}) \ldots \\ \ldots\ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Caso general :

$v = \text{SIGN}(f_1, \ldots, f_{s-1}, f'_s, g_1, \ldots, g_s)$, queremos $\omega = \text{SIGN}(f_1, \ldots, f_s)$

Para $x \in R^n$ fijo, sean $y_1 < y_2 < \ldots < y_N$ raíces de

$f_1(x, \cdot), \ldots, f_{s-1}(x, \cdot), f'_s(x, \cdot), g_1(x, \cdot), \ldots, g_s(x, \cdot)$

conociendo v podemos seleccionar las raíces de $f_1, \ldots, f_{s-1}, f'_s$:

$$y_{i1} < \ldots < y_{ik}$$

Como $\qquad f_s(x, y) = f_1(x, y) \cdot (\qquad) + g_1(x, y)$

$$\vdots$$

$\qquad\qquad f_s(x, y) = f'_s(x, y) \cdot (\qquad) + g_s(x, y)$

entonces $\quad \text{sign}\, f_s(x, y_{ij}) = \text{sign}\, g_\ell(x, y_{ij})$ para algún ℓ (para determinar ℓ basta observar la columna correspondiente a y_{ij} y dentro de ella a la fila en que es 0).

Existen las siguientes posibilidades $\text{sign}\, f_s(x, y_{ij}) = 1, -1$ ó 0.

Caso 1 $\qquad \text{sign}\, f_s(x, y_{ij}) = 0$

Entonces $\quad y_{ij}$ es raíz de $f_s(x, \cdot)$

Para llegar al caso 1 debemos tener :

y_{ij} es raíz de $f_1, \ldots, f_{s-1}$ ó f'_s, luego :

$\text{sign}\, f_1(x, y_{ij}) = 0$ ó $\text{sign}\, f_2(x, y_{ij}) = 0$ ó ... ó $\text{sign}\, f'_s(x, y_{ij}) = 0$

y $\quad \text{sign}\, g_1(x, y_{ij}) = 0$ ó $\text{sign}\, g_2(x, y_{ij}) = 0$ ó ... ó $\text{sign}\, g_s(x, y_{ij}) = 0$

Por tanto v puede ser de la forma :

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \ldots\ldots 0 \ldots\ldots \\ \ldots \text{sign}\, f_2 \ldots \\ \vdots \\ \ldots \text{sign}\, f_s \ldots \\ \ldots\ldots 0 \ldots\ldots \\ \ldots \text{sign}\, g_2 \ldots \\ \vdots \\ \ldots \text{sign}\, g_s \ldots \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ s \\ s+1 \\ s+2 \\ \vdots \\ 2s \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \quad \omega = \varphi(v) = \begin{bmatrix} \ldots\ldots 0 \ldots\ldots \\ \ldots \text{sign}\, f_2(y_{ij}) \ldots \\ \vdots \\ \ldots \text{sign}\, f_{s-1}(y_{ij}) \ldots \\ \ldots\ldots 0 \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{cc}
\vdots & \\
\left[\begin{array}{c}
\ldots \operatorname{sign} f_1 (y_{ij}) \ldots \\
\vdots \\
\ldots\ldots 0 \ldots\ldots \\
\ldots \operatorname{sign} g_1 (y_{ij}) \ldots \\
\vdots \\
\ldots\ldots 0 \ldots\ldots
\end{array}\right] &
\begin{array}{c}
1 \\ \vdots \\ s \\ s+1 \\ \\ 2s
\end{array}
\end{array}
\Rightarrow \omega = \varphi (v) =
\begin{array}{cc}
\vdots & \\
\left[\begin{array}{c}
\ldots \operatorname{sign} f_1 (y_{ij}) \ldots \\
\vdots \\
\ldots \operatorname{sign} f_{s-1} (y_{ij}) \ldots \\
\ldots\ldots 0 \ldots\ldots
\end{array}\right] &
\begin{array}{c}
1 \\ \vdots \\ s-1 \\ s
\end{array}
\end{array}
$$

__Caso 2__ $\qquad \operatorname{sign} f_s (x, y_{ij}) = 1$

Sigue el análisis análogo al caso cuando $s = 2$.

6. __Proposición__

Sea $f_i (x, y) = h_{i,\, m\, i} (y)\ x^{m\, i} + \ldots + h_{i,0} (y)$, $i = 1 , \ldots , s$, una sucesión de polinomios en $n + 1$ variables (x, y) , $y = (y_1 , \ldots , y_n)$, con coeficientes en Z , y sea $m = \sup \{ m\, i / i = 1 , 2 , \ldots , s \}$.

Sea $W' \subseteq W_{s,m}$. Entonces existe una combinación booleana $ß (y)$ de ecuaciones e inecuaciones polinomiales en las variables y con coeficientes en Z tal que para todo $y \in R^n$ se tiene :

$$\operatorname{SIGN} (f_1 (x, y) , \ldots , f_s (x, y)) \in W'$$

si y sólo si $ß (y)$ es verdadero.

__Prueba__ :

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que ninguno de los polinomios $f_1 , \ldots , f_s$ es idénticamente nulo [si uno de ellos es nulo, entonces la fila en SIGN $(f_1 , \ldots , f_s)$ que corresponde a dicho polinomio es toda nula y puede ser suprimida disminuyendo el orden de la matriz o simplemente no se lleva en cuenta.] y que $h_{i,\, m\, i} (y)$ no es idénticamente nulo para $i = 1 , 2 , \ldots , s$.

A la sucesión $f_1 , \ldots , f_s$ le asociamos la sucesión de sus grados en x : $(m_1 , \ldots , m_s)$.

Comparamos sucesiones finitas de naturales usando el orden siguiente :

$\sigma = (m'_1 , \ldots , m'_t) < \tau = (m_1 , \ldots , m_s)$

si existe $p \in N$ tal que para todo $q > p$, el número de ocurrencias de q en σ es igual al número de ocurrencias de q en τ, y el número de ocurrencias de p en σ es estrictamente menor al número de ocurrencias de p en τ.

Ejemplo $\sigma = (2 , 2 , 3 , 8 , 5 , 7) < \tau = (3 , 3 , 4 , 8 , 5 , 7)$

si $p = 5$, $q = 7 > p = 5$ y ocurre una vez para σ y τ

$8 > 5$ y ocurre una vez para σ y τ

5 no ocurre menos veces en σ que en τ

si $p = 4$, 4 ocurre una vez en τ y ninguna en σ

$5 > 4$ ocurre una vez en τ y una vez en σ

$7 > 4$ ocurre una vez en τ y una vez en σ

$8 > 4$ ocurre una vez en τ y una vez en σ

Observaciones :

(a) El número p es único.

(b) Si consideramos el conjunto de todas las sucesiones finitas crecientes de números naturales entonces es un conjunto totalmente ordenado : siempre existe la menor de todas las sucesiones según $<$.

(c) Para escoger p :

$$\sigma = (m'_1 , \ldots , m'_t) \ , \ \tau = (m_1 , \ldots , m_s)$$

Considere $p = \max \ \{ m_1 , \ldots , m_s , m'_1 , \ldots , m'_t \}$

si existe el mismo número de p's en σ y τ , pasar al siguiente mayor hasta encontrarlo.

Este orden permite hallar una cadena infinita $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots$

Podemos por tanto hacer un raciocinio por recurrencia sobre el orden $>$.

Denotamos : $m = \sup \{ m_1 , \ldots , m_s \}$

Si $m = 0$, $f_1 (x, y) = h_{1,0} (y) , \ldots , f_s (x, y) = h_{s,0} (y)$ (son polinomios de grado 0 en x) , y $SIGN (f_1 (x, y) , \ldots , f_s (x, y))$ es la lista de signos de los términos "constantes" $h_{1,0} (y) , \ldots , h_{s,0} (y)$, entonces :

$$SIGN (h_{1,0} (y) , \ldots , h_{s,0} (y)) = \begin{bmatrix} t_{11} \\ \vdots \\ t_{s1} \end{bmatrix} \qquad (t_{ij} \in \{ -1, 0, 1 \})$$

$$\Leftrightarrow \quad h_{1,0}(y) > 0 \quad \text{si} \quad t_{i1} = 1$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad t_{i1} = 0$$
$$< 0 \quad \text{si} \quad t_{i1} = -1$$

Supongamos $m \geq 1$ y $m_s = m$.

Denotamos : $W'' \subseteq W_{2s,m}$ a la imagen inversa de $W' \subseteq W_{s,m}$ bajo la aplicación $\varphi : W_{2s,m} \to W_{s,m}$, es decir, $W'' = \varphi^{-1}(W')$.

Por el lema 3, para todo $y \in R^n$ tal que $h_{i,m\,i}(y) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$, la propiedad

$$\text{SIGN}(f_1(x,y), \ldots, f_s(x,y)) \in W'$$

es equivalente a

(*) $\text{SIGN}(f_1(x,y), \ldots, f_{s-1}(x,y), f'_s(x,y), g_1(x,y), \ldots, g_s(x,y)) \in W''$

La sucesión de grados de $f_1, \ldots, f'_s, \ldots, g_1, \ldots, g_s$ es menor que $(m_1, \ldots, m_s)$ respecto al orden $<$, en efecto :

$\sigma = (m_1, \ldots, m_{s-1}, m_s\text{-}1, \text{grado } g_1, \ldots, \text{grado } g_s) < (m_1, \ldots, m_s) = \tau$

$p = m_s$, hay 0 ocurrencias de m_s en $\sigma < 1$ ocurrencia de m_s en τ

$q > m_s$; 0 ocurrencias de q en $\sigma = 0$ ocurrencias de q en τ.

Esto nos lleva a una sucesión de polinomios donde la sucesión de grados en x es menor que $(m_1, \ldots, m_s)$ respecto al orden $<$.

Dado que tenemos una sucesión $<$ $(m_1, \ldots, m_s)$, podemos aplicar la hipótesis de recurrencia a la nueva sucesión y como tenemos la equivalencia (*), la prueba está acabada.

□

7. <u>Proposición</u>

Sean $f_1(x,y), \ldots, f_s(x,y)$ polinomios de $n+1$ variables, $x \in R^n$, $y \in R$, con coeficientes en R ; y sea q el mayor de los grados de los f_k en y.

Sea $\omega \in W_{s,q}$. Entonces existe una combinación booleana $\beta_\omega(x)$ de ecuaciones e inecuaciones polinomiales en las variables x con coeficientes en R tales que para todo $x \in R^n$ se tiene $\text{SIGN}(f_1(x,y), \ldots, f_s(x,y)) = \omega \Leftrightarrow \beta_\omega(x)$ es verdadero.

Prueba :

Sea $a \in R^p$ el vector formado por los coeficientes de los f_k.

Tenemos entonces $f_k(x, y) = G_k(a, x, y)$, donde G_k es un polinomio de $p + n + 1$ variables con coeficientes en Z. Entonces, por la proposición 6, existe una combinación booleana $\beta_\omega(T,x)$ de ecuaciones e inecuaciones polinomiales en las variables (T, x), con coeficientes en Z, tales que para todo $(t, x) \in R^{p+n}$ tenemos :

$$\mathrm{SIGN}\,(G_1(t, x, y), \ldots, G_s(t, x, y)) = \omega \Leftrightarrow \beta_\omega(t, x) \text{ es verdadero.}$$

Es suficiente considerar $\beta_\omega(x) = \beta'_\omega(a, x)$.

8. ¿ Quién es $\beta_\omega(x)$?

Tenemos los polinomios :

$$f_i(x, y) = h_{i, m_i}(x)\, y^{m_i} + \ldots + h_{i,0}(x), \quad i = 1, 2, \ldots, s, \quad x \in R^n, \quad y \in R.$$

Si $q = \max\{ m_i \,/\, i = 1, \ldots, s \}$ es nulo, $q = 0$, tenemos :

$$f_1(x, y) = h_{1,0}(x), \ldots, f_{s,0}(x, y) = h_{s,0}(x).$$

Dado $\omega \in W_{s,0}$ = conjunto de matrices del tipo $\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{s1} \end{bmatrix}$,

$t_{i,j} \in \{ -1, 0, 1 \}$, se tiene $\mathrm{SIGN}\,(f_1(x, y), \ldots, f_s(x, y)) = \omega$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{SIGN}\,(h_{1,0}(x), \ldots, h_{s,0}(x)) = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{s1} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \beta_\omega(x) \quad : \quad h_{i,0}(x) \begin{cases} > 0 & \text{si } t_{i1} = 1 \\ = 0 & \text{si } t_{i1} = 0 \\ < 0 & \text{si } t_{i1} = -1 \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, s$$

Supongamos $q = 1$.

Asumimos inicialmente que grado $f_s(x, \cdot) = 1$ y grado $f_i(x, \cdot) = 0$, $i = 1, \ldots, s-1$, es decir, la sucesión de grados es $(0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Dado $\omega \in W_{s,1}$ = conjunto de las matrices de orden $s \times (2\ell + 1)$,

donde $\ell = 0, 1, \ldots, s$ con elementos en $\{ -1, 0, 1 \}$,

Tenemos :

$\mathrm{SING}\,(f_1 , \dots , f_s) = \omega \;\Leftrightarrow\; \mathrm{SIGN}\,(f_1 , \dots , f_{s-1} , f'_s , g_1 , \dots , g_s) = v \in \varphi^{-1}(\omega)$

Sabemos calcular la función φ y por tanto podemos calcular $\varphi^{-1}(W)$

$$\varphi : W_{2s,1} \to W_{s,1}$$

$v = \varphi^{-1}(W) \subseteq W_{2s,1}$ = conjunto de las matrices de orden $2s \times (2\lambda + 1)$,

$$\lambda = 0 , 1 , \dots , 2s .$$

Observar que el orden de v aumenta con relación al orden de ω, sin embargo,

$v = \mathrm{SIGN}\,(f_1 , \dots , f_{s-1} , f'_s , g_1 , \dots , g_s)$,

aquí sabemos que $f_1 , \dots , f_{s-1} , f'_s , g_1 , \dots , g_s$ son todos polinomios de grado cero

y sabemos calcular $\beta_v(x)$ en este caso (caso $q = 0$) .

Si fuese grado $f_{s-1}(x, \cdot) =$ grado $f_s(x, \cdot) = 1$ y grado $f_1 = \dots =$ grado $f_{s-2} = 0$,

tenemos :

$\mathrm{SIGN}\,(f_1 , \dots , f_s) = \omega \;\Leftrightarrow\; \mathrm{SIGN}\,(f_1 , \dots , f_{s-1} , f_s , g_1 , \dots , g_s) = v \in \varphi^{-1}(\omega)$

en este caso la sucesión de grados es $(0, \dots , 0, 1, 0, 0 \dots 0)$

$f_1 \quad f_{s-2} \quad f_{s-2} \quad f_s \quad g_1 \quad g_s$

Efectuando una permutación P de filas en la matriz v llevamos el 1 para el último lugar y tenemos : $(0, 0, \dots , 0, 1)$, en la

$2s-1 \quad 2s$

práctica tenemos :

$\mathrm{SIGN}\,(f_1 , \dots , f_{s-2} , f'_s , g_1 , \dots , g_s , f_{s-1}) = P\, v \in P\, \varphi^{-1}(\omega)$

$\Leftrightarrow \mathrm{SIGN}\,(f_1 , \dots , f_{s-2} , f_s , g_1 , \dots , g_s , f'_{s-1} , q_1 , \dots , q_{2s}) \in \varphi_1^{-1} P\, \varphi^{-1}(W)$

donde $\varphi_1 : W_{4s,1} \to W_{2s,1}$ es la aplicación del lema 6 y $q_1 , \dots , q_{2s}$ son los residuos resultantes de dividir f_{s-1} por $f_1 , \dots , g_s$.

Ahora todos tienen grado 0 y estamos en el caso $q = 0$ y podemos construir $\beta_\omega(x)$

Lo mismo sucede en el caso general.

9. Descomposición de conjuntos semi-algebraicos

La descomposición de un conjunto semi-algebraico $A \subseteq R^n$ es hecha por la recurrencia sobre n . La herramienta para el paso de n a n + 1 es el teorema siguiente. Denotamos $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

10. Teorema Sean $f_1(x, y), \ldots, f_s(x, y)$ polinomios en n + 1 variables con coeficientes en R . Existe una partición de R^n en un número finito de conjuntos semi-algebraicos $A_1, \ldots, A_m$ y para $i = 1, \ldots, m$, el número finito (eventualmente nulo) de funciones semi-algebraicas continuas.

$$\lambda_{i,1} < \ldots < \lambda_{i,k_i} . \lambda_{i,j} : A_i \rightarrow R \quad , \quad \text{tales que :}$$

(i) $\forall\, x \in A_i$, $\{ \lambda_{i,1}(x), \ldots, \lambda_{i,k_i}(x) \}$ es el conjunto de las raíces de los polinomios no idénticamente nulos entre $f_1(x, y), \ldots f_s(x, y)$.

(ii) $\forall\, x \in A_i$, los signos de $f_k(x, y)$, $k = 1, \ldots, s$, no dependen sino de los signos de $y - \lambda_{i,j}(x)$, $j = 1, \ldots, k_i$.

En particular, el gráfico de cada $\lambda_{i,j}$ está contenido en los ceros de un f_k , k dependiendo de i y j .

Prueba :

Definición Una familia F de polinomios es estable por derivación en relación a la variable y si para todo $f \in F$ tenemos $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ó $\frac{\partial f}{\partial y} \in F$

Volviendo al teorema, nos podemos restringir al caso cuando la familia $f_1, \ldots, f_s$ es estable por derivación en relación a la variable y, bastará juntar las derivadas correspondientes y al final retirar las funciones $\lambda_{i,j}$ que no son raíces de polinomios de la familia original.

Según la proposición 7 , a cada $\omega \in W_{s,q}$ corresponde un conjunto semi-algebraico $A_\omega = \{ x \in R^n \,/\, \beta_\omega(x) \text{ es verdadero} \}$.

Sean $A_1, \ldots, A_m$ los A_ω no vacíos (son un número finito pues $W_{s,q}$ es finito) . Estos conjuntos forman una partición de R^n y SIGN ($f_1(x, y), \ldots f_s(x, y)$) es constante sobre cada A_i .

Para cada $x \in A_i$, $\lambda_{i,1}(x) < \ldots < \lambda_{i,\lambda i}(x)$, $(\lambda_i \leq s\,q)$, son todas las raíces de los polinomios no nulos $f_1(x, y), \ldots, f_s(x, y)$ y para todo $k = 1, \ldots, s$ los signos :

$$\operatorname{sign} f_k(x, \lambda_{i,j}(x)) \quad , \quad j = 1, \ldots, \lambda_i \quad \text{y}$$

$$\operatorname{sign} f_k(x, < \lambda_{i,j}(x), \lambda_{i,j+1}(x) >) \quad , \quad j = 0, \ldots, \lambda_i$$

son independientes de $x \in A_i$ (por convención $\lambda_{i,0}(x) = -\infty$ y $\lambda_{i,\lambda i+1}(x) = +\infty$).

El gráfico de $\lambda_{i,j}$ es :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Graf}(\lambda_{i,j}) &= \{ (x, \lambda_{i,j}(x)) / x \in A_i \} \\
&= \{ (x, y) \in A_i \times R / y = \lambda_{i,j}(x) = \text{raíz de algún } f_k \} \\
&= \{ (x, y) \in A_i \times R / \exists (y_1, \ldots, y_{\lambda_i}) \in R^{\lambda i} , \\
&\qquad \pi_k f_k(x, y_1) = \ldots = \pi_k f_k(x, y_{\lambda i}) = 0 , \\
&\qquad y_1, \ldots, y_{\lambda i} \quad \text{y} \quad y = y_j \}
\end{aligned}$$

entonces $\lambda_{i,j}$ es semi-algebraico (su gráfico lo es).

Resta probar que $\lambda_{i,j}$ es continua.

Sea $x' \in A_i$ fijo arbitrario. Entonces $y_j = \lambda_{i,j}(x')$ es raíz simple de por lo menos uno de los $f_k(x', y)$ (debido a que la familia es estable), supongamos es raíz simple de $f_1(x', y)$.

Para $\varepsilon \in R$ suficientemente pequeño tenemos :

$$f_1(x', y_j - \varepsilon) \quad f_1(x', y_j + \varepsilon) < 0 \qquad \forall\, x \in \cup$$

Así $f_1(x, \cdot)$ posee una raíz entre $y_j - \varepsilon$ y $y_j + \varepsilon$. Como esto puede hacerse simultáneamente para todas las j , la raíz de $f_1(x, \cdot)$ que está entre entre $y_j - \varepsilon$ y $y_j + \varepsilon$ es $\lambda_{i,j}(x)$; esto prueba que $\lambda_{i,j}$ es continua.

□

11. <u>Definición</u> Sean $f_1(x, y), \ldots, f_s(x, y)$ polinomios de $n + 1$ variables con coeficientes en R . La familia ($A_i(\lambda_{i,j})$; $j = 1, \ldots, \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$) que verifica las condiciones (i) e (ii) del teorema 10 se llama <u>cortadura</u> de $f_1, \ldots, f_s$. Si los $A_i, \ldots, A_m$ son dados por combinaciones booleanas de condiciones de signo sobre los polinomios $g_1, \ldots, g_t$ cortan a los $f_1, \ldots, f_s$.

12. Proposición Sean $f_1(x, y), \ldots, f_s(x, y)$ polinomios en $R[x, y]$ y

$(A_i(\lambda_{i,j})\ j = 1, \ldots, \lambda_i,\ i = 1, \ldots, m)$ una cortadura de $f_1, \ldots, f_s$.

Entonces para todo i, $1 \leq i \leq m$, y todo j, $0 \leq j \leq \lambda_i$, el corte

$< \lambda_{i,j} ; \lambda_{i,j+1} > = \{ (x, y) \in R^{n+1} / x \in A_i, \lambda_{i,j}(x) < y < \lambda_{i,j+1}(x) \}$ es semi-

algebraico y semi- algebraicamente homeomorfo a $A_i \times < 0, 1 >$.

Prueba :

Cada corte es semi- algebraico pues A_i y las funciones $\lambda_{i,j}$ son semi-algebraicas.

El homeomorfismo semi-algebraico es :

$$h : < \lambda_{i,j} ; \lambda_{i,j+1} > \rightarrow A_i \times < 0, 1 >$$

Para $j = 1, \ldots, \lambda_i - 1$, $h(x, y) = (x, (y - \lambda_{i,j}(x)) / (\lambda_{i,j+1}(x) - \lambda_{i,j}(x)))$

Para $j = 0$ tenemos $\lambda_{i,0} = -\infty$ y hacemos (si $\lambda_i \neq 0$)

$$h(x, y) = (x, (1 + \lambda_{i,1}(x) - y)^{-1})$$

Para $j = \lambda_i \neq 0$, tenemos $\lambda_{i, \lambda i+1} = +\infty$ y hacemos

$$h(x, y) = (x, (y - \lambda_{i, \lambda i}(x) + 1)^{-1})$$

Para $\lambda_i = 0$, $\lambda_0 = -\infty$ y $\lambda_1 = +\infty$, hacemos

$$h(x, y) = (x, (y + \sqrt{1+y^2}) / 2\sqrt{1+y^2})$$

BIBLIOGRAFIA :

1. Lars Hormander : Fourier integral operators. Acta Math 127 (1971), 79-183.
2. Goresky M. , Mac Pherson R. : Stratified Morse Theory - Springer-Verlag. NY. (1987).
3. J. Bochnak , M. Coste , M. Roy : Géométrie algébrique réelle. Springer-Verlag. (1987).
4. H. Hironaka : Introduction to real analytic sets and real analytic maps. Lecture Notes of Ist-Math. "Leonida Tonelli". Pisa. (1973).

Lima, Mayo de 1998.